

센서의 설치 오차에 따른 자기베어링 지지 로터계의 안정도에 관한 연구 -비선형 자기력 모델에 대한 고찰-

A Stability Analysis of the Magnetic Bearing System Subject to Sensor dislocation Error -Discussion on Nonlinear Magnetic Force Model-

정재일(서울대 대학원), 김종원(서울대 기계설계학과)

Chaeil Chung(Graduate School, Seoul National Univ.), Jongwon Kim(Seoul National Univ.)

ABSTRACT

In many cases, the magnetic force model is linearized at the origin in designing the controller of a magnetic bearing system. However, this linear assumption is violated by the unmodeled nonlinear effect such as sensor dislocation and backup bearing dislocation. Therefore, a direct probe into the nonlinear magnetic force model in an active magnetic bearing system is necessary. To analyze the nonlinear magnetic force model of a magnetic bearing system, phase plot analysis which is to plot the numerical solution of the nonlinear equation in several initial points in the interested region is applied. Phase plot analysis is used to observe a nonlinear dynamic system qualitatively (not quantitatively). With this method, we can get much useful information of the nonlinear system. Among this information, a bifurcation graph that represents stability and locations of fixed points is essential. From the bifurcation graph, a stability criterion of magnetic bearing system is derived.

Key Words: magnetic bearing (자기 베어링), bifurcation graph (분기 그래프), stability criterion (안정 한계), phase plot (위상선도), phase plane (위상 공간), phase portrait (위상 궤적 선도), backup bearing (백업 베어링), decentralized linear control (분산식 선형 제어기), nonlinear magnetic force model (비선형 자기력모델)

1. 서론

자기 베어링은 전자기력을 능동적으로 제어하여 회전축을 물리적인 접촉없이 지지할수 있는 기계요소이다. 자기베어링은 기존의 구름 접촉식 베어링에 비해 윤활, 밀봉, 마찰로 인한 발열, 마모등의 문제가 없고 특히 축진동을 능동적으로 제어할 수 있는 장점을 가지고 있어 고속의 회전축을 지지하는 기저장치에 많이 이용되고 있다. 자기 베어링은 비제어시에 음의 강성을 가지는 불안정한 시스템이기 때문에, 반드시 제어를 달아 제한제어를 하여 전체 시스템을 안정화 시키며 이때 주로 평형점에서

선형화한 선형자기력 모델을 기준으로 제어를 설계하게 된다. 그리고 시스템 안정화를 목적으로 사용되는 제어기는 설계의 용이성, 구조상의 단순함 때문에 분산식 선형제어기가 많이 사용되고 있다.[1],[2],[3] 그러나, 분산식 선형 제어기는 자기력 모델을 선형화한 후 제어를 설계하기 때문에 모델링 되지 않은 여러 가지 비선형 효과들이 예상하지 못한 효과를 일으킨다. Schweizer[4]는 일반적인 제어기에서 로터가 기울어져 있을 경우의 부가 모멘트에 대하여 검토했으며 Knight[5]는 FEM을 이용하여 Maxwell의 방정식으로부터 유도되는 비선형 자기력 모델을 검토,수정했으며 Chen[6]은 선형화된

자기력 모델을 이용하여 로터계의 회전속도에 따른 모드 제어와 이때의 안정도를 검토하였다.

