

# 견실한 비선형 마찰보상 이산제어

## Robust Digital Nonlinear Friction Compensation

강 민식, 송 원길, 김 창재 (국방과학연구소)

### Abstract

This report suggests a new non-linear friction compensation for digital control systems. This control adopts a hysteric nonlinear element which can introduce the phase lead of the control system to compensate the phase delay comes from the inherent time delay of a digital control. The Lyapunov direct method is used to prove the asymptotic stability of the suggested control, and the stability and the effectiveness are verified analytically and experimentally on a single axis servo driving system.

Key Words : stick-slip friction (정지-미끄럼 마찰), limit cycle, nonlinear friction compensation (비선형 마찰보상), hysteresis control(히스테리시스 제어), phase plane(위상평면), phase lead, lag (위상 리드, 지연)

### 1. 서 론

마찰은 상대운동을 하는 기계요소 상호간에 작용하는 저항력으로, 브레이크와 같이 절대적으로 필요한 경우도 있지만 정밀위치제어 시스템에서는 그 영향의 최소화가 요구되고 있다. 마찰은 일반적으로 정지마찰과 운동마찰로 구분되며, 운동마찰은 쿨롬마찰과 점성마찰의 합으로 모형화 한다. 마찰의 모형화는 많은 연구가 진행되어왔는데[1,2], 대부분 고속구간에서는 잘 정의되어있으나, 저속구간에서, 특히 정지-미끄럼 (stick-slip) 현상이 발생하는 영역에서는 아직 정확한 모델이 없다. 위치제어시 기준 위치에서는 영속도 근방이므로 정지-미끄럼현상은 제어성능을 저하시키는 요인이 된다. 이러한 정지-미끄럼 마찰계의 위치제어에 관한 연구가 많이 진행되어 왔는데[3,4], 특히, Southward의 비선형 마찰 보상제어 [4]는 1-자유도계의 위치제어시 위상평면 원점의 안정성을 보장한다. 이 방법은 정량적으로 고정된 마찰 대신 마찰의 범위를 설정하고 범위의 한계치를 이용하므로 다른 모형기준 제어방법에 비해 견실하고 적용이 용이한 방법이다. Southward의 방법은 연속계에서 제안된 방법으로 시간지연제나 이산제어계에 적용할 경우 Limit Cycle을 유발하지 된다. 본 논문에서는 Southward 제어기에 대한 소개와 이산제어계에서의 불안정성을 보이고, 이 불안정성을 해결 할 수 있는 견실한 제어기 설계방법을 제시한다. 이 방법의 안정성은 Lyapunov Direct 방법을 이용하여 증명하며, 실제 구동장치에 적용하여 그 제어성능을 입증한다.

### 2. 마찰 모델

관성량  $J$ 를 갖는 회전체의 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} = -T_d + T \quad (1)$$

$\omega = \dot{\theta}$

식(1)에서  $\theta$ 는 회전각,  $\omega$ 는 회전속도,  $T_d$ 는 마찰력,  $T$ 는 제어입력을 나타낸다. 마찰력  $T_d$ 는 정지마찰력,  $T_{stick}(T)$ ,와 운동마찰력,  $T_{slip}(\omega)$ ,의 합이며

$$T_d = T_{slip}(\omega)[\lambda(\omega)] + T_{stick}(T)[1 - \lambda(\omega)] \quad (2.1)$$

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

정지/미끄럼마찰력은 다음과 같이 정의된다.

$$T_{stick}(T) = \begin{cases} T_s^+ & 0 < T_s^+ < T \\ T & T_s^- \leq T \leq T_s^+ \\ T_s^- & T < T_s^- < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$T_{slip}(\omega) = T_a^+(\omega)\mu(\omega) + T_a^-(\omega)\mu(-\omega) \quad (4.1)$$

$$\mu(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.2)$$

여기서  $T_s^+$ ,  $T_s^-$ 는 정지마찰력 극한값이며,  $T_a^+$ 와  $T_a^-$ 는 각각 양과 음의 속도에서의 미끄럼 마찰력으로 비대칭으로 가정한다.  $\mu(\cdot)$ 는우연속(right-continuous) Heavyside 계단함수이다. 일반적으로 미끄럼 마찰력은 쿨롬마찰 (Coulumb Friction)과 점성마찰 (Viscous Friction)로 모형화 할 수 있는데 정확한 계수를 알기 어렵고, 또한 위치에 따라 변할 수 있는 값이므로 그림 1과 같이 각 속도영역에서 두개의 직선으로 이루어진 영역내에 존재한다고 가정한다.

$$b_0\omega \leq T_a^+(\omega) \leq T_0^+ + b_1\omega, \quad \forall \omega > 0$$

$$T_0^- + b_1\omega \leq T_a^-(\omega) \leq b_0\omega, \quad \forall \omega < 0 \quad (5)$$

식(5)에서  $b_1 \geq b_0 > 0$ ,  $T_s^+ \geq T_0^+ > 0$ ,  $T_s^- \leq T_0^- < 0$ 라고 가정하자.

