

다면체의 중립면 계산 Medial Surface Computation of Polyhedra

이 용 구(서울대학교 대학원 기계설계학과), 이 건 우(서울대학교 기계설계학과)
Yong-Gu Lee(Graduate School, Seoul National University), Kunwoo Lee(Seoul National University)

ABSTRACT

중립면은 셀 (솔리드 모델) 유한 요소 생성, 로봇 이동 경로 계산, 특징 형상 판별 등에서 사용될 수 있다. 그러나 기존 중립면 계산 알고리즘들은 연립 방정식을 수립성이 보장되지 않는 수치 해법으로 풀어야 했기 때문에 발전이 미비했다. 본 논문은 복셀-이등분 면의 교차성을 이용한 중립면 계산 알고리즘을 제시한다. 교차성은 보로노이 영역을 사용, 단순한 기하학적 요소간의 거리 비교로 판별한다. 이런 기하학적인 접근 방법은 기본적으로 수립성 문제가 배제된다.

Key words: 중립면, MAT, 이등분면, 보로노이 영역, 축약 모델

1. 소개

중립면은 솔리드 모델에 내접 가능한 최대 구의 중심의 궤적으로 정의할 수 있다. 여기서 최대 구란 이것을 포함한 내접 구가 없음을 의미한다. 여기서 형상을 다면체로 제한하여 다음과 같은 중립면 식을 제안한다.

$$\overline{e_i, p} = \overline{e_j, p} = \dots = \overline{e_m, p} \leq \text{Minimum}(\overline{e_1, p}, \overline{e_2, p}, \dots, \overline{e_m, p}); 2 \leq n \leq m \quad (1)$$

위식에서 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 은 솔리드 모델의 경계 원소이고, p 는 솔리드 모델의 내부 점이고, $\overline{e_i, p}$ 는 p 로부터 e_i 의 투영점까지의 거리이다. 투영점은 내접점이라고도 하는데 p 를 중심으로 한 최대 구가 여기서 솔리드 모델과 내접한다. 같은 이유로 최대 구에 접하는 경계 원소를 내접 원소라 한다. 일반적으로 한 개의 최대 구에 대해서는 둘 이상의 내접 원소들이 있는데 이들을 내접 원소 집합이라고 한다. e_i, p 의 값이 유일하려면 경계 원소의 투영점이 한 개 이하여야 하는데 다면체의 경계 원소들은 모두 이를 만족한다.

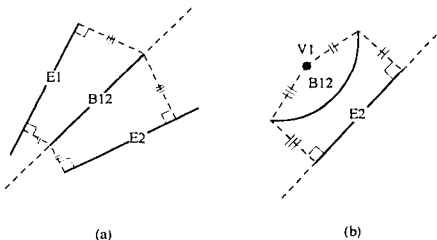


Fig. 1. Bounded bisectors.

식 (1)을 $\overline{e_i, p} = \overline{e_j, p}$ 형태의 식들의 연립 방정식으로 전개할 수 있는데 이들은 각각 이등분체의 수식이다. 이등분체는 3차원에서는 곡면, 2차원에서는 곡선이 되는데 각각의 경우에는 해당 용어(이등분면 또는 이등분선)를 사용하도록 하겠다. 또한 3차원에서 그림 3(b)의 경우에는 직선이 되나 편의상 이것도 이등분면이라고 하겠다. 여기서 원소는 한정된 면적을 갖는 솔리드 모델의 경계를 이루는 경계 원소 또는 무한한 면적 또는 길

이를 갖는 기하 원소를 들 수 있다. 이등분체는 두 원소가 각각 경계 원소이거나 기하 원소나에 따라 면적이 유한하거나 무한하거나 한다. 두 원소 중에서 어느 한가지가 유한한 면적을 갖으면 이등분체도 유한한 면적을 갖게 된다. 그림 1 (a), (b)는 2차원 상에서 두 원소 중 하나가 모서리일 때의 이등분 선을 나타내고 있다. 그림 1 (a)는 모서리 E1과 모서리 E2간의 이등분 선 B12, 그림 1 (b)는 꼭지점 V1과 모서리 E2간의 이등분 선 B12를 각각 도시하고 있다. 식 (2)은 원소 e_i 와 e_j 간의 이등분체를 나타낸다.

$$\overline{e_i, p} = \overline{e_j, p} \quad (2)$$

본 논문에서 쓰이는 이등분면은 모두 경계 원소 사이에서 발생하므로 기본적으로 무한한 면적 또는 길이를 갖는데 두 꼭지점 사이의 이등분면과 하나의 경계 원소와 그것의 영역을 한정하는 경계 원소 사이의 이등분면들은 예외 성질(그림 3)을 나타낸다.

중립면 식(식 1)의 구성요소가 이등분면 식(식 2)이 되듯이 그 둘 사이에는 포함 관계를 이룬다. 보다 정확히 말하자면, 중립면은 솔리드 모델의 모든 경계 원소 사이에 발생할 수 있는 이등분면들의 부분 집합이다. 따라서 본 논문은 중립면을 계산할 때 가장 어려운 중립면의 교차점을 이등분면과 충분히 작은 복셀과의 교차성을 이용하여 계산한다.

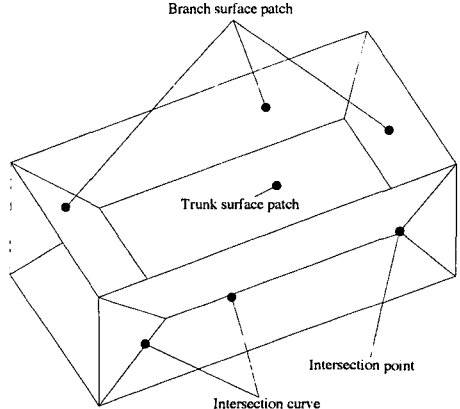


Fig. 2. MAT of block.

