

# 핀으로 연결된 결합부분의 표면에 위치한 균열의 응력확대계수 계산

## The Computation of Stress Intensity Factor of the Crack on the Surface of the Pin Joint

정동수\* ( 전북대 기계공학과 대학원 ), 이기수 ( 전북대 기계공학과 )  
D. S. Chung ( Chonbuk Univ. Graduate School),  
K. S. Lee ( Chonbuk Univ. Dept. of Mechanical Engineering)

### Abstract

The purpose of this study is to compute the stress intensity factors of various conditions in the cracked plate. The stress intensity factor of pin-loaded cracked plate is investigated using the finite element method. This paper is divided into the two parts. The first part is the contact analysis, and the second is to compute the stress intensity factors. In the contact analysis, the iterative method is used, and convergence of this method is presented. In the computation of the stress intensity factors of plate, the length of crack, clearance, and angle are considered

Key Words : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Contact(접촉),  
Finite Element Method(유한요소법), Clearance(간극), Iterative method(반복계산법)

### 1. 서론

많은 구조물은 볼트 및 리벳에 의하여 연결되며 이러한 연결부분에서 균열이 발생하는 경우가 많다. 볼트 및 리벳과 구조물 구멍사이의 기하학적 모양 및 응력 분포는 균열의 개시 성장에 큰 영향을 준다. 응력확대계수는 균열이 있는 구조물의 파괴 척도로서 사용되고 있다.

많은 학자들은 균열이 있는 평판에서 응력확대계수를 계산하기 위해 해석적, 실험적 연구를 수행하였다. Menandro등[1-2]은 균열선단에서 최적의 mesh 방법을 제안하였다. 최근에는 핀과 평판사이의 접촉 문제를 해석하기 위하여 많은 접촉 해석방법들이 제안되고 있다. 그러나, Cartwright와 Parker[3]는 핀 하중을 받는 균열이 있는 평판에서 응력확대계수를 구할 때 접촉력 분포가 Cosine함수로 분포한다고 가정을 하여 구한 응력확대계수와 단순 인장력을 받는 평판에서의 응력확대계수를 중첩의 원리를 적용하여서 핀 하중을 받는 평판의 응력확대계수를 결정하였다. 접촉문제해석에는 여러 가지 해석방법( Penalty

Method와 Lagrange 승수방법 등)이 있지만, 본 논문에서는 Lee[4]에 의해 제안된 접촉부에서 정확한 접촉력을 구하는 반복계산법을 사용하였다.

본 논문의 목적은 아래와 같다.

- ① 반복계산법을 균열이 있는 평판에 적용하여 핀과 구멍과의 접촉을 해석한다.
- ② 반복계산법으로 여러 가지 변수변화에 대한 응력확대계수를 구해 Cartwright와 Parker[3], Hsu[6]가 구한 값과 비교를 하고 여러 가지 변수변화에 대해서 응력확대계수의 경향을 알아보는 것이다.

### 2. 접촉

일반적으로 핀하중을 받는 조인트는 여러 가지 경계조건들을 가질 수 있다. 또한 핀이 하중을 물체의 구멍 표면에 전달하는 정밀한 방법이 응력확대계수에 영향을 줄 것이다.

## 2.1 기본적인 방정식과 구속조건들

2차원 또는 축대칭인 탄성체와 강체의 접촉을 다룬다. 마찰은 존재하지 않는다고 가정한다. 그때, 물체의 접촉 가능한 표면상에서 접촉력이  $\mathbf{p}$ 라고 하면, 식(1)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{p} + \mathbf{w} \quad (1)$$

여기에서  $\mathbf{u}$ 는 외력과 미지의 접촉력에 의한 변위,  $\mathbf{w}$ 는 단지 외력에 의한 변위이고,  $\mathbf{C}$ 는 힘에 대한 flexibility matrix이고 positive definite이다.

