韓國精密工學會 '96年度 秋季學術大會論文集 pp.887~890

현가계 설계인자 계산을 위한 탄성기구학 해석
Elastokinematic Analysis for Calculating Suspension Design Parameters

강주석, 윤중락, 배상우(서울대 대학원), 이장무(서울대), 탁태오(강원대)
J.S. Kang, J.R. Yun, S.W. Bae(Graduate School, Seoul National Univ), J.M. Lee(Seoul National Univ), T.O. Tak(Kangwon National Univ)

Abstract

In this study, based on the assumption that the displacements of suspension systems under the external forces are very small, a linear form of elastokinametic equations in terms of infinitesimal displacements and joint reaction forces are derived. The equations can be applied to any form of suspensions once the type of kinematic joints and bushings are identified. The validity of the method is proved through the comparison of the results from the more complex solution offered by ADAMS

1. 서 론

자동차 차륜의 수직운동시의 토우각 변화, 캠버각 변화 등의 위치 변화는 차량 동특성에 중대한 영향을 미친다. 또한 지면에서 가해지는 횡방향 힘, 종방향 힘, 복원 모멘트 등에 의한 차륜의 변위로 정의되는 컴플라이언스 특성도 현가계의 동적 성능을 나타내는 지표로서 이용된다. 이들과 같이 자동차 현가시스템의 동특성을 합리적으로 가장 잘 나타내는 지표를 현가계 설계인자라고 한다. 현가계 설계인자는 현가계에 가해지는 힘에 의한 차륜의 변화로서 정적인 힘-변위관계로 계산된다. 실제로 SPMD와 같은 측정장치를 이용하여 계측할때 주어지는 힘은 정적인 상태를 이룬다고 본다[1]. 이는 강체로 이루어진 다물체계에 외력이 시스템의 속도와 가속도와는 무관하게 준정적 평형 상태를 만족할 정도로 느리게 가해지는 경우로 볼 수 있다. ADAMS나 DADS와 같은 다물체 동역학 프로그램에 포함되어 있는 준-정역학 해석 모듈을 이용하여 현가계 설계인자를 구하는 것이 대부분이다. 이는 기구학적인 구속조건과, 힘 평형식을 동시에 풀어서 해를 구한다. 그러나 이들 식은 비선형방정식의 형태여서 수치해석시 초기추정해에 민감한 문제가 있다. 이를 해결하기 위해 시스템의 총속자유도를 줄이며 위치에너지를 최소화하는 최적화 문제를 푸는 방법이 제안되기도 했다[2].

본 연구에서는 탄성체와 기구적인 구속조건으로 구성된 다물체 시스템에서 힘에 의한 시스템의 변위 관계식을 선형 방정식의 형태로 유도한다. 이것은 강체시스템의 외력에 의한 변위가 미소하다는 가정으로 부터 얻어진다. 계속적인 힘에 의해서 변형되는 강체시스템은 위치가 변하므로 이를 적용하여야 한다. 힘의 증분에 의한 강체변위를 이전 스텝의 변위로부터 다음스텝의 변위를 계산하는 점화식의 형태로 유도하였다. 따라서 계속적인 힘의 증가에 의한 강체의 위치변화의 비선형성 영역까지 나타내는 탄성기구학식을 유도하였다. 이식은 현가계의 조인트와 부싱의 특성만 결정되면 어떠한 현가시스템에도 적용이 가능하다. 해석 결과는 맥퍼슨 현가계에 적용하여 ADAMS결과와 비교하였다.