그림 2는 블록의 중립 면을 나타내고 있다. 중립 면은 하나의 곡면으로 나타내지 못하며 다수의 곡면 조각으로 구성된다. 중립면 조각은 또다시 보조 중립면 조각과 주요 중립면 조각으로 분류하는데 전자는 두 외접 원소가 인접하며 후자는 그렇지 않다. 주요 중립면 조각의 경계는 교차 곡선과 교차 점으로 이루어져 있다. 본 논문에서는 주요 중립면 조각의 계산만을 다룬다.

2. 관련 연구

Blum[Blu67]은 생물의 모양을 표현하는데 중립 축 변환(Medial Axis Transformation)을 처음으로 제시하였다. 그 후 2차원에서의 연구는 매우 활발히 진행됐다. 주요 연구는 D.T. Lee[Lee82]가 내부 구멍이 없는 다각형을, Srinivasan 등[SN87]은 구멍을 포함한 다각형을 다루었다. 3차원에서는 단순한 형상을 대상으로 중립면을 구하는 연구가 많이 수행되고 있다. Sudhalkar 등[SGP93]은 복셀 모델에 관한 box skeleton을 구하는 연구를 하였고 Yu 등[YGD91]은 점들로 경계를 근사화한 모델에 대해서 디러니(Delaunay) 삼각형화를 수행하여 무게 중심을 중립 면상의 근사 점들로 계산하는 연구를 하였다. Brandt[Bra91][Bra92]는 점들로 경계를 근사화 한 모델에 대해서 discrete-point Voronoi diagram을 구하는 연구를 하였다. 이 방법은 중립 면이 연결되어 있는 중요한 특징이 있다.

Lavender 등[LBD92]은 3차원에서 B-rep (Boundary representation) 모델에 대한 연구를 하였다. 그들의 방법을 간략히 소개하면 다음과 같다. 우선 모델을 복셀로 나누고 각 복셀 별로 둘 이상의 경계 원소로부터 등거리상의 점을 포함할지를 알아본다. 몇개의 경계 원소들이 점으로부터 등거리 상에 놓이는지는 현 단계에서는 정확하게 알 수는 없고 가정만을 하게 된다. 등거리상의 점을 포함하는 복셀들에 대해서는 그 점을 계산하기 위한 연립 방정식을 세우게 된다. 식들은 점을 중심으로 한 최대 구(반경은 등 거리가 된다)의 내접 점들이 처한 상황(등거리 조건, 접하는 조건, 수직한 조건등)에 맞추어 세운다. 연립 방정식의 근은 뉴턴 방법을 사용하여 구하게 된다. 이 연립 방정식은 식의 수가 변수보다 많은 경우가 있을 수 있고 둘 이상의 교차 점이 복셀 내부에 있을 경우에는 가정된 등거리상의 원소들이 이들 교차점을 각각 중심으로 한 둘 이상의 최대 구의 내접 원소들의 합집합인 관계로 실제로 근이 없는 연립 방정식이 세워질 수도 있다. Sheehy[SAR94]등은 Singular Value Decomposition을 사용하여 전술한 식이 변수보다 많은 경우에 대한 해결책을 제시했다. Sheehy 등[SAR95]은 또한 도메인 디러니 삼각형화를 물체 경계에 산재한 점들에 수행한 방법을 제시했다. 그들의 방법은 필요에 따라 경계 점들을 추가하여 위상적으로 정확한 중립 면을 구할 수 있다.

Hoffman[Hof94]의 방법은 두 경계 원소들간의 등 거리 점들 찾고 이들이 중립 면 상의 점인지를 확인한 후 이들을 경계 원소들로부터의 거리로 분류한다. 각 점들이 교차 점, 교차 선상의 점, 또는 주요 중립면 조각의 점인지는 전술한 연립 방정식을 세운 후 이 것의 Jacobian의

rank를 이용 판별한다. 경계 원소들로부터의 거리를 이용 중립면 조각의 위상 구조를 구성한다.

Sherbrooke 등[SPB95]은 다면체를 다루었다. 중립면 조각의 경계를 교차 곡선을 탐색함으로써 계산한다. 이 과정에서 각각의 교차점들도 계산한다. 교차 곡선의 탐색 방향은 미분 방정식을 이용하여 얻는다. 교차점 계산은 기본적으로 위 방법들과 같다.

Reddy와 Turkiyyah[RT95]는 Generalization of Voronoi Diagram란 방법을 제시했다. 그들은 Abstract Delaunay Triangulation을 우선 구한 후 이 것의 상대 개념인 Generalization of Voronoi Diagram을 구한다. 그들의 방법은 교차 점은 구하되 그 이상의 교차 곡선 내지 중립면 조각은 구하지를 않는다.

중립면 계산에 관한 문헌을 정리해 보면 다음 표와 같다.