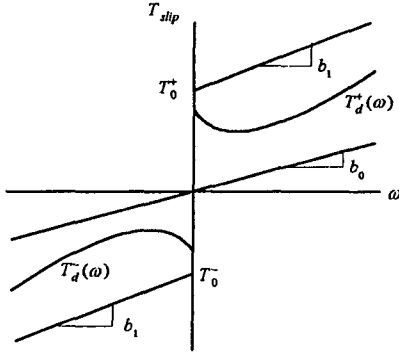


그림 1. 미끄럼 마찰 모델

### 3. Southward 비선형 마찰보상 제어 [4]

앞의 정지-미끄럼 마찰계에 다음과 같은 선형 비례-미분제어기를 적용하면

$$T = -K_p \theta - K_d \dot{\omega} \quad (6)$$

여기서  $K_p (>0)$ 와  $K_d (>0)$ 는 각각 비례, 미분제어기 계인이다. 이 제어기에 대한 폐회로의 응답은

$$J\ddot{\theta} + K_d \dot{\omega} + K_p \theta = T_d \quad (7)$$

이 응답은 안정하게 정상상태에 도달되며, 정상상태에서는 비례제어입력과 정지마찰력이 힘의 평형을 이루는 상태이므로

$$K_p \theta = T_{stick}(T) \quad (8)$$

따라서 정상상태의 응답은 평형범위 (equilibrium region),  $E_{PD}$ , 내에 존재하게 된다.[4] 즉,

$$E_{PD} = \{(\theta, \omega) | \omega = 0, \theta_L \leq \theta \leq \theta_H\} \quad (9)$$

여기서

$$\theta_L = -\left(\frac{T_s^-}{K_p}\right) < 0, \quad \theta_H = -\left(\frac{T_s^+}{K_p}\right) > 0 \quad (10)$$

Southward의 비선형 마찰보상 제어기는 위의 정상상태오차를 제거할 수 있으며 견실한 제어방법으로 위상평면원점( $\theta=0, \omega=0$ )의 안정성을 보장한다. 이 제어기는 다음의 식으로 주어진다.

$$T = -K_d \dot{\omega} - K_p(\theta + \theta_c) \quad (11)$$

식(11)의 우변 마지막 항은 비선형 마찰보상기로 그림 2와 같이 정의되며 정리하면

$$K_p(\theta + \theta_c) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \theta = 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < 0 \\ K_p \theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

$\tilde{\theta}_L$ 와  $\tilde{\theta}_H$ 의 절대크기는 각각  $\theta_L$ 와  $\theta_H$ 의 절대 크기보다 큰 값으로 택하므로 마찰보상력의 절대 크기

는 정지마찰력 절대 크기보다 크게 되어,  $\tilde{T}_s^- < T_s^-$ ,  $T_s^+ < \tilde{T}_s^+$  정지-미끄럼현상이 발생하지 않으며, 응답은 원점을 향해 연속적으로 이동한다. 이 방법은 위상평면 원점의 Asymptotic 안정성을 보장한다.[4]