2. 탄성기구학 지배방정식

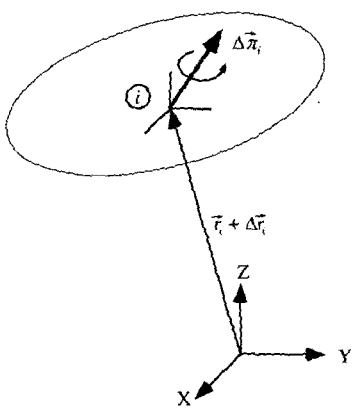

Fig. 1 Generalized coordinates

스프링이나 부싱요소와 같은 탄성체와 기계적인 조인트로 지지되는 다물체계에서 외력에 의한 변형이 미소

하다고 가정할때의 탄성기구학적인 지배방정식은 선형 형태로 유도할수 있다. 하나의 강체에 대해 일반 좌표(generalized coordinate)를 Fig. 1과 같이 Cartesian coordinate의 미소변위로 정의한다.

$$\Delta \mathbf{q}_i = \{\Delta \mathbf{r}, \Delta \boldsymbol{\pi}\}_i^T = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \pi_x, \Delta \pi_y, \Delta \pi_z\}_i^T \qquad (1)$$

$\Delta \mathbf{r}_i$는 강체의 병진변위를 나타내며 $\Delta \pi_i$는 고정좌표계에 대한 미소 회전 변위를 나타낸다. 다물체계에서 기구학적인 구속조건과 힘의 평형식을 동시에 풀기 위해서 주어지는 데이타는 변형이 일어나기전의 기구학적인 구속조건식은 만족시키는 형태로 주어진다. 여기에 외력이 가해져서 변형이 일어날때 변형은 탄성학적으로 미소하게 일어난다고 가정하면 기구학적인 구속조건의 차분인 $\Delta\Phi$가 0을 만족하도록 변형이 생긴다. 그러므로 미소변위 $\Delta \mathbf{q}$에 대해서 (2)식과 같은 구속조건 관계식이 성립한다.

$$\Delta \Phi = \Phi_q \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

여기서 Φ_q는 기구학적 구속조건의 자코비안 행렬을 나타낸다.

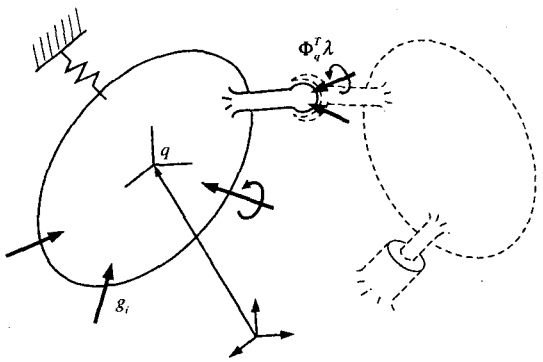

Fig.2 Force-displacement diagram of multibody system

다물체계에 Fig. 2와 같이 외력이 가해질때 탄성체에 의한 반력이 충분히 크다고 하면 미소변위가 발생한다고 가정할 수 있다. 이때 미소변위는 식 (2)의 구속조건을 만족한다. Fig. 2에서와 같이 강체에 가해지는 외력은 탄성력과 조인트의 구속력과 평형을 이룬다. 이는 다음 (3)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_q^T \lambda + \mathbf{K}\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{f} \qquad (3)$$

여기서 $\mathbf{K}\Delta\mathbf{q}$는 스프링이나 부싱요소에 의해 나타나는 탄성힘을 나타낸다. $\mathbf{f}$는 순수한 외력을 나타내며 λ는 라그랑지 승수이며 $\Phi_q^T\lambda$는 구속력을 나타낸다.

구속조건식 (2)와 힘 평형식 (3)을 동시에 만족하는 해를 구하면 탄성기구학 문제가 해결된다. 식(2)와 식(3)을 정리하면 다음의 식 (4)와 같은 행렬형태의 지배방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & \Phi_q^{\mathrm{T}} \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

식 (4)의 왼쪽항에서 강성행렬 $\mathbf{K}$가 대칭행렬이면 전체 행렬이 대칭 행렬이다.