주지하는 바와 같이 모든 기계 장치는 그 장치를 설치할 때 생기는 설치 오차가 존재하게 되는데 자기베어링의 경우에는 이 설치 오차가 전체 시스템의 안정도에 큰 영향을 미치게 된다. 자기 베어링 시스템은 로터계와 자기력을 발생시키는 액츄에이터사이의 거리가 $300\mu\text{m} \sim 500\mu\text{m}$ 이므로 이 거리를 측정하여 제어기로 보내주는 센서가 필수적이다. 센서는 자기베어링과 로터 사이의 거리를 실시간 측정하기 위해 베어링부에 설치되며 와전류형 변위센서와 축전센서가 많이 쓰인다. 와전류형 센서의 경우에는 가격 대 성능비가 축전센서에 비해 우수하지만 자기 베어링이 발생시키는 자기장의 영향을 받기 때문에 자기베어링으로부터 일정한 거리를 두고 설치하여야 하며 결국 자기력 작동점과 센서의 측정 위치가 달라지고 이 때문에 측정값이 실제 위치값과 오차를 가지게 된다. Maslen[7]은 연성축계의 경우 이런 오차 때문에 전체 페루프 전달함수가 불안정한 영점을 가지게 되어 자기베어링 시스템을 불안정하게 할 수 있다는 것을 밝혔다. 축전센서는 자기력의 영향을 받지 않기 때문에 베어링부에 가깝게 설치할 수 있지만 설치 공간이 매우 작기 때문에 설치에 문제가 있을 수 있다. Shin[8]은 이러한 자기력 작동부와 측정 위치의 오차를 없애기 위해 동위형 축전 센서를 설계했다. 그러나 이러한 동위형 축전 센서도 전자부를 통한 보정이 필수적이며 전자 회로의 시간에 따른 성능변화(Drifting)에 의해 센서가 가르키는 중심이 달라지는 현상을 피할 수 없다. 분산식 선형 제어기는 설계할 때 자기력 모델이 선형 대칭적이라고 가정했으나 이러한 가정은 설치 오차가 생기면 깨어지게 되며, 분산식 선형 제어를 이용한 시스템은 비선형인 자기력 함수를 이론적으로 액츄에이터의 중심을 원점으로 두고 선형화한 모델을 가지고 제어를 설계하기 때문에 액츄에이터의 중심과 제어가 센서로부터 받아들이는 신호의 원점이 차이가 나게 되면 이 원점의 차이는 제어가 잘못된 제어 신호를 발생시켜 시스템을 불안정하게 만드는 원인이 된다.

본 논문에서는 센서의 설치 오차나 신호의 오차를 고려하기 위해서는 선형화를 시키지 않은 비선형 자기력 함수에 대한 고찰을 수행하고, 해석 방법으로 위상 공간 방법을 이용하였다. 위상 공간 방법은 비선형 미분방정식을 해석적으로 푸는 대신에 수치 적분의 방법을 써서 각 초기값에 대한 해를 구하여 이것을 상태 공간(State Space)상에 도시하는 것이며 이 방법을 통하여 해석하고자 하는 시스템

의 정성적인 특성을 해석할 수 있다. 위상 공간 방법을 통한 운동 방정식 해석에서 자기베어링 시스템에서 고려되어야 할 변수로는 비례계인, 미분계인, 적분계인등이 있으며 위에서 언급한 센서의 설치오차 또한 중요한 변수중의 하나가 된다. 이러한 변수에 따라 위상공간에서의 위상상태값의 변화를 도시(Phase plot)하고 또 이들로 부터 각 자기베어링의 안정화에 영향을 미치는 설계변수를 정의하고 시스템이 안정화되는 설계변수의 범위를 제시하고자 한다.

2. 시스템의 모델링

2.1 자기베어링 부의 선형화 모델링

양극형 자기베어링의 경우 x 방향의 자기력을 유도하면 다음과 같다.

$$F_x = \frac{\mu_0 A_g N^2 \gamma}{4} \left(\frac{I_R^2}{(G - \gamma x)^2} - \frac{I_L^2}{(G + \gamma x)^2} \right) \quad (\text{식 1})$$

위 식에 쓰인 각 모델링 변수를 다음표에 실었다.

| Symbol | Definition |
|----------|-----------------------------------|
| μ_0 | Permeability |
| A_g | Area of magnetic pole |
| N | number of coil turns |
| γ | Geometric factor of magnetic pole |
| I_b | Bias current |
| G | Nominal air gap |
| K_m | Position stiffness |
| K_c | Actual current gain |

Table: Modeling parameters of magnetic bearing system

질량 M 의 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$M\ddot{x} = F_d \left(\frac{(I_b + I_{px})^2}{(G - \gamma x)^2} - \frac{(I_b + I_{px})^2}{(G + \gamma x)^2} \right) \quad (\text{식 2})$$

$$\text{단, } F_d = \frac{\mu_0 A_g N^2 \gamma}{4}$$

자기력 식을 선형화 시키기 위해 $x = 0$, $I_{px} = 0$ 에 대하여 테일러 전개한 후 고차항을 무시하면 다음과 같은 선형화된 운동 방정식을 구할수 있다.

$$M\ddot{x} = K_m x + K_c I_{px} \quad (\text{식 3})$$

$$\text{단, } K_m = \frac{\mu_0 A_g N^2 \gamma^2 I_b^2}{G^3}, K_c = \frac{\mu_0 A_g N^2 \gamma I_b}{G^2}$$

만약 PD 제어를 사용하여 시스템을 안정화 시킨다고 하면 다음과 같이 식을 쓸수 있다.