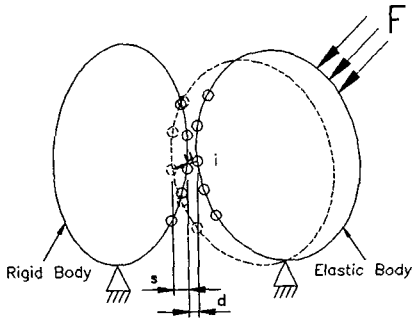


Fig. 1 : Contact of two body

물체와 강체사이의 초기간격  $\mathbf{d}$ 를 이용하여 현재의 간격벡터  $\mathbf{s}$ 는 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{d} \quad (2)$$

2차원 또는 축대칭 물체에 대해서, 접촉하는 점  $i$ 에서 접촉구속조건은 아래와 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0 \\ s_i &\leq 0 \\ p_i &= 0 \quad \text{if } s_i < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.2 오차벡터

접촉하는 표면에서, 현재의 간격  $\mathbf{s}$ 와 접촉력  $\mathbf{p}$ 의 향으로 오차벡터  $\mathbf{v}$ 를 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_i &= s_i \quad \text{if } p_i > 0 \quad \text{or } s_i > 0 \\ &= 0 \quad \text{if } p_i \leq 0 \quad \text{and } s_i \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

그때 접촉하는 표면상의 접촉 구속조건식(3)은 식(5)과 같을 때 만족되어진다.

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0 \\ \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.3 접촉부에서의 접촉력을 구하는 반복계산법

본 논문에서는 핀과 균열이 있는 평판에서의 접촉력의 정확한 값을 찾기위해 반복계산법을 사용한다. 만약 접촉력  $\mathbf{p}$ 의 값이 주어지면 관계식(1), (2), 그리고 (4)에 의해서 오차벡터  $\mathbf{v}$ 와 현재 간격벡터  $\mathbf{s}$ 는 결정되어진다. 본 논문에서 반복 단계  $m$ 의 접촉력  $\mathbf{p}^m$ 은 아래의 반복계산법에 의해서 계산되어진다.

$$\mathbf{p}^m = \mathbf{p}^{m-1} + \alpha \cdot (\mathbf{v}^{m-1}) \quad (6)$$

$\mathbf{p}$  : 접촉부의 접촉 반복하중.  
 $\mathbf{v}$  : 접촉부의 변위오차.  
 $m$  : 반복횟수.  
 $\alpha$  : 계수.

$\mathbf{v}^{m-1}$ 은  $\mathbf{p}^m$ 에 의해서 계산된  $\mathbf{v}$ 이다. 구속조건식(3)은 위의 반복구조에서 오차노름(norm)  $\|\mathbf{v}\|_2$ 가 0이면, 또는  $\|\mathbf{v}\|_2 < \text{Tol}$ 이면 근사적으로 만족되어진다.  $\alpha$ 는 양의 상수이고 계산가속기법을 사용하지 않는한  $1.9/\|\mathbf{C}\|_\infty$ 이라고 취급할 수 있다. 이것은 Lee[4]에 의해서 증명되어졌다. 식(6)의 반복계산법을 나타내는 순서도가 Fig. 2에 보여주고 있다.