탄성효과를 가지는 부싱요소는 국부좌표계(local coordinate system)에 대해서 병진과 회전에 대해서 6개의 스프링 요소로 모델링된다 이 스프링 요소는 식(5)와 같이 대각행렬로 표현된다.

$$\mathbf{K}_T' = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}, \mathbf{K}_R' = \begin{bmatrix} K_{xr} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yr} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zr} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

국부좌표계에 대해서 정의된 강성행렬은 식 (6), (7)과 같이 전역좌표계(global coordinate system)의 강성행렬로 좌표 변환할 수 있다.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{A}_j \mathbf{K}_T' \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}, \mathbf{K}_R = \mathbf{A}_j \mathbf{K}_R' \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} \qquad (6),(7)$$

여기서 $\mathbf{A}_j$는 스프링요소가 정의된 국부좌표계에서 전역좌표계로의 좌표변환 행렬(transformation matrix)을 의미한다. 식 (6), (7)과 같이 전역좌표계에서 강성행렬이 정의되었으므로, 스프링요소에 의한 힘은 전역좌표계에서 강체간의 상대변위를 이 강성행렬과 곱하면 전역좌표계에서의 스프링요소에 의한 힘이 계산된다. 이로부터 강성행렬 을 유도할 수 있다.

$$[\mathbf{K}] = \left[\begin{array}{cc|cc} -\mathbf{K}_T & \mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_i & \mathbf{K}_T & -\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_j \\ -\tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{K}_T & \tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_i - \mathbf{K}_R & \tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{K}_T & -\tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_j + \mathbf{K}_R \\ \hline \mathbf{K}_T & -\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_i & -\mathbf{K}_T & \mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_j \\ \tilde{\mathbf{s}}_j\mathbf{K}_T & -\tilde{\mathbf{s}}_j\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_i + \mathbf{K}_R & -\tilde{\mathbf{s}}_j\mathbf{K}_T & \tilde{\mathbf{s}}_j\mathbf{K}_T\tilde{\mathbf{s}}_j - \mathbf{K}_R \end{array}\right] \qquad (8)$$

식 (8)의 강성행렬이 대칭 행렬이므로 지배 방정식 (4)의 행렬도 대칭행렬임을 알 수 있다.

대표적인 기계적 조인트에 대한 구속조건식으로부터 구속조건 자코비안식을 구할 수 있다. 식 (4)에서 나타나는 구속조건 자코비안 식을 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Constraint jacobians

Constraints	$\left[\Phi_{qi} \vdots \Phi_{qj}\right]$
Displacement	$\left[-2\mathbf{d}^T \quad 2\mathbf{d}^T\tilde{\mathbf{s}}_i \vdots 2\mathbf{d}^T \quad -2\mathbf{d}^T\tilde{\mathbf{s}}_j\right]$
Inplane	$\left[-\mathbf{h}_j{}^T \quad \mathbf{h}_j{}^T\tilde{\mathbf{s}}_i \vdots \mathbf{h}_j{}^T \quad -\mathbf{h}_j{}^T\tilde{\mathbf{s}}_j - \mathbf{d}^T\tilde{\mathbf{h}}_j\right]$
Cylindrical	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{h}}_j\tilde{\mathbf{h}}_i \vdots \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{h}}_j \\ -\tilde{\mathbf{h}}_i & \tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{s}}_i + \tilde{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{h}}_i \vdots \tilde{\mathbf{h}}_i & -\tilde{\mathbf{h}}_i\tilde{\mathbf{s}}_j \end{bmatrix}$
Spherical	$\left[-\mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{s}}_i \vdots \mathbf{I} \quad -\tilde{\mathbf{s}}_j\right]$

3.구분적 선형가정에 의한 점화식 유도

앞에서 탄성체와 기구적인 구속조건으로 지지되는 다물체계에서 탄성기구학 관계식을 (4)식과 같이 유도하였다 여기에서는 강체계에 계속적인 힘이 가해져서 위치가 변하는 상태에 대해 연장하고자 한다.