3. 비선형 자기력 모델의 해석

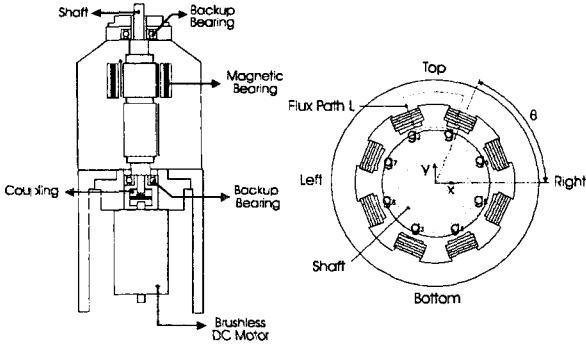


Fig. 1 Schematic Diagram of A Magnetic Bearing

$$I_{px} = -K_p * x - K_d * \dot{x} \quad (\text{식 4})$$

$$M\ddot{x} = K_m x + K_c I_{px} = (K_m - K_c K_p)x - (K_c K_d)\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + (K_c K_d)\dot{x} + (K_c K_p - K_m)x = 0 \quad (\text{식 5})$$

따라서 등가강성과 등가 감쇠값을 가지는 스프링 감쇠 시스템으로 가정할 수 있다.

2.2 운동방정식의 무차원화

비선형 운동방정식의 무차원화는 다음과 같이 전개된다. 먼저 변위 x 와 시간 t 를 다음과 같이 무차원화할 수 있다.

$$\tilde{x} = x/G \quad : \text{기본 Gap 에 대한 변위}$$

$$\tau = t/T \quad : \text{무차원화된 시간}$$

제어기로는 PD 제어를 쓴다고 하면

$$I_{px} = -K_p * x - K_d * \dot{x}$$

가 되고, 이것을 (식 2)에 대입하고 무차원화하면

$$\tilde{x}'' = \left(\frac{(\varepsilon - \tilde{x} - \xi \tilde{x}')^2}{(1 - \gamma \tilde{x})^2} - \frac{(\varepsilon + \tilde{x} + \xi \tilde{x}')^2}{(1 + \gamma \tilde{x})^2} \right) \quad (\text{식 6})$$

$$\text{단, } T = \sqrt{\frac{M \cdot G}{F_d}} \frac{1}{K_p} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{I_b}{K_p \cdot G} \quad ; \quad \xi = \sqrt{\frac{F_d}{M \cdot G}} K_d$$

이식을 상태 공간 형식(State Space Form)으로 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \left(\frac{(\varepsilon - x_1 - \xi x_2)^2}{(1 - \gamma x_1)^2} - \frac{(\varepsilon + x_1 + \xi x_2)^2}{(1 + \gamma x_1)^2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{식 7})$$

2차 비선형 미분방정식의 정성적 해석은 위상 공간(Phase plane)에서의 분기 그래프(Bifurcation Graph)를 이용하여 이루어진다. 위상 공간 방법에서 가장 기본이 되는 것은 수치 적분이다. 수치 적분을 이용하여 여러 초기값에서의 비선형 미분방정식의 해를 그린 것을 위상 궤적(Phase Trajectory)이라고 하고 이런 위상 궤적들을 모은 그래프를 위상 궤적 선도(Phase Portrait)이라고 한다. 이 위상 궤적 선도에서 몇 가지 특징적인 모양을 볼 수 있는데 가장 대표적인 것이 고정점(Fixed Point)과 닫혀진 원형 궤적(Closed Orbits)이다.

고정점은 평형점(Equilibrium Point), 또는 정상 상태값(Steady Value)이라고도 하는데 위상 공간 그림에서 각 궤적이 불리우는 것으로 수학적으로는 $f(x^*)=0$ 을 만족하는 것이며, 닫혀진 원형 궤적(Closed Orbits)은 주기적인 해를 가지는 것으로 수학적으로는 어떤 $T>0$ 에 대해 $x(t+T)=x(t)$ 를 만족하는 것이다.

이 고정점과 닫혀진 원형 궤적이 위상 궤적 선도를 통한 비선형 미분방정식의 정성적 해석에서 중요한 이유는 이 고정점과 닫혀진 원형 궤적의 안정도가 밝혀지면 그 근처에서의 위상 궤적을 추정할 수 있다는 것이다. 즉, 해석하고자 하는 범위에서 시스템의 고정점과 닫혀진 원형 궤도를 모두 알 수 있다면 그 범위의 초기값에서 시작하는 시스템이 발산할 것인지 또는 안정화될 것인지를 알 수 있다.