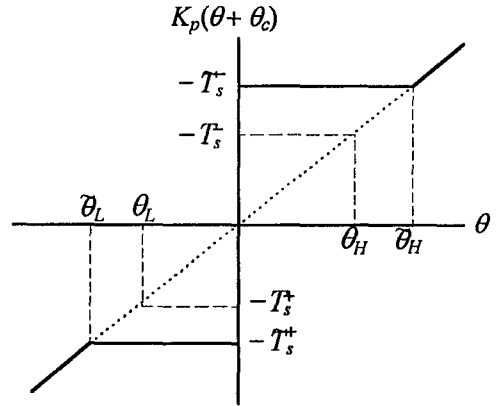


그림 2. Southward 비선형 마찰보상입력

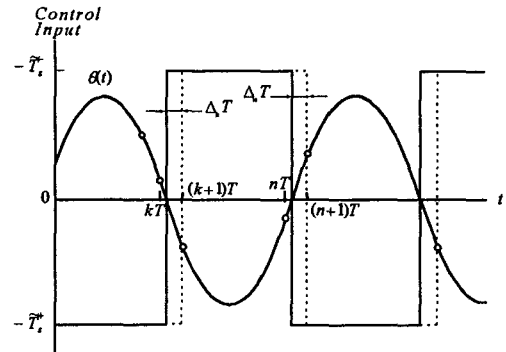


그림 3. Southward와 Hysteresis 비선형 제어입력

Southward의 비선형 마찰보상제어를 시간지연이 있거나, 이산제어에 적용할 경우 안정성을 보장하지 못하며, Limit Cycle이 발생한다. 이 불안정성은 Lyapunov Direct 방법을 이용 증명할 수 있다.[5] Limit Cycle의 발생을 개념적으로 살펴보자. 식(11), (12)의 제어기를 연속시간 속도제어루프와 비선형 디지털 위치제어루프로 구현하면, 비선형 제어구간에 있는 가상의 위치응답에 대한 비선형 마찰보상입력, 그림 3의 점선,은 Southward 제어입력, 그림 3의 실선,에 비해 시간지연이 발생한다. 이 현상은 이산제어의 특성으로 시간지연의 크기는 응답특성과 샘플링 간격에 따라 달라진다. Southward의 제어는 위상여유 (phase margin)이 '영'이므로 임의의 시간지연으로 발생하는 위상지연(phase lag)은 제를 불안정화 하여 Limit Cycle이 발생된다. 따라서

Southward 의 비선형 마찰보상제어는 이산제어에서 불안정 해진다.[5]

#### 4. Hysteresis 비선형 마찰보상제어

이산제어에서 Southward 의 불안정성을 해결하는 견실한 제어기 설계방법 제시를 위해 우선 Hysteresis 마찰보상제어기를 제안코저 한다. 이 제어기의 형태는 식(11)과 동일하며, 단, 비선형 마찰 보상기, 식(12),는 그림 4와 같이 정의한다. 즉,

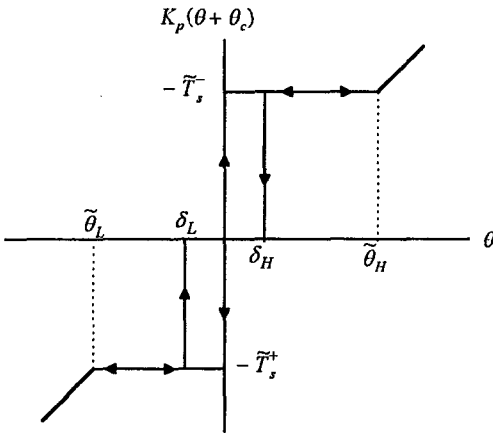


그림 4. Hysteresis 비선형 마찰보상제어

불연속면 (surface of discontinuity)  $S$  를 갖는다.

$$S = \left[ (\theta, \omega) \in R^2 \left\{ \theta = \delta_H, \omega < 0 \right\} \cup \left\{ \theta = \delta_L, \omega > 0 \right\} \right] \quad (14)$$

따라서 위상평면은 그림 5와 같이 불연속면을 포함하지 않는 6 개의 개방영역 (open region)으로 구분할 수 있다. 각 개방영역에서 식(1)의 우항이 연속이고 Lipschitz 조건을 만족하므로 운동방정식은 초기조건에 따른 고유의 연속응답이 존재하며, 불연속면  $S$  이외의 영역에서는 미분연속의 특성을 갖는다.[6]

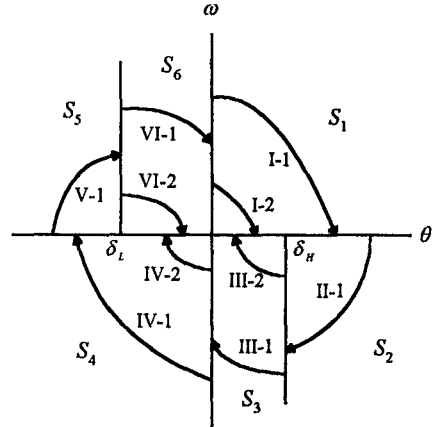


그림 5. Hysteresis 제어 위상평면 응답특성

i)  $\omega > 0$  일때

$$K_p(\theta_c + \theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \leq \theta \leq 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ K_p\theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13.1)$$

ii)  $\omega < 0$  일때

$$K_p(\theta_c + \theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & 0 \leq \theta \leq \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < 0 \\ K_p\theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13.2)$$

iii)  $\omega = 0$  일때

$$K_p(\theta_c + \theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \leq \theta \leq \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ K_p\theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13.3)$$

여기서  $\delta_H < \tilde{\theta}_H$ ,  $\tilde{\theta}_L < \delta_L$  로 가정한다.

#### 4.1 위상평면 응답

이 Hysteresis 제어의 위상평면 응답을 보자. 식(1)의 운동방정식 우항은 미끄럼 마찰과 그림 4의 마찰보상입력에서 발생하는 불연속 때문에 다음의

위상평면 각 영역에서 응답특성을 구해보자.