강체 시스템에 계속적인 힘이 주어지면 강체는 3차원상에서 위치가 바뀌게 된다. 이때 변화된 위치에서도 탄성기구학 관계식은 미소변위를 가정하면 식(4)를 만족한다고 볼수 있다. 계속적인 강체의 비선형적인 위치변화를 구분적인 선형상태로 가정하여 힘의 증분에 대한 변위 관계식을 점화식의 형태로 유도할 수 있다.

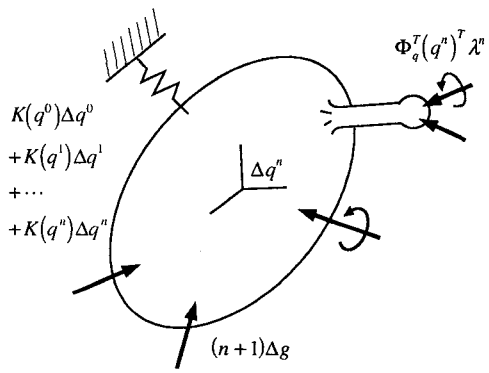

Fig. 3 Force equilibrium of a body at nth step

일반적인 점화식을 유도하기 위해 n번째 step을 고려한다. n번째 스텝에서는 시스템에 작용하는 외력이 $(n+1)\Delta\mathbf{f}$가 작용하며 단일 강체에 작용하는 외력은 Fig. 3과 같다. n번째 스텝에서 탄성기구학 관계식 (5)를 적용하면 다음 식과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{q}^n) & \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{q}(\mathbf{q}^n)^T \\ \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{q}(\mathbf{q}^n) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}^n = -\begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{q}(\mathbf{q}^{n-1})^T\boldsymbol{\lambda}^{n-1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad 9)$$

결국 (9) 식과 같이 전스텝의 좌표 $\mathbf{q}^n$로 부터 $\Delta\mathbf{q}^n$을 구하는 점화식이 유도된다. 식(9)으로부터 강체의 위치가 변하는 계에 대해서도 탄성기구학 해석이 적용된다. 식(9)은 구분적 선형 가정으로부터 유도한 식이므로 해의 정밀도는 $\Delta\mathbf{f}$의 크기에 좌우된다.

4. 예제

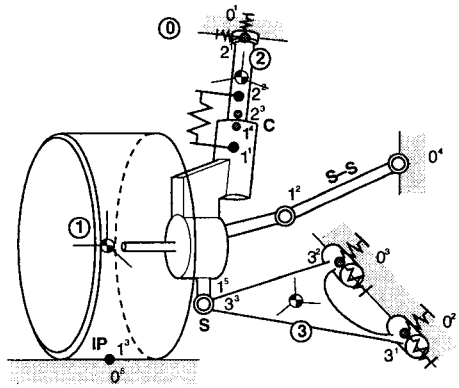

Fig. 4 Modeling of Mcpherson strut suspension

앞에서 구한 탄성기구학 관계식을 맥퍼슨 현가계에 적용한다. 맥퍼슨 현가계는 Fig. 4와 같이 모델링할 수 있다. 그림에서 강체 0은 지면을 나타내며 강체 1은 휠과 너클등의 어셈블리이며 강체 2는 스트럿을 나타내며 강체 3은 로워 암을 나타낸다. 각각의 강체는 탄성요소와 구속조인트에 의해 연결되어 있다. 탄성요소와 구속조인트가 정의된 위치의 좌표는 i^k로 표현되어 있다. 여기서 i는 강체의 번호이며 첨자 k는 좌표의 일련번호이다. 위의 시스템에 대해서 앞에서 유도한 식을 적용하여 현가계 설계파라미터를 계산할수 있다.

