

수정 Boussinesq 방정식을 이용한 Bragg 반사

조용식*, 이종인**, 이봉희***

1. 서론

외해로부터 해안선부근으로 이동하는 파랑은 해저협곡 및 대륙붕과 같은 해저지형의 변화, 방파제와 같은 해안구조물과의 상호간섭 및 파랑상호간의 비선형효과 등에 의해 굴절, 회절, 천수 및 쇄파 등과 같은 변화를 경험한다. 파랑변형의 원인이 되는 여러 변화중에서 흥미있고 연구할 가치가 있는 물리적 현상중의 하나는 Bragg 반사이다.

Bragg 반사는 재료공학의 한분야인 結晶學(crystallography)으로부터 그 개념이 유래한 것으로, 해저지형이 정현파의 모양을 갖는 사런형상(sinusoidally varying sandbar)일 때 입사파의 파장이 사런의 파장의 두배가 되면 공명에 의해 입사파의 반사율이 매우 커지는 현상을 말한다. 따라서, 실제 자연상태에서 Bragg 반사가 발생하면 외해로부터 이동해오는 입사파가 보유한 에너지의 상당량이 해저지형에 의해 외해로 반사된다.

Bragg 반사에 관한 국내에서의 연구는 거의 없는 상태이며, 최근 조용식 등(1995)에 의해 이론적인 연구가 시작되었을 뿐이다. 조용식 등(1995)에서는 Boussinesq 방정식을 이용하여 수심이 일정할 때 크노이드파와 정현파를 입사파로하여 천해역에서의 Bragg 반사에 관한 연구를 수행하였다. 미국과 일본 등에서는 Bragg 반사에 관한 연구가 비교적 활발하여 미국의 오대호 연안 및 일본의 천해 지역에서 많이 발견되는 사런의 형성과정과 사런에 의한 파랑의 특성변화를 규명하기 위한 많은 이론적 및 실험적 연구가 수행되었다(Katoh, 1984; Hara & Mei, 1987; Yoon & Liu, 1987; Liu & Cho, 1993). Mei & Liu(1993)에 따르면 전형적인 사런은 경사가 1/200 이하인 완경사 해안에서 주로 존재하며, 사런의 수는 3 ~ 17개이고, 사런간의 간격은 대략 10 ~ 400m이다.

Bragg 반사는 입사파의 성질을 변형시키는 것은 물론, 사런의 형태 또는 길이에 따라 파에너지의 상당량을 반사시킬 수 있기 때문에 이에 관한 특성을 이해하면 해안구조물 설계 등에 효과적으로 사용할 수 있다. 즉, Bragg 반사를 이용하면 천해역에서 방파제 및 항만시설과 같은 해안구조물은 물론 해수욕장 등과 같은 편의시설을 위한 해안선 보호 및 불필요한 표사의 퇴적과 침식 등을 고려한 효율적인 연안개발계획을 할 수 있다.

본 연구에서는 기존 Boussinesq 방정식의 한계인 수심이 매우 얇은 천수역에서 적용의 한계, 즉 비선형항의 역할이 매우 중요한 천해지역에서 파랑의 변화를 적절히 묘사하지 못하는 것을 극복하기 위해 최근 연구가 활발히 진행중인 수정 Boussinesq 방정식을 이용하여 보다 일반적이고 실제 자연 지형에 부합되는 Bragg 반사에 대하여 연구한다.

2. 지배방정식

최근 기존의 Boussinesq 방정식이 갖는 한계, 즉 수심이 매우 얇은 곳에서의 강한 비선형성을 나타내기 힘들고, 수심이 깊어지면 분산효과를 적절히 나타내지 못하는 것을 극복하기 위해 수정된 형태의 Boussinesq 방정식에 관한 연구들이 많이 시도되고 있다(Chen & Liu, 1995).

* 한양대학교 토목공학과 강사

** 한양대학교 토목공학과 박사과정

*** 건설교통부 하천계획과 서기관

본 연구에서는 이와 같은 연구의 일부를 이용하여 다음과 같은 1차원 Boussinesq 방정식을 유도하여 지배방정식으로 사용한다. 기존 Boussinesq 방정식을 유도하기 위한 기본 가정이 약 분산성과 약 비선형(weakly dispersive and weakly nonlinear), 즉 $O(\mu^2) \approx O(\epsilon) \ll 1$ 인 반면, 본 연구에서는 $O(\mu^2) \ll 1$ 로 가정하며, 비선형항의 크기를 나타내는 $O(\epsilon)$ 의 크기는 구속하지 않는다. 이와 같은 가정을 이용하여 다음과 같은 무차원 수정 Boussinesq 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \epsilon \zeta) u_a \} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ z_a \frac{\partial}{\partial x} (h u_a) + \frac{z_a^2}{2} \frac{\partial u_a}{\partial x} \right\} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \right] + \text{HNT}_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ z_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) + \frac{z_a^2}{2} \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \right\} + \text{HNT}_2 = 0 \quad (2)$$