1)  $S_1$ 에서의 응답

이 영역에서 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = -K_p(\theta + \theta_c) - T_d^+(\omega) \leq \tilde{T}_s^- - b_0\omega \quad (15)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_0)\omega \leq \tilde{T}_s^- \leq 0 \quad (16)$$

식(16)은 속도의 단순감소를 의미하므로 궤적은 그림 5의 I-1 또는 I-2의 형태를 갖는다. 궤적 I-1과 I-2는 속도  $\omega(t)|_{t=t^*} = 0$  일때의 위치  $\theta(t^*)$ 에 따라 구분한 것으로 궤적 I-1은  $\theta(t^*) > \delta_H$ , 궤적 I-2는  $0 \leq \theta(t^*) \leq \delta_H$ 인 경우이다. 궤적 I-1은  $\theta$ -축을 통과하여  $S_2$ 영역으로 진입하며, 궤적 I-2는 식(13.3)으로부터 제어입력  $T(t^*) = 0$  이 되므로  $\theta(t^*)$ 에서 정지하게 된다. 따라서 이 영역에서 구간  $\{(\theta, \omega) | 0 \leq \theta \leq \delta_H, \omega = 0\}$ 는 평형구간이 될 수 있다.

2)  $S_2$ 에서의 응답

이 영역에서 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = -K_p(\theta + \theta_c) - T_d^-(\omega) \leq \tilde{T}_s^- - T_0^- - b_1\omega \quad (17)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_1)\omega \leq \tilde{T}_s - T_0 \leq \tilde{T}_s - T_s < 0 \quad (18)$$

식(18)은 음의 속도로 이동하는 물체에 음의 외부력이 작용하므로 속도는 단순감소한다. 따라서 궤적은 그림 5의 궤적 II-1과 같이 시계방향으로 불연속  $\{(\theta, \omega) \mid \theta = \delta_H, \omega < 0\}$ 을 통과  $S_3$  영역으로 진입한다.

### 3) $S_3$ 에서의 응답

이 영역에서는 비선형 마찰보상 제어입력이 영이므로 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = -K_p(\theta + \theta_c) - T_d(\omega) \geq -b_0\omega \quad (19)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_0)\omega \geq 0 \quad (20)$$

식(20)의 응답은 그림 5의 III-1 또는 III-2로 구분된다. 궤적 III-1은 응답이  $S_3$  영역을 벗어나기 직전 음의 속도를 갖는 경우이고, 궤적 III-2는 응답이  $S_3$  영역 내에서 속도가 영에 도달된 경우이다. 궤적 III-2는 궤적 I-2와 같이 속도가  $\omega(t) = 0$ 일 경우 식(13.3)에 따라 제어입력이 영이므로  $\theta$ -축과 만난 점에서 정지하게 된다. 따라서 이 영역에서 구간  $\{(\theta, \omega) \mid 0 \leq \theta \leq \delta_H, \omega = 0\}$ 는 평형구간이 될 수 있다.

위의 위상평면 응답특성 해석을 적용하면,  $S_4, S_5, S_6$ 에서의 응답특성이 그림 5와 같이 됨을 증명할 수 있다. 그림 5에서 응답 IV-1, V-1, VI-1은 불연속면을 통과하여 다른 개방영역으로 진행하며, 응답 IV-2와 VI-2는  $\{(\theta, \omega) \mid \delta_L \leq \theta \leq 0, \omega = 0\}$  구간과 만나게되며 이 지점에서 식(13.3)에 따라 제어입력이 '영'이 되어 정지하게 된다.

이상의 위상평면 응답특성으로부터 궤적은 하나의 개방영역에서 불연속면을 통과하여 다른 개방영역으로 전이되며, 항상 시계방향으로 진행한다. 특히, 궤적이 구간  $\{(\theta, \omega) \mid \delta_L \leq \theta \leq \delta_H, \omega = 0\}$ 과 교차하는 점에서는 정지하므로 이 구간은 평형구간임을 알 수 있다.

이런 특성을 갖는 제어방법을 적용했을 때 안정성을 해석하자.

### 4.2 안정성 해석

**정리 :** 식(1)로 주어진 제어계를 그림 4, 식(11), (13)과 같이 제어하면 위상평면상에서 구간  $S_8$ 는 Asymptotic 안정하다.

$$S_8 = \{(\theta, \omega) \in R^2 \mid \delta_L \leq \theta \leq \delta_H, \omega = 0\} \quad (21)$$

**증명 :** 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선정하자.

$$V(\theta, \omega) = (1/2)J\omega^2 + g(\theta) \quad (22)$$

여기서  $g(\theta)$ 는 그림 6과 같이 정의되며, 다음 식으

로 표현된다.