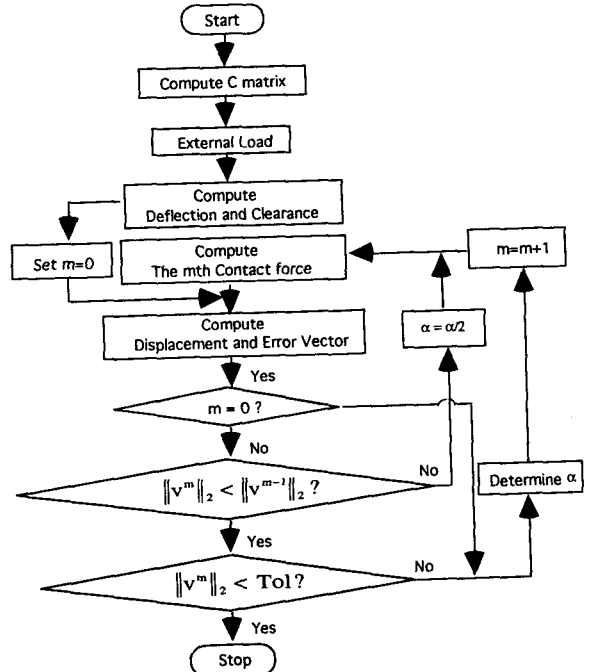


Fig. 2 : Flow chart for the present scheme

### 3. Mode I 응력확대계수 ( $K_I$ )

유한요소를 이용한 해석에서 응력확대계수  $K_I$  을 구하는 방법에는 균열끝 부근의 응력, 변위를 이용하는 방법과 에너지방법등이 있다. 에너지방법은 등체에서 에너지풀림률(energy release rate,  $G$ )을 계산하고, 응력강도(stress intensity)에  $G$ 을 연관시키는 것이다. 에너지방법은 비교적 적은수의 유한요소들을 사용하여 계산이 가능하나 그 방법 및 전산프로그램이 비교적 복잡하다. 본 논문에서는 변위를 이용하는 방법을 사용하였다. 순수한 mode I 하중을 받고 있는 균열이 있는 물체를 고려하자. 균열 표면에서  $K_I$  은 아래와 같이 균열 열림 변위를 이용하여 계산할 수 있다.

$$K_I = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ u \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right] \quad (\theta = \pi) \quad (7)$$

여기에서  $u$ 는 유한요소법에 의해서 얻어진 절점 변위이고,

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} : \text{the shear modulus}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} : \text{for generalized plane stress}$$

이다.  $E$ 는 탄성계수이고,  $\nu$ 는 프와송비이다.

### 4. 예제 계산

여기에서 예제들의 주된 목적은 제안된 반복계산법이 균열이 있는 평판의 접촉문제에 적용할 수 있는 타당성을 검증하고, 여러 가지 변수변화에 대한 응력확대계수의 경향을 알아보는 것이다.

본 논문에서 취급되는 예제는 핀(Pin)으로 연결된 평판으로서, 힘은 구조물사이의 접촉에 의하여 전달된다.

본 예제에서 고려한 가정은 다음과 같다.

- ① 핀의 탄성계수는 평판의 탄성계수에 비해 매우 큰 값을 가지며 강제로 취급한다.
- ② 접촉부분에서의 마찰은 없는 것으로 가정한다.
- ③ 평판의 두께( $t$ )는 단위 두께로 가정한다.
- ④ 균열은 구멍의 반경방향으로 있다고 가정한다.

#### 4.1 핀하중을 받는 두 개의 대칭 균열을 가지는 평판의 응력확대계수

핀에 의해 평판이 하중을 받는 모델은 Fig. 3에 보여진다. 이 예제의 대칭성 때문에, 단지 평판의 반쪽이 고려된다. 모델은 272개의 8절점요소를 사용했고, 총 절점수는 867개이다. 그리고 접촉부에서는 42개의 절점을 사용하였다. 본 예제에 적용한 수치는 Table 1과 같다.

Table 1 : The applied numerical values for example 1

External Force of Half Plate. (F)	300.
Young's Modulus (E)	0.7e5
Poisson's Ratio ( $\nu$ )	0.3
Width of Plate (W)	30

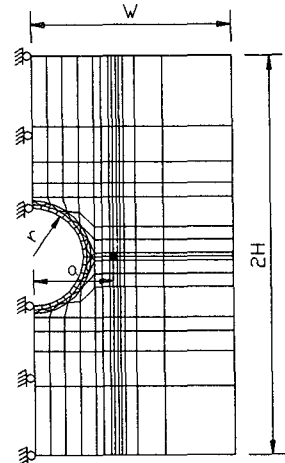


Fig. 3 : Symmetric radial cracks at a central hole in a rectangular plane

Fig. 4는 반복계산법으로 구한 접촉력과 Cosine분포로 가정한 접촉력을 각도에 대한 함수로서 비교를 한 것이다. 폭에 대한 구멍의 크기( $r/W$ )가 0.1이고 폭에 대한 균열의 길이( $a/W$ )가 0.25일때에 대해서 비교를 하였다. 반복계산법에 의해 접촉력을 구한 값은 접촉각이 작을 때는 Cosine분포의 값보다 큰 값을 가지며, 접촉각이 클 때는 Cosine분포의 값보다 작은 값을 가지는 것을 보여주고 있다.

Fig. 5는 핀하중을 받는 평판에서 오차노름(error norm)의 수렴성을 나타내고 있다. 반복횟수는 식(6)과 Fig. 2에 정의된  $m$ 이다.