식 (1)과 (2)는 각각 연속방정식과 운동량방정식을 나타내며, HNT_1 과 HNT_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{HNT}_1 &= \mu^2 \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[\zeta \left\{ -\frac{\epsilon}{2} \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) + \frac{1}{2} \left(z_a^2 - \frac{1}{3} \epsilon^2 \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \right\} \right] \\ \text{HNT}_2 &= \mu^2 \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ z_a u_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) + \frac{z_a^2}{2} u_a \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u_a}{\partial t} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (h u_a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) \right] \\ &\quad - \mu^2 \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2 u_a}{\partial x \partial t} + \zeta u_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h u_a) - \zeta \frac{\partial}{\partial x} (h u_a) \frac{\partial u_a}{\partial x} \right] \\ &\quad - \mu^2 \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\zeta^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

식 (1)과 (2)에서 α 는 $\alpha = 0.5(z/h)^2 + z/h$ 로 주어지며, $\alpha = -1/3$ 이면 식 (1)과 (2)는 기존의 Boussinesq 방정식이 된다(Chen & Liu, 1995). 기존의 Boussinesq 방정식의 절삭오차가 $O(\mu^4, \mu^2 \epsilon)$ 인 반면 식 (1)과 (2)의 절삭오차는 $O(\mu^4, \mu^2 \epsilon^2)$ 이다. 즉, 식 (1)과 (2)는 기존의 Boussinesq 방정식에 고차 비선형항을 추가한 것이다.

3. 수치계산

수치계산에서는 Fig. 1과 같은 해저지형에 입사하는 크노이드파를 이용하여 Bragg 반사를 연구한다. 본 연구에서는 문제를 간단히 하기 위해 경사를 고려하지 않는다. Fig. 1에 관한 상세한 설명과 식 (1)과 (2)를 수치해석 과정에 관한 설명은 조용식 등(1995)을 참조할 수 있다.

먼저, Fig. 2는 사련의 수에 따른 Bragg 반사의 강도를 검사한 것으로, 사련의 수가 증가함에 따라 반사 또한 증가하는 것을 알 수 있다. Fig. 3과 4는 서로 다른 세 경우의 비선형항의 크기에 따른 Bragg 반사를 비교한 것으로 분산항은 $\mu^2 = 0.1067$ 로 고정되었으며, 사련의 길이는 각각 $L = 6\pi$ 와 $L = 12\pi$ 로 고정되어 있다. 비선형항의 크기가 증가할수록 반사가 감소하는데 이는 서로 다른 성분 간의 비선형 상호작용이 활발해져 더욱 많은 에너지가 고차 harmonic으로 이동했기 때문이다. Fig. 3과 4에서는 또한 사련의 수가 증가할수록 반사가 커짐을 알 수 있다.

Bragg 반사는 외해로부터 진입해오는 파에너지의 상당량을 반사시킬 뿐만 아니라 해안에서 관측

되는 사례의 원인이 되므로, 이에 관한 정확한 물리적 해석이 필요하다. Bragg 반사개념은 해안구조물의 경제적인 설계에 응용될 수 있으며, 또한 해안선 근처의 불필요한 퇴적 및 침식을 방지하는데 이용될 수 있다.

4. 참고문헌

- 조용식, 이종인, 이정규, 윤태훈, 1995. "천해파의 Bragg 반사," *대한토목학회논문집*, 제15권, 제6호, pp.1823-1832.
- Chen, Y. and Liu, P.L.-F., 1995. "Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation," *J. of Fluid Mech.*, 288, pp.351-381.
- Hara, T. and Mei, C.C., 1987. "Bragg reflection of surface waves by periodic bars: Theory and experiment," *J. of Fluid Mech.*, Vol.178, pp.221-241.
- Katoh, K. 1984. *Multiple longshore bars formed by long period standing waves* (in Japanese), Rep. Port Harbor Res. Inst. pp.1-46, Min. of Trans., Japan.
- Liu, P.L.-F. and Cho, Y.-S., 1993. "Bragg reflection of infragravity waves by sandbars," *J. Geophys. Res.*, Vol.98, C12, pp.22,733-22,741.
- Mei, C.C. and Liu, P.L.-F., 1993. "Surface waves and coastal dynamics," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.215-240.
- Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F., 1987. "Resonant reflection of shallow-water waves due to corrugated boundaries," *J. of Fluid Mech.*, Vol.180, pp.451-469.