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_p (\theta^2 + \tilde{\theta}_H^2 - 2\tilde{\theta}_H \delta_H) & \tilde{\theta}_H < \theta \\ K_p \tilde{\theta}_H (\theta - \delta_H) & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \leq \theta \leq \delta_H \\ K_p \tilde{\theta}_L (\theta - \delta_L) & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ \frac{1}{2} K_p (\theta^2 + \tilde{\theta}_L^2 - 2\tilde{\theta}_L \delta_L) & \theta < \tilde{\theta}_L \end{cases} \quad (23)$$

식(22)와 (23)으로 정의된 Lyapunov 함수는 연속이고, 구간  $S_8$ 에서는 '영',  $S_8$  이외의 구간에서는 '양'의 값을 갖는다. 또한 식(14)의 불연속면  $S$ 를 제외한 전 영역에서의 시간미분은 연속인 특성을 갖는다. 즉,

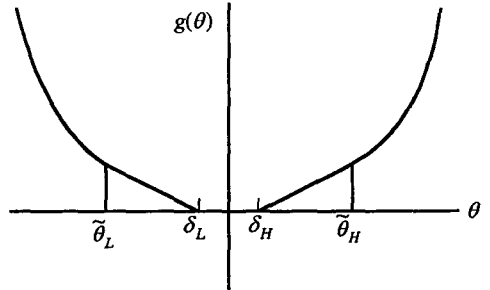


그림 6. 함수  $g(\theta)$ 의 정의

$$\dot{V}(\theta, \omega) = -K_d\omega^2 - \omega T_{slip}(\omega) + \omega \{g'(\theta) - K_p(\theta_c + \theta)\} \quad (24)$$

여기서

$$g'(\theta) = \begin{cases} K_p \tilde{\theta}_H & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ \text{undefined} & \theta = \delta_H \\ 0 & \delta_L < \theta < \delta_H \\ \text{undefined} & \theta = \delta_L \\ K_p \tilde{\theta}_L & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ K_p \theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

식(24)의 우변 마지막 항은

i)  $\omega > 0$  일때

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c + \theta) = \begin{cases} -K_p \tilde{\theta}_H & 0 < \theta < \delta_H \\ \text{undefined} & \theta = \delta_H, \theta = \delta_L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

따라서

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c - \theta) \leq 0, \forall \{(\theta, \omega) \mid (\theta, \omega) \notin S, \omega > 0\} \quad (27)$$

ii)  $\omega < 0$  일때

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c - \theta) = \begin{cases} -K_p \tilde{\theta}_L & \delta_L < \theta < 0 \\ \text{undefined} & \theta = \delta_H, \theta = \delta_L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

따라서

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c - \theta) \geq 0, \forall \{(\theta, \omega) \mid (\theta, \omega) \notin S, \omega < 0\} \quad (29)$$

iii)  $\omega = 0$  일때

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c - \theta) = \begin{cases} \text{undefined} & 0 = \delta_L, \theta = \delta_H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

따라서

$$g'(\theta) - K_p(\theta_c - \theta) = 0, \forall \{(\theta, \omega) | (\theta, \omega) \notin S, \omega = 0\} \quad (31)$$

식(27), (29), (31)를 식(24)에 대입하면  $\dot{V}(\theta, \omega)$ 는 불연속면  $S$ 를 제외한 전 범위에서 음의 반한정이다. 불연속면에서  $\dot{V}(\theta, \omega)$ 는 불연속이므로 Deni-derivates를 적용하면  $S$ 외부로부터 좌.우에서  $S$ 에 접근시 극한값  $\dot{V}(\theta, \omega)$ 이 존재하며 이 극한값이 Deni-derivates가 된다.[4,6] Deni-derivates는  $S$ 를 제외한 영역에서는  $\dot{V}(\theta, \omega)$ 와 동일하므로, 결론적으로 Deni-derivates  $D^*V(\theta, \omega)$ 는 전 위상평면에서 음의 반한정이 되므로 계는 안정하다. 식(24)에서  $\dot{V}(\theta, \omega) = 0$ 이 되는 경우는  $\omega = 0$ 일 경우인데, 앞의 위상평면해석 결과 다음의 구간  $\{(\theta, \omega) | \theta < \delta_L, \delta_H < \theta, \omega = 0\}$ 에서는 응답이 하나의 개방영역에서  $\theta$ -축을 통과하여 다른 개방영역으로 진행하므로 위의 영역은 평형점이 될 수 없으며 식(21)로 주어지는  $S_g$ 에서는  $\omega = 0$ 일 경우 평형상태에 도달되므로 영역  $S_g$ 는 Asymptotic 안정한 평형구간이 된다. Q.E.D.

Hysteresis 제어를 이용한 제어계의 기술함수 (describing function) 해석을 해보면 Hysteresis 제어가 Southward 제어기에 비해 위상리드 (phase lead) 효과를 보임을 확인할 수 있으며, 이 위상리드가 제어의 위상여유 (phase margin)을 증가시켜 계를 더욱 안정되게 만든다. 단, 이때  $\delta_H, \delta_L$ 로 정의되는 범위내에 존재하는 정상상태위치오차가 발생한다.