모델 형식	2차원	3차원	문헌
곡률에 제한이 있는 B-rep 모델	○	○	[Hof94] ^{3D} [SAR95] ^{3D}
Set theoretic 솔리드 모델	○	○	[LBD92] ^{3D}
복셀 모델	○	○	[Xia89] [SGP93] ^{3D}
경계를 점으로 근사한 모델	○	○	[YGD91] [Bra92] ^{3D}
다면체	○	○	[Lee82] [SN87] [MS87] [SNTM90] [SPB95] ^{3D} [LL95] ^{3D} [RT95] ^{3D}
conic 단면을 갖는 B-rep 모델	○	●	[GP92] [KHP95]
Bézier spline을 갖는 B-rep 모델	○	●	[Chi92]
내부 루프가 없는 자유 곡선을 갖는 B-rep 모델	○	●	[Cho95] [JK95]
NURBS 곡면을 갖는 B-rep 모델	●	●	none

○: 구현됨 ●: 알려진 바가 없음

표 1 MAT의 연구 역사

3. 알고리즘

알고리즘의 개요는 다음과 같다.

- 주어진 솔리드 모델을 다면체로 근사화 한다.
- 다면체의 내부를 복셀로 채운다
- 솔리드 모델의 꼭지점으로부터 교차 곡선 또는 교차 점을 지나는 인접한 복셀들을 탐색한다. 이 인접 복셀들은 동일한 탐색의 시작 점이 된다.
- 넷 이상의 경계 원소 사이의 가능한 모든 이등분 면이 교차하는 복셀에 대해서 그 것의 내부에 교차 점

이 존재하는 지를 검사한다. 이는 특히 교차 곡선이 내부에 있을 경우를 배제하기 위함이다.

- 전술한 검사 결과 복셀 내부에 교차 점이 존재하는 지가 확실하면 교차 점의 좌표 값을 계산한다. 교차 점의 좌표 값은 복셀을 재귀적으로 분할 하면서 교차 점을 포함 하지 않는 것들은 버리면서 최종적으로 남는 복셀의 중앙 점으로 근사화 한다. 복셀이 교차 점을 포함하는 지는 그 것과 내접 원소 사이의 가능한 모든 이등분 면이 교차 하는지를 이용 판별 한다.
- 가능한 주요 중립면 조각 별로 위에서 계산한 교차 점을 할당한다. 인접하지 않는 두 경계 원소들의 이등분 면이 주요 중립면 조각이 될 수 있으나 모두 쓰이지는 않는다. 주요 중립면 조각들의 곡면 식들은 [LL95]의 것들을 사용한다.
- 각 주요 중립면 조각 위의 교차 점들 사이에 교차 곡선이 가능하면 그 것을 계산한다. 교차 곡선은 교차 곡선 상의 샘플 점들을 보간하여 구한다.

위에서 설명한 것에 대한 세부 사항을 다음 절들에서 다루고자 한다.

3.1 점, 직선, 평면간의 이등분 면 식

다면체의 기하학적 요소는 점, 직선, 그리고 평면이므로 이들 사이의 가능한 이등분 면 식은 쉽게 생각하면 6기가 된다. 그러나 식 유도 결과 가능한 형식은 11 가지나 되었다. 실제 식의 수가 더 많은 것은 기하 요소들이 교차하거나 특이한 각을 이루고 있을 경우 식의 형태가 다르기 때문이다. 가능한 이등분 면 식들은 다음 표와 같다.

	평면	직선	점
평면	평행 비 평행	평행 수직 교차 비 수직 교차	유일
직선		평행 비 평행 교차 비 평행 비 교차	유일
점			유일

표 2 평면, 직선, 점의 이등분 면

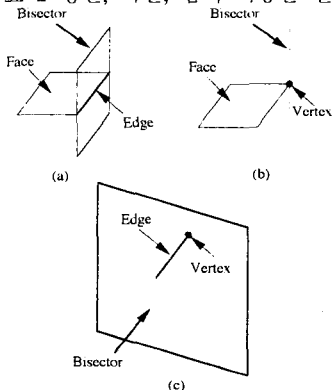


Fig. 3. Bisectors between topological entities where one forms the boundary of the other.

표 2의 모든 이등분 면 식은 실제 주요 중립면 조각으로 사용할 때 경계를 지어 주어야 한다. 만일 두 경계 요소가 어느 한쪽이 다른 쪽의 경계로서 존재 할 때도 이등분 면은 정의가 가능하다. 가능한 조합은 면-꼭지점, 면-모서리, 모서리-꼭지점들이다. 그림 3(a)는 모서리가 면의 경계를 이룰 때의 경우, 그림 3(b)는 꼭지점이 면의 경계를 이룰 때의 경우, 그림 3(c)는 꼭지점이 모서리의 경계를 이룰 경우이다. 이들 이등분 면들은 주요 중립면 조각이 될 수가 없으면 단지 복셀과 이등분 면이 교차 검사 시에만 사용한다.

3.2 이등분 면들의 교차 점

본 알고리즘의 중립 면 계산은 상향 식이다. 바꾸어 말하자면 교차 점, 교차 곡선, 중립면 조각 순서로 전개한다.

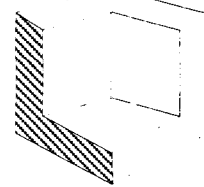
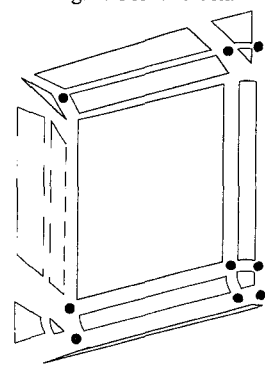


Fig. 4. Corner block.



● : Intersection points

Fig. 5. Medial surface of corner block

그림 5은 그림 4의 중립 면 조각들이다. 왼쪽 벽에 해당하는 부위 만 도시 되어 있다. 각 중립 면 조각들은 교차 곡선과 교차 점들로 경계 지어 있다. 그림 5의 검은 점들은 교차 점들을 나타내고 있다.