고정점의 안정도(Stability)는 각 고정점에서의 자코비안(Jacobian)을 구하여 특이값(Eigenvalue) 해석을 행함으로써 알 수 있다. 이렇게 구한 각 고정점의 안정도는 비선형 방정식의 중요 매개변수(Parameter)에 의해 변화 하게 되며 그 위치 또한 매개변수에 의해 변화 한다. 매개변수에 대한 각 고정점의 위치와 안정도 변화를 그래프로 그린 것을 분기 그래프(Bifurcation Graph)라고 한다.

분기 그래프는 제어 변수(Control Parameter)에 따라 시스템의 물리적인 거동을 판별할 수 있는 중요한 도구가 되며 각 고정점이 제어변수에 따라 존재하거나 없어지게 되는 안장점 분기(Saddle-Node Bifurcation), 고정점의 안정도가 바뀌게 되는 제한이동 분기(Transcritical Bifurcation), 물리적인 대칭관계에서 나타나는 Pitchfork 분기, 또 제어변수에 따라 제한원(Limit Cycle)이 나타나는 호프 분기(Hopf Bifurcation) 등이 있다.

3.1 PD 제어시의 해석

무차원화된 식으로 부터 고정점(fixed point)를 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{(\varepsilon - x_1)^2}{(1 - \gamma x_1)^2} - \frac{(\varepsilon + x_1)^2}{(1 + \gamma x_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{식 8})$$

이라고 하면

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ OR } \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \end{pmatrix} \quad (\text{식 9})$$

각 고정점에서의 Jacobian 은 다음과 같다.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\varepsilon(\varepsilon\gamma - 1) & -4\xi\varepsilon \end{pmatrix}; (\tilde{x}^*, \hat{x}'^*) = (0, 0) \quad (\text{식 10})$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon\gamma - 1)} & -\frac{4\xi\varepsilon}{(\varepsilon\gamma - 1)} \end{pmatrix}; (\tilde{x}^*, \hat{x}'^*) = (\pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}, 0) \quad (\text{식 11})$$

위와 같은 Jacobian 에서 특이치(Eigenvalue)를 구하여 각 고정 점의 안정도를 검사해보면, 원점에 위치하는 고정 점은 $\varepsilon=1/\gamma$ 을 중심으로 안정 고정점(Stable fixed point)에서 불안정 고정점(Unstable fixed point)으로 변환된다는 알 수 있다. 즉 $\varepsilon=1/\gamma$ 에서 제한 이동 분기가 일어난다. ε 에 따라 달라지는 상태공간 그래프를 [Fig 2] [Fig 3]에 제시 하였다.

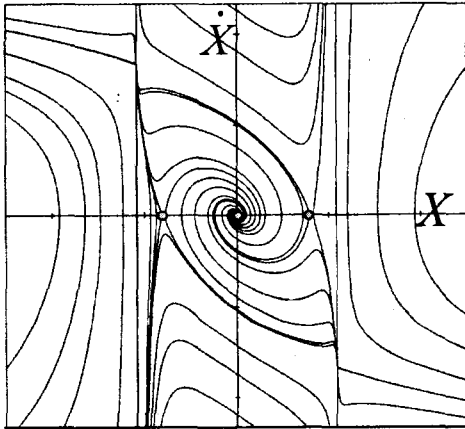


Fig. 2 Phase portrait of PD controlled Stable System which have no sensor error

[Fig.2]는 $\varepsilon=0.6$ ($\varepsilon < 1/\gamma$) 일 경우의 상태공간 그래프이다. 이 그림에서 보듯 원점에서 안정 고정점을 가지게 되고 원점을 중심으로한 타원모양의 상태공간 영역에서 초기값을 가지는 경우에는 원점으로 수렴하게 되고 원점에서 안정화되게 된다. 이 안정화 영역은 비례제어제인의 무차원수인 ε 와 미분제어제

인의 무차원수인 ξ 에 의해 결정된다. 특히 비례제어제인의 무차원수인 ε 은 불안정 고정점의 위치와 함수관계를 가지게 된다.