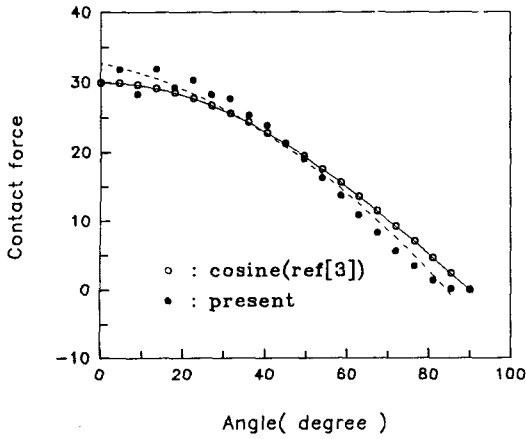


Fig. 4 : Comparison of the cosine pressure and the present contact pressure

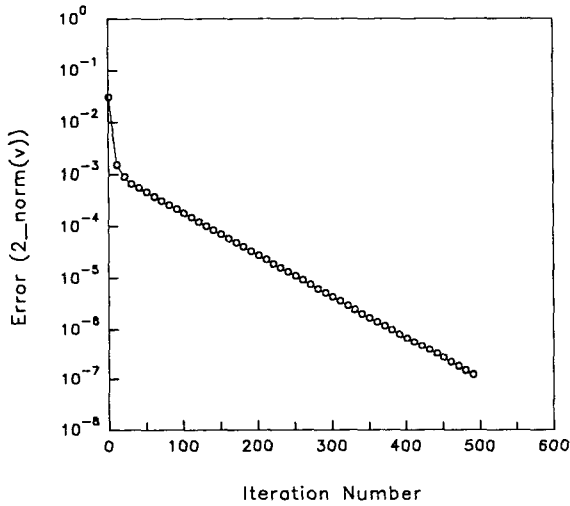


Fig. 5 : Change of error norm

Fig. 6은 평판의 끝단에서 단순 인장력이 작용할 때의 실험적인 값과 본 모델에서 구한 값과의 비교를 나타내는 그림이다. 상대적인 균열길이  $a/W$ 에 대한 응력확대계수의 함수로서 결과들을 나타내며, 각각은  $r/W = 0.5, 0.25$ , 그리고  $0.1$ 와  $H/W=1.0$ 과  $2.0$ 일 때의 변수 변화에 대해서 계산된다. 이 경우에 응력확대계수는  $K_I/K_0$ 의 표준화된(normalized)형식으로 주어진다. 단  $K_0 = F\sqrt{\pi a}/(Wt)$ 이다.

반복계산법에 사용될 모델은 단순인장력 계산값에서의 오차가 3%이내에 대해 선택하였다.

Fig. 7은 편하중을 받는 평판에서 간극 ( $\Delta r/r$ )이 0.1%로 일정할 때(cosine 접촉력은 제외), 응력확대계수의 비교를 나타낸 것이다. 여기에서  $r$ 은 구멍의

반경이고,  $r - \Delta r$ 은 핀의 반경이다. 폭에 비해서 작은 구멍일 때( $r/W=0.1$ )는 cosine압력분포의 결과값과 비슷한 값을 가지지만, 구멍이 커질수록( $r/W=0.25, 0.5$ 일수록) cosine압력분포의 결과값보다는 작은 값을 가짐을 알 수 있다.