이해를 돕기 위해 교차 점 계산 방법과 특히 교차 곡선 검사 방법을 분리해서 설명하겠다. 일단 특히 교차 곡선이 복셀을 지나지 않는다는 가정하에 교차 점을 계산하는 방법을 설명하겠다. 실제 구현에서는 검사가 이루어진 후에 만이 교차 점을 계산한다.

특이 경우를 제외한다면 최대 구의 내접 원소 수를 세는 것 만으로 교차 점을 구할 수 있다. 만일 최대 구가 넷 이상인 내접 원소를 갖는다면 최대 구의 중심점이 교차 점이 된다. 일반적으로 최대 구가 n개의 내접 원소를 갖는다면 C_n^2 만큼의 이등분 면들이 구의 중심점을 통과하게 된다. 그 이유는 n개의 원소에서 두개씩을 선택하면 이등분 면이 가능하기 때문이다. 따라서 교차 점은

$C_n^2; n \geq 4$ 개의 이동분 면들의 교차 결과이다.

교차 점을 구하는 문제를 복셀 단위로 생각해 보자. 모든 복셀에 대해서 교차 점들을 계산한다면 다면체의 중립면의 모든 교차 점들을 구할 수 있다. 교차 점 계산은 편의상 2차원에서 하도록 한다. 2차원에서는 교차 곡선과 교차 점의 구분이 없으며 단지 교차 점만이 있게 된다. 중립 면이 중립 선이 되고 복셀은 픽셀(pixel)이 된다.

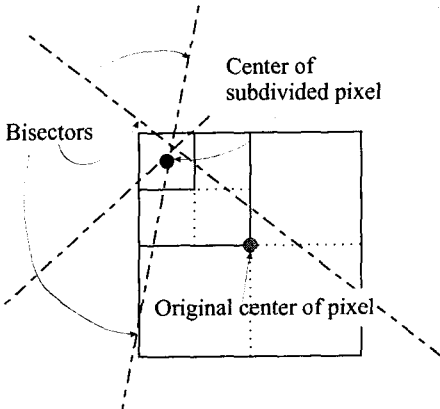


Fig. 6. Intersection point

그림 6은 픽셀 내부에 대한 교차 점 추적을 도시하고 있다. 본 그림은 세 개의 내접 원소가 있는 경우에 해당한다. 따라서 이동분 선의 수는 C_3^2 (2차원에서는 내접 원소가 셋 이상인 경우에 교차 점이 존재한다. 이는 3차원보다 하나 적은 경우다.)이다. 첫째로 픽셀의 내부에 중심을 둔 최대 구의 내접 원소를 찾는다. 이들은 픽셀을 지나는 이동분 선을 찾아낸 후 이들의 경계 원소를 모아 내면 구할 수 있다. 이 경우에서는 세 개의 내접 원소를 구하게 된다. 픽셀의 네 귀퉁이 $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ 으로부터 각각 내접 원소 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 로의 거리들 $\{V_i e_j | i=1,2,3,4; j=1,2,3\}$ 을 계산한다. 각 원소 e_j 에 대해서 네 개의 거리 $V_1 e_j, V_2 e_j, V_3 e_j, V_4 e_j$ 가 있는데 이 값들의 최대치에서 최소치를 뺀 값을 δ_j 라 하자. 만일 어떤 δ_j 가 공차 값 ϵ 보다 크면 픽셀을 네 개로 분할한다. 그리고 기존 복셀과 교차하는 세 개의 이동분 선과 모두 교차하는 것을 빼고 나머지를 버린다. 그 후에는 재귀적으로 픽셀을 공차 값을 만족할 때까지 분할하여 마지막 픽셀의 중심점을 교차 점으로 근사화 한다. 그림 7 (a), (b)에서 알 수 있듯이 최종 픽셀의 변의 길이는 ϵ 보다 작게 되며 이는 교차 점의 계산 값의 오차 범위를 결정한다.

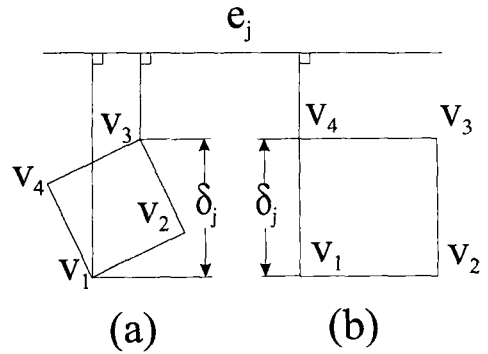


Fig. 7. Relation between orientation of pixel and δ_j .

픽셀 내부에 두개 이상의 교차 점이 있을 경우 픽셀을 분할 하면 기존 픽셀과 교차하던 이동분 선과 모두 교차하는 하위 픽셀이 없게 된다. 이런 경우 하위 픽셀을 각각 시발점으로 새로운 교차점 계산이 수행된다.

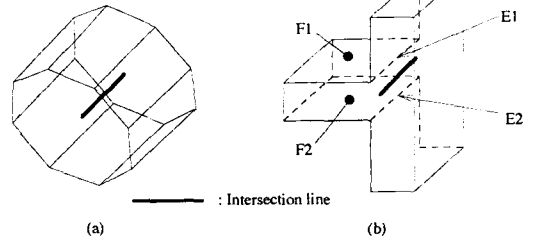


Fig. 8. Exceptional intersection lines.