### 5. 견실한 비선형 마찰보상 이산제어

앞의 Hysteresis 마찰보상기의 위상 Lead 효과를 이용하면 시간지연에서 발생하는 위상지연을 상쇄시킬 수 있어 시간지연제나 이산제어에서 안정된 응답을 얻을 수 있다. 그림 7과 같이 이산위치제어 블록에 Hysteresis 형 비선형 마찰보상기를 적용한 제어 형태를 견실한 비선형 마찰보상기라 칭한다.

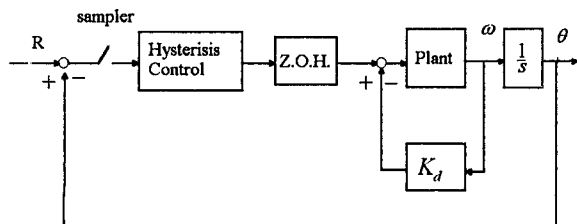


그림 7. 견실한 비선형 마찰보상기

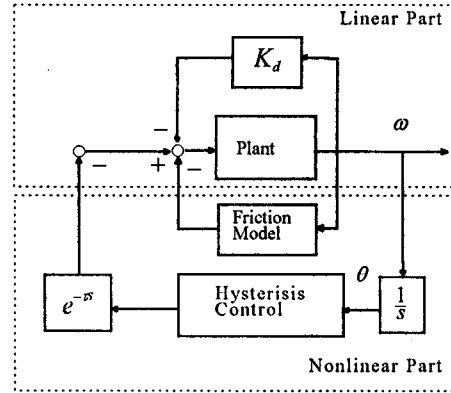


그림 8. 견실한 비선형 마찰보상기 연속화 모델

그림 3에서 논의 한 바와 같이 그림 7의 제어기는 그림 8과 같이 Hysteresis 제어기 출력에 시간지연이 있는 제어계로 변환할 수 있다. 이 시간지연의 크기는 제어하는 중 일정치 않고 변화하는 값이지만 항상 존재하며 그 크기는 샘플링 시간간격보다 크지 않다. 따라서 그림 8은 그림 7의 이산제어 모델을 정성적 특성을 유지하는 형태로 변환한 연속 제어 모델에 해당한다. 단, 시간지연  $\tau$ 의 범위는

$$0 \leq \tau \leq T \quad (32)$$

식(32)에서  $T$ 는 샘플링 간격에 해당한다. 시간지연  $\tau$ 가 영인 경우는 Hysteresis 마찰보상제어와 동일하다. 제어계의 안정성은 그림 4의 Hysteresis 마찰보상기 파라미터인  $\delta_H, \delta_L$ 와 시간지연 크기  $\tau$ 에 따라 결정되며, 주어진 샘플링 시간간격에 대해 제어의 안정성을 보장하는  $\delta_H, \delta_L$ 가 존재한다.  $\delta_H, \delta_L$ 의 설계는 해석적 방법을 통해 결정하기는 어려우며, 기술함수 해석이나 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 결정할 수 있다. 단,  $\tau = T$ 로 가정하고 설계한  $\delta_H, \delta_L$ 은 이산제어에서 반드시 안정하다.

### 6. 실험 및 고찰

앞에서 고찰한 Southward 제어 및 견실제어의 특성을 확인하기 위해 실험을 실시하였다. 실험장치는 1-축 회전구동장치로 그림 9와 같다. 구동부는 하모닉 드라이브사의 1:100 하모닉 드라이브 내장형 DC 서어보 모터(RFS-32-3030), 모터앰프(HS-250-9), 제어부는 D/A, A/D, 엔코더 인터페이스가 내장된 T.I.사의 TMS320C31 DSP 보드와 486-PC이며 구동축은 볼베어링으로 지지되어 있다. 사전시험을 통해 얻은 실험장치의 파라미터는 표 1과 같으며 블럭선도는 그림 10과 같다. 정지마찰력과 점성마찰은 '양'과 '음'의 방향으로 서로 다른값을 갖고있으며,

정지마찰력의 한계값은 쿨롬마찰에 비해 크다. 이는 마찰의 전형적인 마찰모델과 일치한다. 그림 10에서 U는 컴퓨터에서 계산된 제어입력, T는 토오크, 계인 31.32는 D/A 컨버터와 모터앰프의 계인, 계인 57.3은 Radian을 도(deg)로 환산값이다.