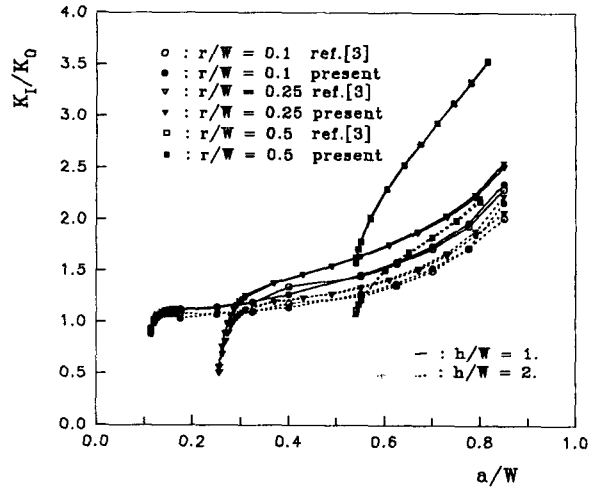


Fig. 6 : Comparison of the stress intensity factors

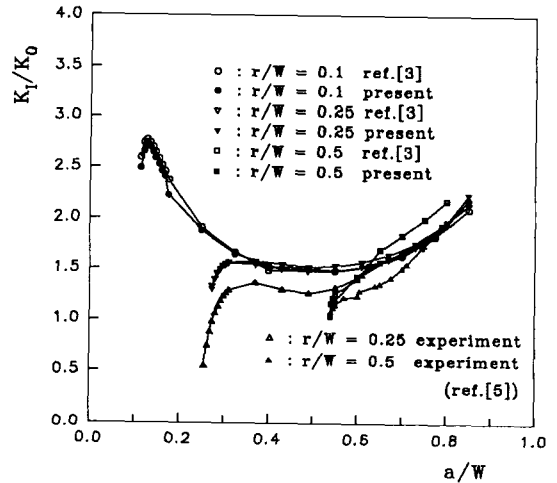


Fig. 7 : Comparison of the normalized stress intensity factor for symmetrical radial cracks in a simple pin-loaded joint

Fig. 8은  $r/W = 0.1$ 에 대해서 편과 평판사이의 간극 ( $\Delta r/r$ )이 0.1%, 0.5%, 1%, 2%일 때 응력확대계수 분포를 보여주고 있다. 간극이 증가할수록 응력확대계수는 증가함을 알 수 있다.

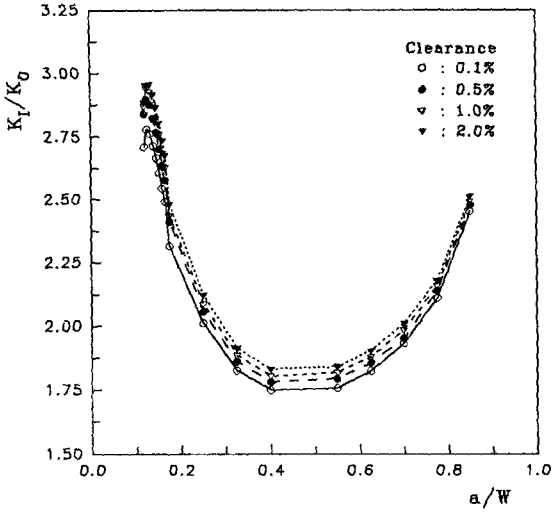


Fig. 8 : Comparison of the normalized stress intensity factors vs. the change of clearance

42 핀하중을 받는 한 개의 균열을 가지는 평판에서의 응력확대계수

Fig. 9는 각도의 변화에대한 응력확대계수를 구하기 위해 적용된 모델을 보여주고 있다. 평판의 전체를 사용하여 계산하였다. 436개의 8절점요소를 사용하였고, 총 절점수는 1570기이다. 그리고 접촉부에서는 40개의 요소와 81개의 절점을 사용하였다. 예제에 사용된 계산 모델의 가경은 Table 1과 같다.

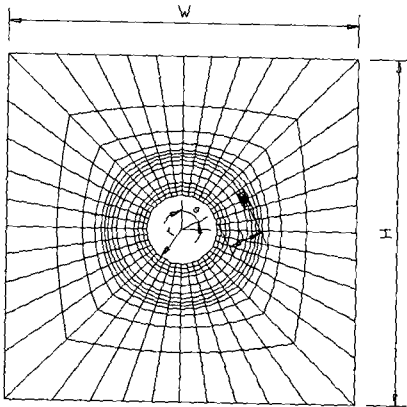


Fig. 9 : The model of cracked plate in pin-loaded case

Fig. 10은 단순인장력을 받을 때 본 모델에서의 계산값과 Hsu[6]에 의해 구한 값과의 비교를 보여주고 있다. 응력확대계수는 각도 15°, 25°, 45°, 65°, 75°, 90°일 경우에 대해 계산을 하였다. 각도는 수직선상에서 0°로 하였다. 1/r 이 클 때 비교값들의 오차는 Hsu[6]는 무한평판에 대한 계산값이고, 본 계산은 유한평판에 대한 값이기 때문인 것으로 판단된다. 응력확대계수는 첫번째 예제와 같이  $K_I/K_0$ 의 표준화된(normalized)형식으로 주어진다.