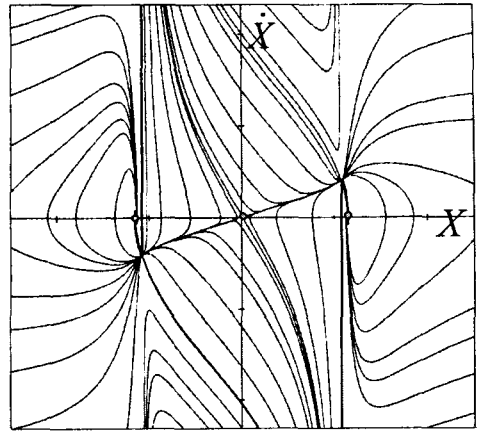


Fig. 3 Phase portrait of PD controlled Unstable System which have no sensor error

[Fig 3]는 $\varepsilon=1.2$ ($\varepsilon > 1/\gamma$)의 경우의 상태공간 그래프이다. 이 경우에는 원점에서 불안정 안장고정점(Unstable Saddle Fixed Point)을 가지고 $x^* = \pm\sqrt{\varepsilon/\gamma}$ 에서 안정고정점을 가지게 된다. 이 안정고정점은 로터가 움직일수 있는 범위 밖에 존재하게 되므로 물리적으로는 로터가 백업베어링에 닿아서 제어가 되지 않게 된다.

이 고정점의 변환을 나타낸 Bifurcation 그래프가 [Fig. 4]에 나타나있다.

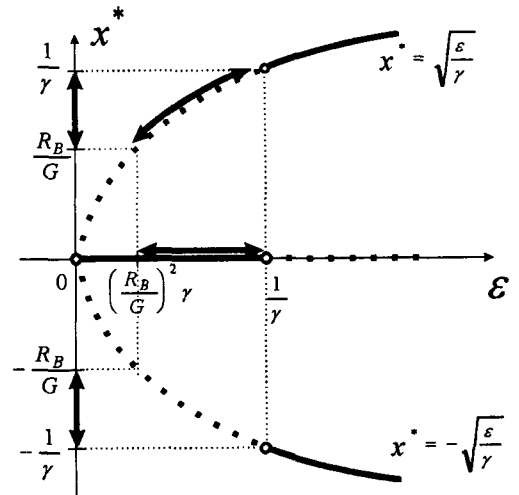


Fig. 4 Bifurcation Graph of PD controlled System which have no Sensor error

[Fig. 4]은 안정고정점을 실선으로 나타내고 불

안정 고정점은 그림에서 점선으로 나타내었다.

먼저 비례게인의 무차원화 변수인 ε 가 중요매개 변수가 된다. $\varepsilon < 1/\gamma$ 인 경우에는 원점에서 안정고정점을 가지게 되고 $x^* = \pm\sqrt{\varepsilon/\gamma}$ 에서 불안정 고정점을 가지게 된다. ε 의 값이 $1/\gamma$ 보다 커지게 되면 Transcritical 분기가 일어나게 되고 원점은 불안정 안정 고정점이 되고 불안정고정점이던 $x^* = \pm\sqrt{\varepsilon/\gamma}$ 은 안정고정점이 된다. 하지만 위에서 언급했듯 이때의 안정고정점의 위치는 물리적으로는 기본값의 좌우쪽에 있기 때문에 제어가 불가능한 범위에 있게 된다. 따라서, ε 가 $1/\gamma$ 보다 작아야 한다. 이 값이 ε 의 상한값(Upper Bound)가 된다. 또, 로터의 중심이 실제로 움직일 수 있는 변위는 로터가 액츄에이터에 부딪혀서 자기 베어링이 파손되는 것을 막기 위한 백업 베어링에 의해 구속되게 된다. 그런데 ε 이 작아질수록 불안정 고정점이 중심에 가까워지게 되는 것을 [Fig.4]으로 부터 알 수 있다. 만약 이 불안정 고정점이 백업베어링으로 한계지워지는 영역 내부로 들어오게 되면 로터가 가질 수 있는 변위범위 내부에서 상태값(State value)가 발산하게 되며 시스템의 선형화 가정이 깨어지게 된다. 결국 불안정 고정점이 백업베어링 외부에 위치하도록 ε 을 정하여야 하며 여기에서 ε 의 하한값(Lower Bound)이 결정된다. 이 하한값은 백업베어링의 내경을 R_B 라고 할때 $(R_B/G)^2 \cdot \gamma$ 이 된다. 즉 ε 의 상한과 하한이 결정된다. 따라서 백업 베어링의 한계안에서 분산식 PD 제어를 이용하여 제어를 구성할때의 설계변수 ε_b G 에 따른 비례게인 K_p 의 범위가 제한받게 된다.

따라서 ε 은 다음과 같은 범위를 가지게 되고,

$$\left(\frac{R_B}{G}\right)^2 \gamma \leq \varepsilon < \frac{1}{\gamma} \quad (\text{단, } \varepsilon = \frac{I_b}{K_p \cdot G}) \quad (\text{식 12})$$

이것을 다시 비례게인 K_p 에 대한 식으로 고쳐 쓰면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\frac{I_b \cdot \gamma}{G} < K_p \leq \frac{G \cdot I_b}{R_B^2 \gamma} \quad (\text{식 13})$$

이것으로부터 자기력 함수식을 선형화 시켜서 구한 (식 5)에 대입하면 선형화 자기력의 등가 강성 항의 범위가 결정되게 된다.