표 1. 실험장치 파라미터

관성모멘트		$J$	1.2 N.m.sec <sup>2</sup>
정지마찰		$T_s^+$	1.78 N.m
		$T_s^-$	-1.44 N.m
미끄럼	쿨롬	$T_0^+$	1.0 N.m
	마찰	$T_0^-$	1.0 N.m
마찰	점성	$c^+$	0.0115 N.m.sec
	마찰	$c^-$	0.0129 N.m.sec

제어기의 PD 제어 계인은 각각  $K_p=0.0066$ ,  $K_D=0.0033$ 으로 마찰을 무시한 폐회로의 댐핑계수와 고유진동수가 각각  $\zeta=0.79 \sim 0.87$ ,  $\omega_n=0.5\text{Hz}$ 가 되도록 선정하였다. 제어기 계인  $K_p$ 와 표 1의 정지마찰력을 이용하여 결정된 비선형제어범위는  $\theta_H=8.359 \text{ deg}$ ,  $\theta_L=-10.33 \text{ deg}$ 이다. 그림 11은 PD 제어시 초기조건

$$\theta(0) = 20\text{deg}, \omega(0) = 0 \quad (33)$$

에 대한 위치응답과 제어입력으로 안정하게 정상상태에 도달되며, 정상상태 위치오차는  $e_{ss}=0.841\text{deg}$ 로 식(9)의 평형범위내에 존재한다. 임의의 초기조건에 대한 시험결과 항상위의 안정성과 식(9)의 정상상태오차 범위를 만족함을 확인하였다.

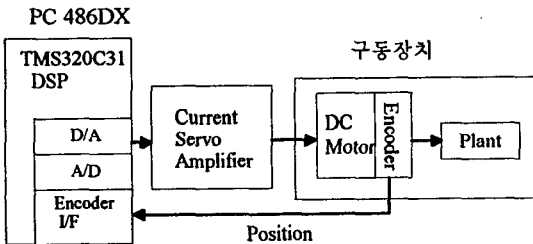


그림 9. 실험장치 개략도

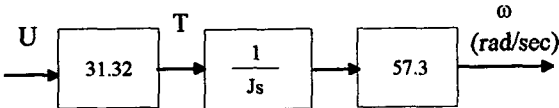


그림 10. 실험장치 블록선도

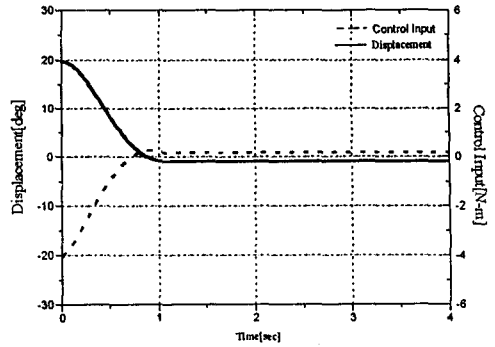


그림 11. PD 제어 응답

Southward 제어를 0.02 초 샘플링 간격을 갖는 이산제어에 적용할 경우 식(33)의 초기조건에 대한 응답은 그림 12와 같다. 비선형제어 입력은 표 1의 정지마찰력보다 20% 큰 값을 이용하였다. 즉,  $\tilde{T}_s^+ = 1.2 T_s^+ = 2.136 \text{ N.m}$ ,  $\tilde{T}_s^- = 1.2 T_s^- = -1.728 \text{ N.m}$ 이며 따라서  $\tilde{\theta}_H = 8.359 \text{ deg}$ ,  $\tilde{\theta}_L = -10.333 \text{ deg}$ 이다. 그림 12에서 응답은 선형제어구간과 초기의 비선형제어구간에서는 안정하게 감소하나, 회전각이 '영'인 부근에서 제어입력은 Bang Bang 형태로 지속되어 Limit Cycle을 발생시킴을 알 수 있다. 이는 앞에서의 예측과 일치한다. 어떠한 임의의 초기조건에서도 Limit Cycle이 발생함을 확인하였다.

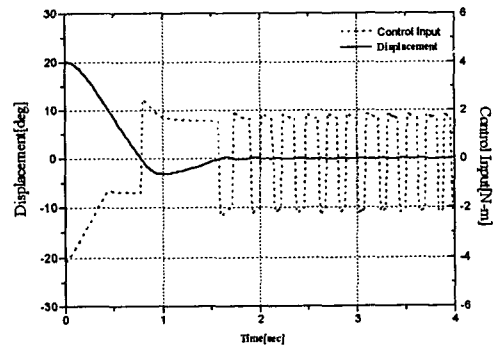


그림 12. 이산제어에서 Southward 마찰제어 응답

식(33)의 초기조건에 대한 전실제어의 응답은 그림 12에 주어진 바와 같이 안정하다. 여기서 그림 4의 Hysteresis 제어기 설계인자인  $\delta_H, \delta_L$ 는  $\delta_H = -\delta_L = 0.02 \text{ deg}$ 로 선정하였다. 초기응답은 그림 13과 같으나 응답이 '영'부근에 도달후 Hysteresis 제어기 특성에 따라 Bang Bang 형태의 제어입력이 발생하며 약 2.5 초 이후 정상상태에 도달된다. 정상

상태위치오차는  $e_{ss}=0.007\text{deg}$  로  $\delta_H, \delta_L$  의 범위내에 존재한다.  $\delta_H, \delta_L$  값을 증가시킬 경우 비선형 제어 입력 지속구간이 감소하여 정착시간이 감소하나, 정상상태오차 범위가 증가하므로 제어 정확도가 감소한다.