지금까지는 복셀 내부에 특이 교차 곡선이 없을 경우만 설명해 왔다. 일반적으로 최대 구가 넷 이상인 내접 원소의 중심이더라도 교차 점에 없을 수가 있다. 가령 N-gon(정삼각형, 정사각형, 정오각형, 등등)을 그것이 놓인 단면에 수직하게 밀어낸 형상에서 이런 사실을 볼 수 있다. 그림 8(a)의 두꺼운 선을 중심으로 한 최대 구는 8개의 경계 원소에 내접하지만 그 중심점이 교차 곡선에 놓이게 된다. Fig 13(b)는 다른 경우인데, 그림의 두꺼운 선분들을 중심으로 한 최대 구는 두 점에서 내접하고 있다. 각 점은 면과 모서리(F1-E1 과 F2-E2)에 동시에 내접하게 되어 있다. 따라서 내접 원소는 4개이며 교차 점의 조건식에 맞지만 구의 중심점은 교차 점이 아닌 교차 곡선에 놓이게 된다. 전술한 두 경우에 해당하는 교차 곡선을 특이 교차 곡선이라 한다.

복셀 내부에 특이 교차 곡선이 있는지를 알아내는 방법은 두 가지를 들 수 있다. 첫째는 최대 구가 내접하는 조건을 이용 연립 방정식을 구한 후 이것의 Jacobian 이 특이 한지를 알아내는 방법이다[SAR94]. 이런 방법은 수치적 문제로 구현하기가 매우 어려울 것으로 예상된다. 두째는 교차 곡선상의 임의의 점을 계산한 후 이것을 중심으로 한 최대 구의 내접 점들이 모두 동일한 평면에 놓이는지를 알아내는 방법이다[Bra92]. 이 방법은 다른 중립 면 계산 알고리즘의 확인 방법으로 밖에 쓰일 수 없다.

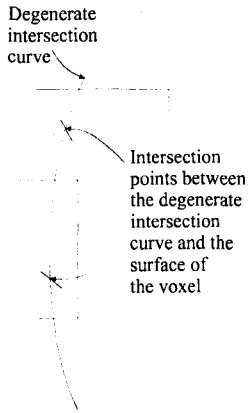


Fig. 9. Voxel containing a degenerate intersection curve.

본 알고리즘의 방법은 역시 기하학적인 접근 방법을 사용한다. 만일 복셀과 교차하는 이등분 면의 내접 원소들의 수가 4보다 작으면 교차 점 내지 특이 교차 곡선이 존재할 수 없으므로 이를 버린다. 그러나 내접 원소들의 수가 4 이상이면 다음과 같은 방법을 취한다. 일단 내접 원소들의 집합을 T 라 한다. 복셀의 각각 8면에서 T 를 내접 원소 집합으로 하는 최대 구의 중심점을 찾는다. 만일 복셀에 특이 교차 곡선이 지난다면 그림 9와 같이 여러 개의 점들을 찾게 될 것이다. 만일 그렇지 않다면 한 개 이하의 점만을 찾게 될 것이다. 정리하면 두 개 이상의 점이 동일한 내접 원소 집합을 갖는다면 해당하는 점들은 특이 교차 곡선 상의 점이 된다.

3.3 이등분면과 복셀의 교차

이등분 면과 복셀간의 교차는 그 진위 여부만 판별하면 된다. 이등분면과 복셀과의 교차는 복셀의 모서리와 이등분면과의 교차성으로 판별한다. 이등분 면의 또 다른 시각은 이 것이 각각 원소에 인접한 영역들을 구분하는 기준 면이라는 것이다. 이 인접 영역을 한 원소의 보로노이 영역이라 한다. 따라서 이등분 면과 모서리의 교차성은 모서리의 양 꼭지점이 서로 다른 보로노이 영역에 속해 있는지를 시험해 보면 알 수 있다.

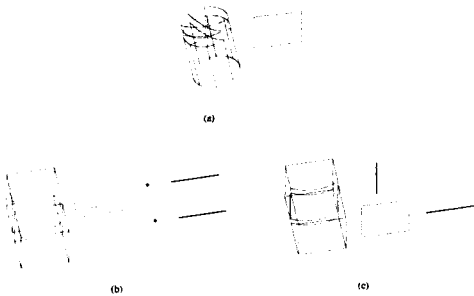


Fig. 10. Regular Voronoi territories of two elements.

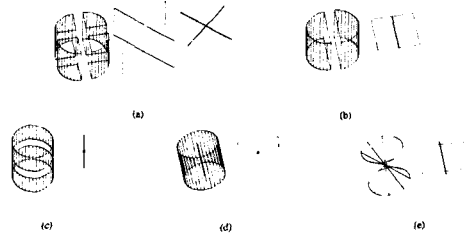


Fig. 11. Irregular Voronoi territories of two elements.

그림 10은 전형적 보로노이 영역을 도시하고 있다. 그림에서 가장 왼쪽의 두 영역은 오른 편에 있는 각각의 경우에 해당하는 보로노이 영역들이다. 그림에서 두 영역 사이의 틈새는 식별을 용이 하기 위해 두었으면 실제로 두 영역은 붙어 있다. 그림 11은 특이한 보로노이 영역을 도시하고 있다. 특이하다고 부르는 이유는 각 보로노이 영역이 복수 개의 영역으로 분할되어 있기 때문이다. 비록 모서리의 양 꼭지점이 같은 보로노이 영역에 있더라도 서로 영역이 떨어진 곳에 위치한다면 이 등분면과 교차하는 것으로 간주해야 한다.

그림 10,11의 각 부분별 설명은 다음과 같다.