단  $K_0 = F\sqrt{\pi l}/(Wt)$  이다.

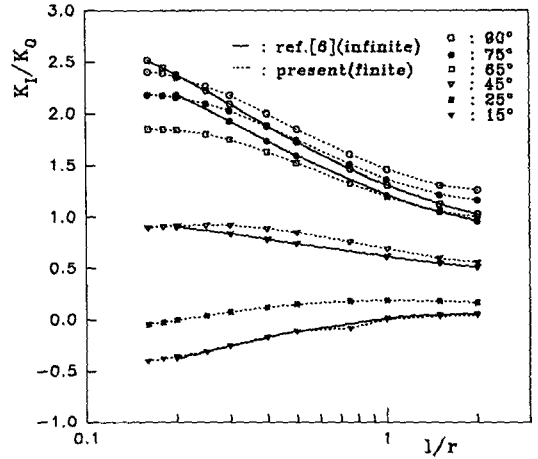


Fig. 10 : Comparison of the normalized stress intensity factor vs. change of crack angles

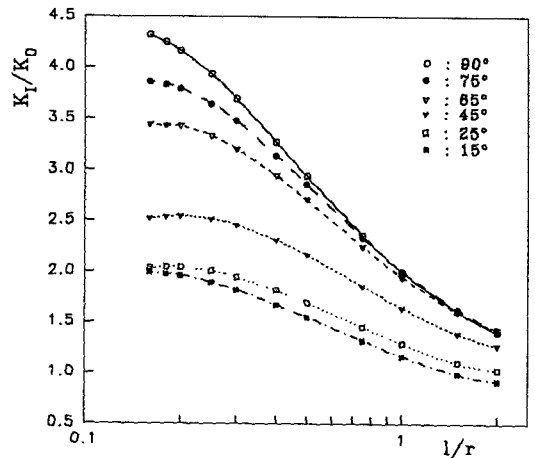


Fig. 11 : The normalized stress intensity factor vs. change of crack angles of pin-loaded case

Fig. 11은 편하중을 받을 때 각도의 변화에 대한 표준화된 응력확대계수의 값분포를 보여주고 있다. 균열의 각도가 증가할수록 응력확대계수는 증가함을 알 수 있다. 또  $1/r$ 이 작을 때는 표준화된 응력확대계수는 큰 차이를 보이지만 증가할수록 일정한 값에 수렴함을 알 수 있다.

#### 4.3 구멍이 두 개인 평판에서의 균열에 대한 응력확대계수

Fig. 12는 구멍이 두 개인 예제에 적용된 모델을 보여주고 있다. 평판에 단일 분포하중이 작용할 때, 아래 구멍에 균열이 발생한다고 가정을 하였다.

본 예제는 평판의 대칭성을 고려하여서 오른쪽 절반을 사용하여 계산을 하였다. 624개의 요소를 사용하였고, 총 절점수는 1943개이다. 그리고 각각의 접촉부에서는 20개의 요소를 각각 사용하였다. H는 W의 2배의 크기로 가정을 하였다. 예제에 사용된 계산자료는 Table 2와 같다.

Table 2 : The applied numerical value for example 3

External Pressure of Half Plate. (P)	10.
Young's Modulus (E)	0.7e5
Poisson's Ratio ( $\nu$ )	0.3
Width of Plate (W)	100

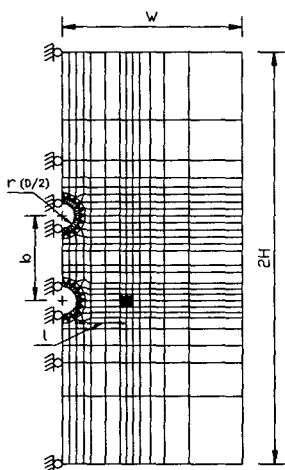


Fig. 12 : The model of cracked plate having two holes

Fig. 13은 아래구멍의 균열의 크기가 변화할 때 응력확대계수의 값의 변화를 보여주고 있다. Fig. 13에서 보면  $1/r$ 이 작을 때 구멍의 크기( $D/b$ )가 증가할수록 응력확대계수는 감소하지만,  $1/r$ 가 증가할 때 구멍의 크기( $D/b$ )가 증가할수록 응력확대계수는 큰 기울기로 증가함을 알 수 있다. 구멍이 구멍사이의 거리에 비해서 작을 때 균열의 길이가 구멍의 직경에 비해서 증가하면 일정하게 수렴하는 값을 가짐을 알 수 있다.