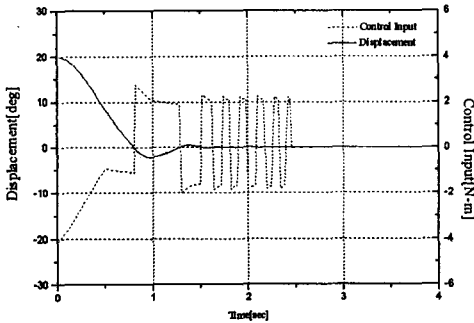


그림 13. 전실제어 응답 ( $\delta_H = -\delta_L = 0.02 \text{ deg}$ )

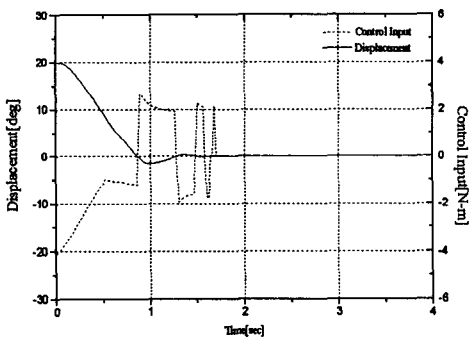


그림 14. 전실제어 응답 ( $\delta_H = -\delta_L = 0.04 \text{ deg}$ )

그림 14 는  $\delta_H = -\delta_L = 0.04 \text{ deg}$  로 증가시킨 경우의 앞에서도 동일한 조건에서의 응답으로 그림 13 과 비교 응답의 정착이 빨라진다. 이때의 정상상태위치오차는  $e_{ss}=0.023\text{deg}$  로 앞과 비교 증가하였다. 이 정상상태 오차값은 초기조건에 따라 달라지며, 동일한 초기조건이더라도 매 시험마다 서로 다른 값을 보였다. 이는 마찰의 비확정성에서 기인되는 것으로 판단된다. 단, 위치오차는 범위는  $\delta_H, \delta_L$  범위내에 항상 존재한다.  $\delta_H, \delta_L$  값의 증가는 정상상태 위치오차 자체의 증가를 의미하는 것이 아니고 오차범위의 증가를 의미한다. 반대로  $\delta_H, \delta_L$  를 감소시킬 경우 정착시간은 증가하지만, 정상상태오차 범위가 감소하므로 제어정확도가 증가한다.  $\delta_H, \delta_L$  이 매우 작아질 경우 폐회로의 위상여유가 감소하여 마침내 Limit Cycle 이 발생하게 되며,  $\delta_H = \delta_L = 0$

인 경우는 Southward 제어와 동일하다. 실험결과 Limit Cycle 발생 한계치는  $\delta_H = -\delta_L = 0.01\text{deg}$  근방임을 확인하였다.

## 7. 결론

Southward 의 비선형마찰보상제어는 연속시간제어제에서 위상평면의 원점의 Asymptotic 안정성을 보장하지만 이산제어제에서는 불안정하여 Limit Cycle 이 발생한다. 이 불안정성은 제어계의 위상여유를 증가시킬 수 있는 Hysteresis 제어기를 이용한 전실제어에 의해 안정화시킬 수 있다. 이 안정성은 Lyapunov 의 안정성 정리를 이용하여 증명되었다. 단, 이 제어기는 실제인자인  $\delta_H, \delta_L$  로 규정되는 범위내의 정상상태위치오차를 갖게된다.  $\delta_H, \delta_L$  를 감소시킬수록 오차범위는 감소하나 위상여유도가 감소하여 불안정한계에 가까워지므로 Limit Cycle 이 발생하지 않는 범위 중 작은값을 선정하는 것이 좋다.

## 참고문헌

1. Tustin, A., "The Effect of Backlash and of Speed Dependent Friction on the Stability of Closed-loop Systems," *IEE Journal*, vol. 94, pp. 143-151, 1947
2. Karnopp, D., "Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 107, pp. 100-103, 1985
3. Canudas, C., Astrom, K.J., and Braun K., "Adaptive Friction Compensation in DC-Motor Drives," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. RA-3, no.6, pp.681-685, 1987
4. Southward, S.C., Radcliff, C.J., and MacCluer, "Robust Nonlinear Stick-Slip Friction Compensation," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 113, pp. 639-645, 1991
5. 강민식, 김창재, "전실한 비선형마찰보상 이산제어 - 이론," 국방과학연구소 기술보고서, GWSD-519-960826, 1996
6. Vidyasagar M., *Nonlinear Systems Analysis - 2-nd Edition*, Prentice Hall p.34