3.2 PD 제어시 Sensor 부의 설치오차가 있을 경우의 해석

센서의 설치오차 또는 전자부의 오차 때문에 센서가 가르키는 중심이 실제 자기력의 평형점보다 Δ (delta) 만큼의 오차를 가진다고 하면 무차원화 한

운동 방정식 (식 7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{x}'' = \left(\frac{(\varepsilon - (\tilde{x} - \delta) - \xi \tilde{x}')^2}{(1 - \gamma \tilde{x})^2} - \frac{(\varepsilon + (\tilde{x} - \delta) + \xi \tilde{x}')^2}{(1 + \gamma \tilde{x})^2} \right) \quad (\text{단, } \delta = \Delta/G) \quad (\text{식 14})$$

이제 위의 식으로부터 고정점(Fixed Point)를 계산하면 $f(\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = (0,0)$ 으로부터 다음과 해가 얻어진다.

$$(\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = \left(\frac{\delta}{1 - \varepsilon \gamma}, 0 \right) \quad (\text{식 15})$$

$$(\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = \left(\frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\varepsilon/\gamma}}{2}, 0 \right) \quad (\text{식 16})$$

각 고정점의 자코비안(Jacobian)은 계산하면 다음과 같다.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\varepsilon(\varepsilon\gamma - 1)^3}{\{(\varepsilon\gamma - 1) - \delta\gamma\}\{(\varepsilon\gamma - 1) + \delta\gamma\}} & \frac{-4\varepsilon(\varepsilon\gamma - 1)^2 \xi}{\{(\varepsilon\gamma - 1) - \delta\gamma\}\{(\varepsilon\gamma - 1) + \delta\gamma\}} \end{pmatrix}$$

$$\text{단, } (\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = \left(\frac{\delta}{1 - \varepsilon \gamma}, 0 \right) \text{ 일 경우} \quad (\text{식 17})$$

$$(\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = \left(\frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\varepsilon/\gamma}}{2}, 0 \right) \text{ 일때의 Jacobian 은}$$

부록에 실었다.

각 ε 의 값에 대한 위상 궤적 선도가 [Fig 5~7]에 나타나 있다.

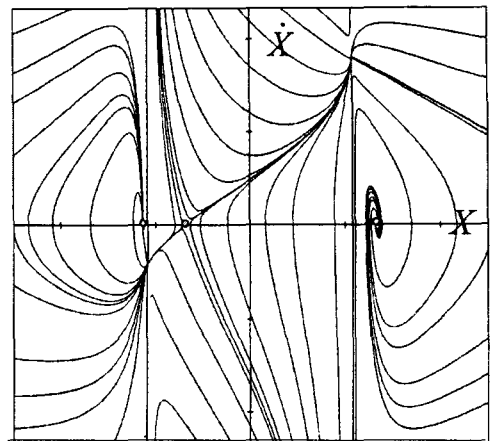


Fig. 5 Phase Portrait of PD Controlled System which have the sensor error ($\varepsilon=1.4$)

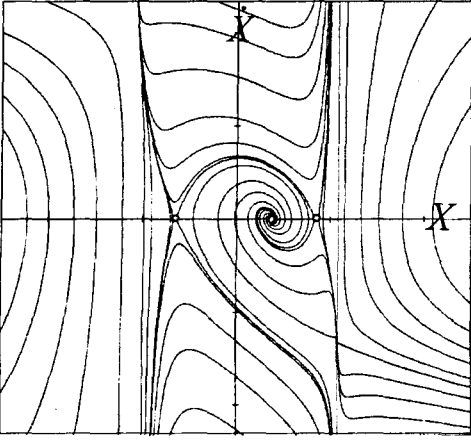


Fig. 6 Phase Portrait of PD Controlled System which have the sensor error ($\epsilon=0.5$)

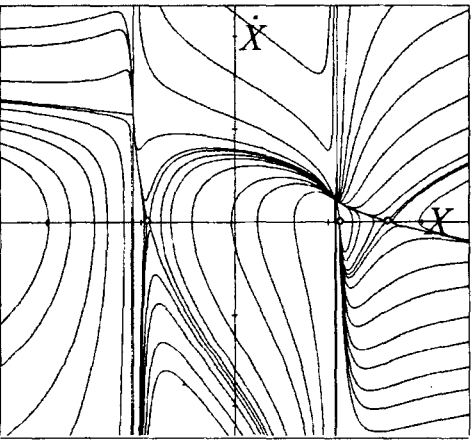


Fig. 7 Phase Portrait of PD Controlled System which have the sensor error ($\epsilon=0.95$)

[Fig.8]에서 안정고정점은 실선으로 불안정 고정점은 점선으로 표시하였다.