- 그림 10(a): 점과 평면간의 보로노이 영역들
- 그림 10(b): 평행한 두 평면간, 두 꼭지점 간, 두 비 교차 직선간의 보로노이 영역들
- 그림 10(c): 비 교차 직선과 평면간, 점과 직선간의 보로노이 영역들
- 그림 11(a): 두 교차 평면간, 두 교차 직선간의 보로노이 영역들
- 그림 11(b): 겹치는 직선과 평면간의 보로노이 영역들
- 그림 11(c): 겹치는 점과 직선간의 보로노이 영역들
- 그림 11(d): 겹치는 점과 평면간의 보로노이 영역들
- 그림 11(e): 교차하는 직선과 평면간의 보로노이 영역들

이등분 면 중 그림 3(b)의 이등분 면은 예외적으로 직선이 된다. 이 것에 대해서는 직선과 복셀간의 교차를 직선과 복셀의 8면과의 교차로 직접 다룬다.

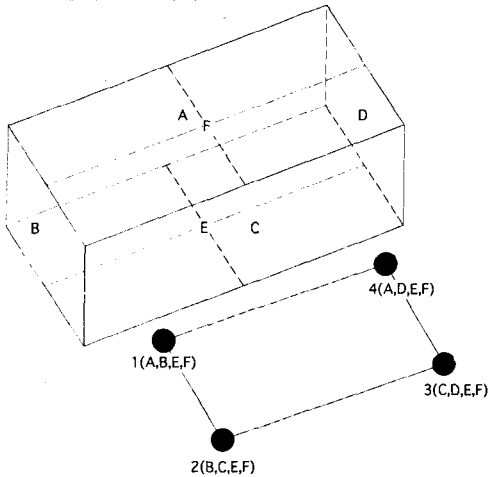
3.4 중립면 조각의 생성

모든 교차 점들이 구해졌으면 다음 과제는 이들을 연결하는 교차 곡선을 구하는 것이다. 두 교차 점들은 다음 조건을 만족할 때 교차 곡선의 양 끝 단이 된다 교차 점 p_i 과 연관된 내접 원소들을 $T(p_i)$ 라 하면 두 교차 점 p_i, p_j 는 식 (3)을 만족할 때 교차 곡선으로 연결된다. 여기서 $N(A)$ 는 집합 A 의 원소의 수이다.

$$N(T(p_i) \cap T(p_j)) \geq 3 \quad (3)$$

식 (3)은 두 교차 점 각각의 내접 원소들의 교집합의 원소의 개수가 2 이상이면 교차 곡선이 그 둘 사이를 지난다는 의미이다. 이 것의 기하학적인 의미는 p_i, p_j 두 점 사이의 점들의 내접 원소가 식 (3)의 왼쪽 항의 수

만큼 존재한다는 의미다.



Node number (Touching elements)

Fig. 12. Connecting medial axis points.

예로서 그림 12 을 설명하겠다. 그림에서 교차 점은 1,2,3,4 이고 각 점의 내접 원소들은 각 교차점 뒤에 나열 되어 있다. 점 1과 4는 교차 곡선으로 연결 되는데 이때의 공통 내접 원소들은 A,E,F가 된다. 이 경우는 식 (3)을 만족한다. 점 1과 3은 연결하지 않는데 그 이유는 그 둘 사이의 공통 내접 원소는 E,F로서 식 (3)을 만족 하지 않는다. 모든 교차 점들은 공통적으로 E,F의 내접 원소를 갖으며 이는 이들이 E,F로 정의 되는 중립면 조각 위에 놓임을 의미한다.

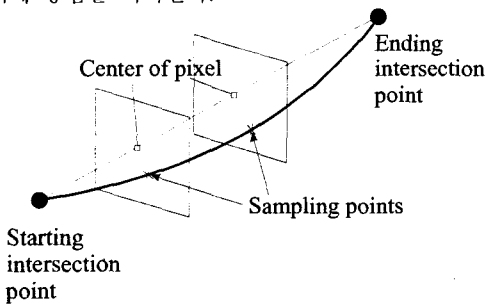


Fig. 13. Calculation of sampling points of an intersection curve.

이등분 면들이 일반적으로 평면이 아니므로 교차 곡선도 직선이 아니다. 교차 곡선상의 점들을 구한 후 이들을 보간하여 교차 곡선을 구한다. 이때 필요한 보간 점들은 두 교차 점 사이에 다수의 사각 영역을 지정하고 각각의 영역에서 교차 곡선상의 점들을 구한다(그림 13).

최종적으로 중립면 조각의 곡면식은 [LL95]에서 제시한 해석적 곡면 식을 사용한다. 교차 곡선과 교차 점을 식 (4)를 만족하는 중립면 조각과 연계 시키면 필요한 모든 정보를 알게 된다. 여기서 $T(f_i)$ 는 중립면 조각 f_i 의 두 외접 원소가 되며 $T(v_j)$ 와 $T(e_k)$ 는 교차점 v_j 와 교차 곡선 e_k 의 외접 원소가 된다.

$$\begin{aligned} T(f_i) &\subset T(v_j) \\ T(f_i) &\subset T(e_k) \end{aligned} \quad (4)$$

4. 알고리즘 평가

초기 복셀의 크기가 프로그램 수행 시간에 미치는 영향을 평가해보자. 다면체가 변의 길이가 l 인 직육면체에 포함된다고 보자. 이 것의 내부를 변의 길이가 $\frac{l}{n}$ 인 복셀로 채운 후 각 복셀 별로 교차 점의 존재 가능성을 알아 보는데는 C_n^2 의 명령문 수행이 필요하다. 또한 교차 점을 포함하는 복셀은 추가적으로 공차 값 ϵ 을 만족하도록 S 번 분할하여 교차 점의 좌표 값을 계산하게 된다. 여기서 S 와 ϵ 은 다음의 관계를 만족해야 한다.