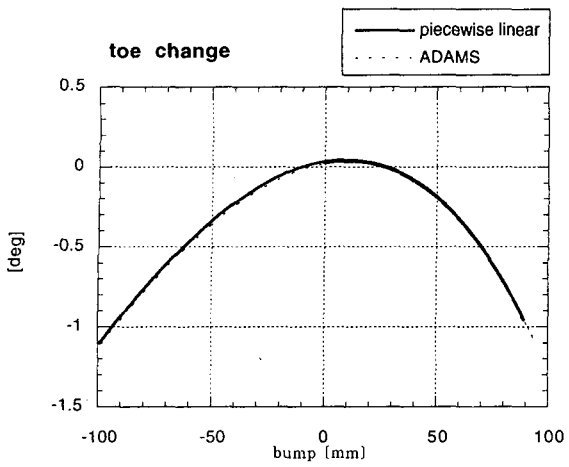

Fig. 5 Bump steer characteristics

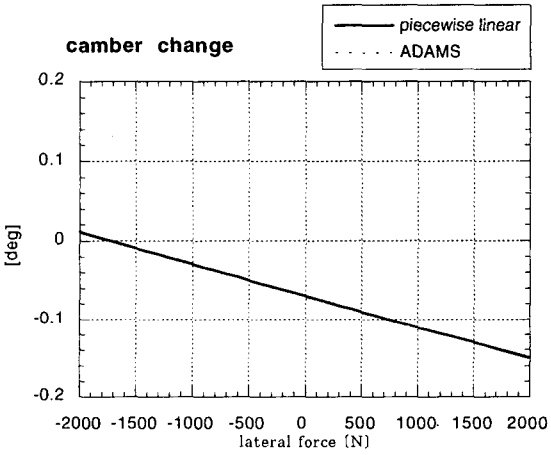

Fig. 6 Compliance camber characteristics

Fig.5는 차륜에 수직력을 적용하여 차륜의 수직운동시 토우특성의 변화를 계산한 것이다. 여기서 $\Delta f_z = 10N$으로 하였을 경우의 결과를 ADMAS의 결과와 비교하였다. 본 연구에서 제시한 방법에 의한 결과와 ADAMS 해석 결과가 근사하게 나타남을 알수 있다. Fig, 6는 차륜에 횡방향 힘을 가했을 경우에 차륜의 변위를 나타내는 횡방향 컴플라이언스 캠버 특성이다. 마찬가지로 근사한 결과를 보이고 있다.

5. 결론

현가계 컴플라이언스 특성과 수직운동시 차륜의 위치 변화와 같은 설계인자는 차량의 승차감과 조종안정성 등 차량 동특성에 직접 영향을 주는 요소이다. 본 연구에서는 현가계 설계인자 특성을 해석하기 위해 다물체계에 대해 선형 탄성기구학 지배 방정식을 유도하였다. 이를 맥퍼슨 현가계에 적용하여 컴플라이언스 특성을 해석할 수 있음을 보였으며 그 결과를 다물체 동역학 해석 프로그램인 ADAMS와 비교하여 타당성을 검증하였다. 본 연구에서 제시한 탄성기구학 해석 방법은 간단하고 정확하게 현가계 컴플라이언스 특성을 해석할 수 있는 장점이 있다.

6. 참고문헌

1. J.R. Ellis, S.C. Burns, W.R. Garrott, S.C. Bell, "The Design of a Suspension Parameter Measurement Device", SAE Paper NO. 870576, 1987

2. P.E. Nikravesh, M. Srinivasan, "Generalized Co-Ordinate Partitioning in Static Equilibrium Analysis of Large-Scale Mechanical Systems", Int. J. Numerical Eng. , Vol. 21, 1985

3. G. Gallas, B. Renzo "New Products Developed to Improve the Isoation Qualities of Automobile Suspension Systems: "Torsidyne" and "Atadyne", SAE paper NO. 851651, 1985

4. "Vehicle Dynamics Terminology", SAEJ670e, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA

5. ADAMS User's Manual, Mechanical Dynamics, Inc., Ann Arbor MI, 1985