센서의 오차가 없는 경우와 마찬가지로 각 고정점은 ϵ 의 값에 따라 안정도가 변화하는 제한이동분기 (Transcritical Bifurcation)를 일으킨다. 그러나 이 경우에는 센서의 오차가 있을경우와 달리 δ 에서 시작하는 고정점에 해당하는 그래프가 직선이 아니라 곡선으로 나타나게 되며 두 곡선이 만나게 되는 점 C와 점 D에서 각각 안정도가 바뀌게 된다. 이 점 C와 점 D의 좌표는 다음과 같다.

$$C = (\epsilon, x^*) = \left(\frac{1-\delta}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right) \quad (\text{식 } 18)$$

$$D = (\epsilon, x^*) = \left(\frac{1+\delta}{\gamma}, -\frac{1}{\gamma} \right) \quad (\text{식 } 19)$$

만약 ϵ 이 $(1/\gamma - \delta)$ 보다 큰값을 가지게 되면 x 의 안정고정값이 $1/\gamma$ 보다 크게 되며 이것은 물리적으로는 안정한 평형점이 로터가 움직일수 있는 범위를 벗어나게 되므로 로터가 백업베어링에 의해 제한되어 있지 않으면 자기베어링의 액츄에이터에 접촉하게 된다. 따라서, ϵ 은 센서의 오차가 없는 경우의 한계보다 더 작은 $\epsilon = (1/\gamma - \delta)$ 값에서 상한값을 가지게 된다.

그러나 이 상한값은 백업 베어링에 의해 로터의 움직일수 있는 범위가 구속되게 되면 더 작은 다른 값에서 상한값을 가지게 된다. 즉 [Fig.8]에서 보듯이 백업베어링의 반지름을 R_B 라고 하면 만약 안정고정점 x^* 가 반지름을 무차원화한 R_B/G 보다 큰값을 가지게 되면 로터는 백업 베어링 내경에 접촉하게 될 것이다. 따라서 ϵ 은 [Fig.8]에서 표시된 B 값보다 작은 값을 가져야 한다. B 값은 다음과 같다.

$$B = \epsilon = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{G \cdot \delta}{R_B} \right) \quad (\text{식 } 20)$$

또한 불안정 고정점이 R_B 의 바깥쪽에 있어야 하므로 ϵ 은 [그림]에서 표시된 A 값보다는 더 큰 값을 가져야 한다. A 값은 다음과 같다.

$$A = \epsilon = \frac{\gamma \cdot R_B (G \cdot \delta + R_B)}{G^2} \quad (\text{식 } 21)$$

따라서 백업 베어링 내부에서 분산식 제어기로 제어가 되기 위해서는 제어변수 ϵ 이 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{G \cdot \delta}{R_B} \right) < \epsilon < \frac{\gamma \cdot R_B (G \cdot \delta + R_B)}{G^2} \quad (\text{식 } 22)$$