$\frac{\sqrt{3}}{2} d \frac{1}{2^S} < \epsilon, d = \frac{l}{n}$.이 작업은 $8SC_n^2$ 의 명령문 수행이 필요하다. 따라서 전체 명령문 수행은 $C_n^2 n^3$ 와 교차 점을 포함하는 복셀들에 대한 $8SC_n^2$ 의 합이 된다.

이는 알고리즘 복잡도의 정도를 $O(n^3)$ 으로 하게 된다. 알고리즘의 성능을 향상시키려면 결국 n 을 최소화 해야 하는데 이는 초기 복셀을 크게 하는 것이 유리함을 나타낸다. 현재 초기 복셀의 크기는 사용자가 입력하도록 하고 있다.

현재 알고리즘의 성능은 매우 낮다. 이는 모든 복셀에 대해 모든 이등분 면의 교차성을 시험하는데 연유한다. 속도를 향상시키기 위해 형상의 min-max box를 복셀의 초기로 사용하는 것보다 복셀 크기를 어느 정도 작게 하고 교차 곡선과 교차 점 근방의 복셀만 검색하는 것이 더 능률적인 것을 알 수 있었다.

복수의 교차 점이 공차 값 ϵ 으로 분별하지 못하게 매우 가깝게 있을 경우에는 이들을 하나의 교차 점으로 본 알고리즘은 계산을 하게 되고 이런 상태에서도 중립면의 위상 구조는 파괴되지 않는다.

5. 결과



Fig. 14. Medial surface of cuboid whose width \neq depth \neq height

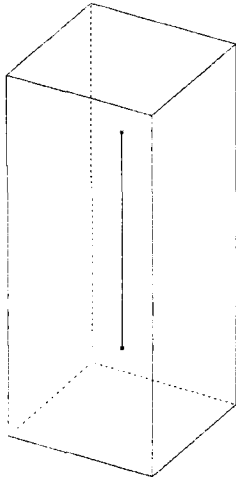


Fig. 15. Medial surface of cuboid whose width = depth \neq height

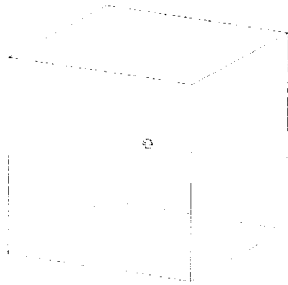


Fig. 16. Medial surface of cuboid whose width = depth = height

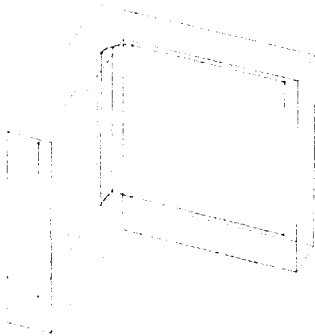


Fig. 17. Medial surface of L-bracket.

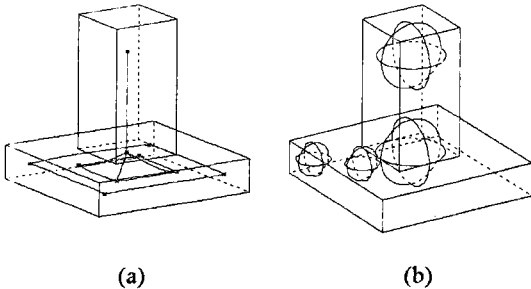


Fig. 18. Medial surface of protrusion.

그림 14 은 폭, 깊이, 높이 길이들이 모두 다른 블록의 중립면이다. 그림 15 은 폭과 깊이를 같게 해서 특이 교차 곡선을 구하였다. 그림 16 는 모든 변의 길이를 같게 한 상태이다. 이 예에서 6면의 교차 점 외에도 한 면씩을 제외한 5면에 접하는 교차 점들도 다수 계산 되었는데 이들은 6면의 교차 점에 중속되는 것으로 간주해서 버렸다. 이는 수치적인 문제가 발생하더라도 알고리즘이 올바르게 이런 오류를 처리 할 수 있음을 보여 준다. L-bracket의 중립면을 그림 17 에서 도시하고 있다. 마지막으로 그림 18 (a)는 돌출 형상에 대한 중립면을 보여 주고 있다. 그림 18 (b) 가운데의 최대 구는 4개의 모서리와 5개의 면들에 내접하고 있다. 표 3 은 그림 20-24 의 수행 시간을 보이고 있다.

	No. of boundary elements	CPU (hrs:mins:secs)
Figure 20	22	0:12:52
Figure 21	22	0:7:33
Figure 22	22	0:5:09
Figure 23	38	0:48:26
Figure 24	51	5:20:29

표 3 CPU 수행 시간

6. 결론

수치적인 해결 방법을 배제 함으로써 견장한(robust) 중립면 계산 방법을 구현 할 수 있었다. 모든 계산은 단순 식의 계산과 비교이다. 모든 공차 값은 기하학적인 의미라 갖는다. 본 알고리즘은 각 복셀의 계산을 독립적으로 수행 할 수 있으므로 병렬 컴퓨터에 적합하다고 본다. 그러나 현재 구현으로는 실제 모델에 적용하기가 시간상 문제로 적당치 않다.