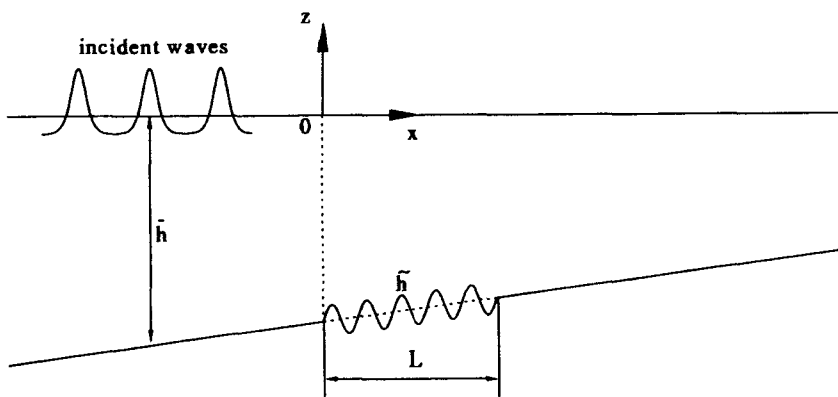


Fig. 1. Definition sketch of the slowly varying seabed.

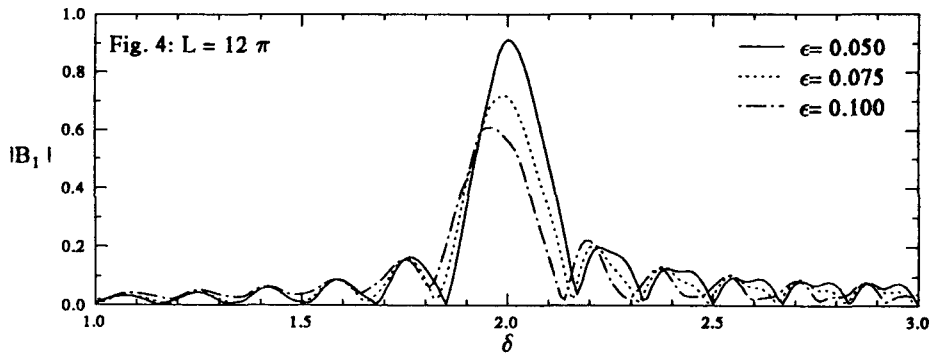
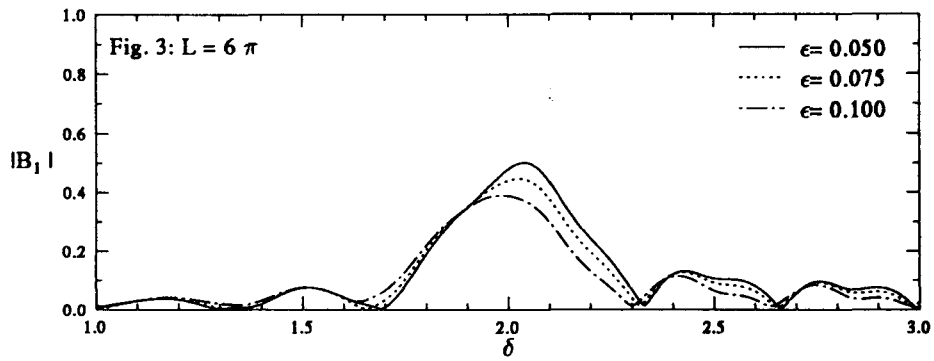
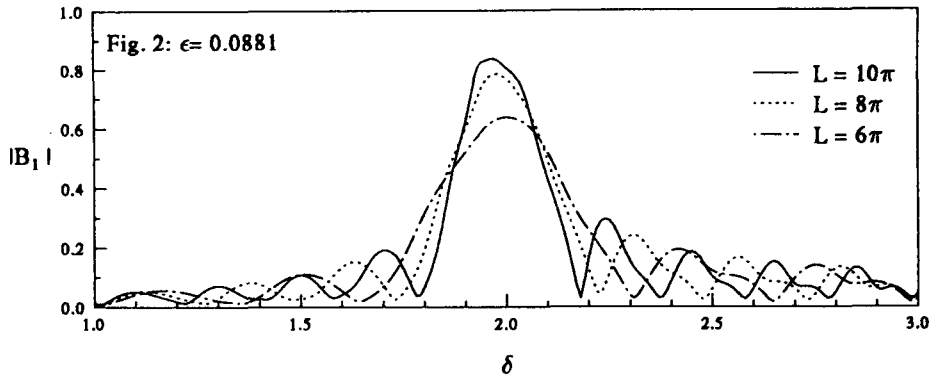


Fig. 2 - 4: The reflection of cnoidal wave due to rippled seabed, $\mu^2 = 0.1067$, $\rho = 0.15$.