$$\left(\text{단, } \epsilon = \frac{I_b}{K_p \cdot G} \right)$$

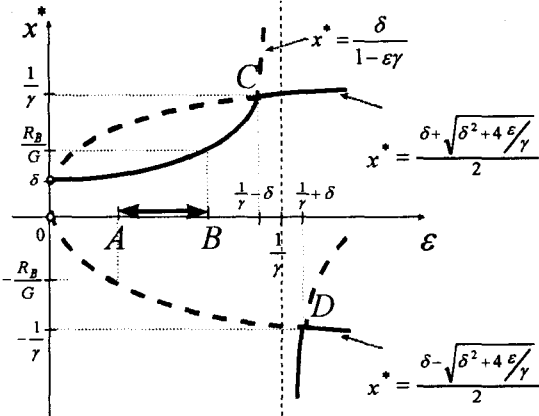


Fig. 8 Bifurcation Graph of PD Controlled System which have a Sensor Error

4. 결론

- 1) 자기 베어링의 비 선형 운동방정식을 위상공간에서의 위상궤적선도(Phase Portrait)으로 직접 고찰함으로써 자기베어링 시스템의 정성적인 성질을 해석하였다.
- 2) 위상궤적그림의 해석에서 안정고정점(Stable Fixed Point)과 불안정 고정점(Unstable Fixed Point)을 찾아내었으며, 이 고정점 들의 위치를 ϵ 에 따라 그래프로 나타낸 분기 그래프(Bifurcation graph)를 제시 하였다. 자기베어링 시스템은 무차원 설계변수인 ϵ 에 따라 각 고정점의 안정도가 바뀌는 제한이동 분기(Transcritical Bifurcation)가 일어난다.
- 3) 분기 그래프의 해석에서 무차원수 ϵ 은 백업베어링의 반지름에 의해 제한받게 된다. 따라서 백업 베어링은 단순히 로터와 액츄에이터의 충돌 방지뿐만이 아니라 베어링 내경내에서 선형 가정을 보장하는 역할을 하게 되므로 백업 베어링의 반지름과 자기 베어링과의 동심도는 중요한 설계 변수가 된다.
- 4) 무차원수 ϵ 은 $I_b/(K_p G)$ 와 같이 나타나며 위 결과에서 부터 자기베어링을 이용한 로터 지지 시스템의 주요 설계 변수인 기초 간격(Basic Gap)과 바이어스 전류(I_b)가 결정 되면 시스템에서 소프트웨어적으로 조정할 수 있는 비례게인(K_p)의 값은 제한을 받게 된다. 즉 시스템이 가질 수 있는 강성은 제한을 받게 된다.

5. Reference

1. F.Joseph Keith, Ronald D.Williams, Paul E.Allarie, "Digital control system design for Active Magnetic Bearings," Rotating machinery and Controls Industrial Research Program, Report No UVA/643092/MAE88/375 ,May,1988
2. D.C.Han,I.B.Jang,and S.C.Jung, "A Study on the PID Controlled Magnetic Bearingof a Rotor System," ASIA-Pacific Vibration Conference, Kitakyushu, pp.1020-1025, November 1993.
3. A.C.Lee, Y.H.Fan, "Decentralized PID Control of Magnetic Bearing in a Rotor System," 5th International Magnetic Bearings, Kanazawa, Japan, August,1996
4. G.Schweizer, R.Lange, "Characteristics of a Magnetic Rotor Bearing for Active Vibration Control," IMechE, C239/76, pp301-306, 1976.

5. J.D.Knight, Z.Xia, E. McCaul, H.Hacker,Jr, "Determination of Forces in a Magnetic Bearing Actuator: Numerical Computation With Comparison to Experiment," Transaction of the ASME, Vol.114,October 1992
6. H.M.Chen, D.Wilson, P.Lewis, J.Hurley, "Stability Analysis for Rotors Supported by Active Magnetic Bearings," 2nd International Symposium on Magnetic Bearing, July 1990, Tokyo, Japan.
7. Maslen,E.H.,and Lefante, V.S., "Transfer Function Zeros in Noncollocated Flexible Rotor Models," Proceedings of the 3rd International Symposium on Magnetic Bearings, 1992,pp242-252
8. D.W.Shin,S.J.Liu,J.W.Kim, "Design of Application of a Collocated Capacitance Sensor for Magnetic Bearing Spindle," 3rd International symposium on Magnetic Suspension Technology, December 1995.

APPENDIX

$$(\tilde{x}^*, \tilde{x}'^*) = \left(\frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma}}{2}, 0 \right) \text{의 경우의 Jacobian}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & B \end{pmatrix} \text{이라고 하면 } A, B \text{는 다음과 같다.}$$

$$A = \left(16\gamma(8\delta^2 - 64\epsilon^2 \mp 8\delta\sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma} + 32\epsilon/\gamma - 16\delta^2\epsilon\gamma + 32\epsilon^3\gamma \mp 16\delta\epsilon\sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma}\gamma + 40\delta^2\epsilon^2\gamma^2 \pm 24\delta\epsilon^2\sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma}\gamma^2 + 8\delta^4\epsilon\gamma^3 \pm 8\delta^3\epsilon\sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma}\gamma^3 \right) / \left((2 - \delta\gamma \mp \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma})^3 (2 + \delta\gamma \pm \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma})^3 \right)$$

$$B = \frac{32\epsilon(2 - 2\epsilon\gamma - \delta^2\gamma^2 \mp \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma}\gamma^2)\xi}{\left(-2 + 2\delta\gamma \pm \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma} \right)^2 \left(2 + 2\delta\gamma \pm \sqrt{\delta^2 + 4\epsilon/\gamma} \right)^2}$$