7. 참고문헌

- [Arm94] Cecil G. Armstrong, "Modelling requirements for finite-element analysis," *Computer-Aided Design*, 26(7):573-578, July 1994.
- [ATRL93] Cecil G. Armstrong, C.L. Toh, D.J. Robinson, and T.S. Li, "Adaptive hexahedral meshing using solid primitives," In *Proceedings of The Fourth International Conference on Quality Assurance and Standards in Finite Element and Associated Technologies*, pages 85-96, May 1993.
- [Blu67] H. Blum. "A transformation for extracting new descriptors of shape," *Models for Perception of Speech and Visual Form*, 1967.
- [Bra91] Jonathan Worthen Brandt, "Theory and Application of the Skeleton Representation of Continuous Shapes," Ph.D. thesis, University of California, Davis, November 1991.
- [Bra92] Jonathan W. Brandt, "Describing a solid with the three-dimensional skeleton," In J. D. Warren, editor, *Proceedings of The International Society for Optical Engineering, Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics III*, volume 1830, pages 258-269, Boston, Massachusetts, 1992. SPIE.
- [Chi92] Ching Shoei Chiang, "The Euclidean Distance Transform," Ph.D. thesis, Purdue University, August 1992.

- [Cho95] Jin J. Chou, "Voronoi diagrams for planar shapes," *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15(2):52-59, March 1995.
- [Dan80] Per Erik Danielsson, "Euclidean distance mapping," *Computer Graphics and Image Processing*, (14):227-248, 1980.
- [DH93] D. Dutta and C. M. Hoffmann, "On the skeleton of simple CSG objects," *Journal of Mechanical Design*, 115:87-94, March 1993.
- [GP92] H.N. Gursoy and N.M. Patrikalakis, "An automatic coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform: Part 1 algorithms," *Engineering with Computers*, 8(3):121-137, 1992.
- [HoF94] C.M. Hoffmann, "How to construct the skeleton of CSG object," In *The mathematics of surfaces*, volume IV. Oxford University Press, 1994.
- [JK95] Jaehun Jeong and Kwangsoo Kim, "Free-form curve offsetting by Voronoi diagram," In *95 Fall meeting of the Korean Society of Precision Engineering*, pages 713-718, November 1995. written in Korean.
- [KHP95] Deok-Soo Kim, Il-Kyu Hwang, and Bum-Joo Park, "Representing the Voronoi diagram of a simple polygon using rational quadratic Bézier curves," *Computer-Aided Design*, 27(8):605-614, August 1995.
- [LBD92] David Lavender, Adrian Bowyer, James Davenport, Andrew Wallis, and John Woodwark, "Voronoi diagrams of set-theoretic solid models," *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(5):69-77, September 1992.
- [Lee82] D.T. Lee, "Medial axis transformation of a planar shape," *IEEE Trans. on Pattern Analy. and Machine Int.*, PAMI-4(4):363-369, July 1982.
- [Lee94] Yong-Gu Lee, "Shell mesh generation by M.A.T.," Master's thesis, Seoul National University, February 1994.
- [LL95] Yong-Gu Lee and Kunwoo Lee, "Shell mesh generation by medial axis transformation," In Ahmed A. Busnania, editor, *Computers in Engineering 1995*, pages 713-727, United Engineering Center 345 East 47th Street New York, N.Y. 10017, September 1995. The Computers in Engineering Division, ASME.
- [MS87] Siavash N. Meshkat and Constantine M. Sakkas, "Voronoi diagram for multiply-connected polygonal domains 2: Implementation and application," *I.B.M. Journal of Research and Development*, 31(1):380-381, May, 1987.
- [RT95] Jayachandra M. Reddy and George M. Turkiyyah, "Computation of 3d skeletons using a generalized delaunay triangulation technique," *Computer-Aided Design*, 27(9):677-694, September 1995.
- [SAR94] D.J. Sheehy, C.G. Armstrong, and D.J. Robinson, "Numerical computation of medial surface vertices," In *IMA Conference on Mathematics of surfaces*, VL 547, September 1994.
- [SAR95] Damian J. Sheehy, Cecil G. Armstrong, and Desmond J. Robinson, "Shape description by medial surface construction," In J. R. Rossignac and C. M. Hoffmann, editors, *Proceedings of the Third ACM Solid Modeling Conference*, Salt Lake City, Utah, May 1995. ACM.
- [SGP93] Atul Sudhalkar, Levent Gürsöz, and Fritz Prinz, "Continuous skeletons of discrete objects," In *2nd ACM Solid Modeling '93*, pages 85-94, Montreal, Canada, 1993.
- [SN87] Vijay Srinivasan and Lee R. Nackman, "Voronoi diagram for multiply-connected polygonal domains 1: Algorithm," *I.B.M. Journal of Research and Development*, 31(1):361-372, May 1987.
- [SNTM90] Vijay Srinivasan, Lee R. Nackman, Jung-Mu Tang, and Slavash N. Meshkat, "Automatic mesh generation using the symmetry axis transformation of polyhedral domains," IBM T.J. Watson Research Report, (RC 16132), 1990.
- [SPB95] Evan C. Sherbrooke, Nicholas M. Patrikalakis, and Eric Brisson, "Computation of the medial axis transform of 3-d polyhedra," In J. R. Rossignac and C. M. Hoffmann, editors, *Proceedings of the Third ACM Solid Modeling Conference*, Salt Lake City, Utah, May 1995. ACM.
- [Xia89] Yun Xia, "Skeletonization via the realization of the fire front's propagation and extinction in digital binary shapes," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(10):1076-1086, October 1989.
- [YGD91] Xinhua Yu, John Goldak, and Lingxian Dong, "Constructing 3D discrete medial axis," In *Proceedings of Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, 1991.