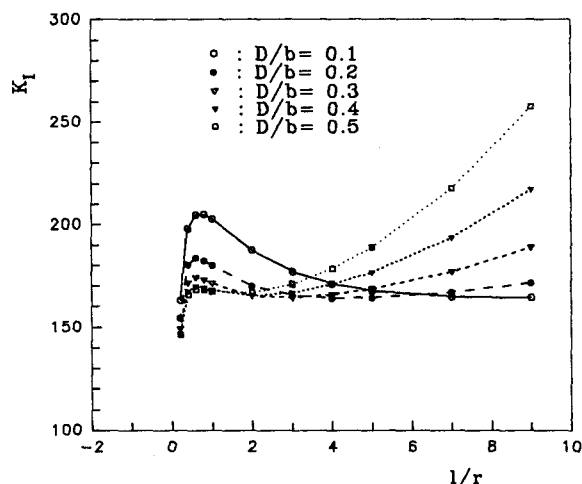


Fig. 13 : The stress intensity factor vs. change of crack lengths

#### 5. 결론

본 반복계산법의 장점은 Cartwright와 Parker[3]의 방법보다 여러 가지의 접촉조건에 대해서 적용이 가능하다는 것이다.

접촉 하중을 받는 평판에 대한 연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 반복계산법으로 구한 접촉부에서 접촉압력은 작은 접촉각에 대해서는 Cosine 분포보다 큰 값을 가지고 접촉각이 클 때는 작은 값을 가짐을 알 수 있다.
- 2) 핀과 평판사이의 간극이 증가할수록 응력확대계수는 증가함을 알 수 있다.
- 3) 균열의 각도가 증가할수록 응력확대계수는 증가함을 알 수 있다.
- 4) 구멍사이의 거리에 대해서 구멍의 크기가 증가할수록 균열의 길이가 구멍에 대해서 작을 때는 응력확대계수가 감소하지만, 균열의 길이가 구멍 직경에비해서 증가할수록 증가함을 알 수 있다.

## 6. 참고문헌

- [1] F. C. M. Menandro, E. T. Moyer, JR and H. Liebowitz , 1995, ' A Methodology For Crack Tip Mesh Design', Engineering Fracture Mechanics Vol. 50, No. 5/6, pp. 713-726.
- [2] F. C. M. Menandro, E. T. Moyer, JR and H. Liebowitz , 1995, ' A Near Optimal Crack Tip Mesh', Engineering Fracture Mechanics Vol. 50, No. 5/6, pp. 703-711.
- [3] D. J. Cartwright , A. P. Parker, 1982, 'Opening mode stress intensity factors for cracks in pin-loads joints', International Journal of Fracture, Vol. 18, No.1, pp65-78.
- [4] K. Lee , 1989,'An Efficient Solution Method For Frictional Contact Problems', Computers & Structures Vol. 32, No. 1, pp.1-11.
- [5] D. J. Cartwright, G. A. Ratcliffe ,1972,'Strain Energy Release Rate for Radial Cracks Emanating from a Pin Loaded Hole', International Journal of Fracture Mechanics, Vol.8, No. 2, 175-181
- [6] Y. C. Hsu,1975,'The infinite sheet with cracked cylindrical hole under inclined tension or in-plane shear', Int. Journ. of Fracture, Vol. 11, No. 4, 571-581
- [7] R. D. Cook, David S. Malkus and Michael E. Plesha, 1989, 'Concepts and Applications of Finite Element Analysis' 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc.
- [8] T. L. Anderson , 1995, 'Fracture Mechanics ,Fundamentals and Applications',2nd ed., CRC Press, Inc.