

유전알고리즘을 이용한 μ 제어기 설계

μ -Controller Design using Genetic Algorithm

기 용 상 , 안 병 하(광주과학기술원 기전공학과)

Yong Sang Kee , Byung Ha Ahn(K-JIST)

ABSTRACT

μ theory can handle the parametric uncertainty and produces more non-conservative controller than H_∞ control theory. However an existing solution of the theory, $D-K$ iteration, creates a controller of huge order and cannot handle the real or mixed real-complex perturbation sets. In this paper, we use genetic algorithms to solve these problems of the $D-K$ iteration method. The Youla parameterization is used to obtain all stabilizing controllers and the genetic algorithms determines the values of the state feedback gain, the observer gain, and Q parameter to minimize μ , the structured singular value, of given system. From an example, we show that this method produces lower order controller which controls a real parameter-perturbed plant than $D-K$ iteration method.

Keywords : μ -Synthesis, Structured Singular Value, Robust Stability, Robust Performance, Real Perturbations, Genetic Algorithm

1. 서론

오랫동안 불확실한 플랜트(uncertain plant)에 대한 페루프 안정성과 성능을 보장하는 제어기 설계에 대해 많은 연구가 있었고 그 중 대부분이 H_∞ 문제에 치중되어 왔다. 하지만 많은 문제들이 모델 불확실성(model uncertainty)에 있어서 비구조적(unstructured)이기 보다는 구조적(structured)특성을 보이기 때문에 비구조적 불확실성을 다루는 H_∞ 제어기가 시스템의 성능을 제약할 수 있음이 알려져 왔다.[6],[7]

μ 제어이론은 구조적 불확실성을 다룰 수 있으므로 이러한 단점을 극복할 수 있다. 하지만 μ 이론은 아직까지 최적의 제어기를 찾는 알고리즘이 나와있지 않으며, 현재 $D-K$ 반복계산법이 가장 널리 사용되고 있다. 이 방법은 두 변수(D, K)중 한 쪽을 고정시키고 나머지 변수를 최적화시키는 방법을 반복적으로 수행하여 제어기를 구하는데, 제어기의 차수가 과도하게 커지는 단점이 있다.

또한 이 방법은 섭동(perturbations)을 나타내는 Δ 블럭이 복소섭동(complex perturbations)일 경우에

만 가능하다. 그러나 플랜트 매개변수에 대한 섭동은 실(實)섭동(real perturbations)에 가깝기 때문에 매개변수 섭동이 있는 시스템에 대한 제어기를 구하기 위해서는 실섭동이 고려되어야 한다. $D-K$ 반복계산법은 복소섭동을 가정하므로 실섭동에 대한 문제를 다룰 수 없다.

본 논문에서는 $D-K$ 반복계산법의 두가지 문제, 즉 제어기의 차수가 과도하게 커지는 점과 실섭동 문제를 다룰 수 없음을 해결하기 위해 유전알고리즘을 사용하여 μ 제어기를 설계하는 방법을 보이고자 한다. 내부적으로 안정한(internally stable)제어기를 얻기 위해 Youla Parameterization을 이용하였으며 상태회환과 추정기 이득 및 Q -Parameter값을 유전알고리즘으로 결정하였다. 실섭동에 대한 시스템의 구조적 특이값을 구하기 위해 MATLAB의 μ -Toolbox를 사용하였다. 예제를 통해 본 방법의 타당성을 알아 보았으며 실제로 $D-K$ 반복계산법에 비해 상당히 작은 차수의 제어기로도 실섭동에 대한 μ 제어기를 구할 수 있었다.

2. μ 제어이론

2.1 구조적 특이값 (Structured Singular Value)

선형 제어시스템 설계의 특징 가운데 하나는 제어기의 설계가 유한차수(finite dimensional)이면서 선형으로 모델링된 시스템을 대상으로 이루어진다는데 있다. 하지만 실제 시스템과 공칭모델(nominal model)사이에는 상당한 차이가 있을 수 있으므로 실제 시스템에 적용되는 제어기의 안정성과 성능을 평가하기 위해서는 어떤 식으로든 이러한 모델링 오차, 또는 모델 불확실성(model uncertainty)을 정량화할 필요가 있다. 모델 불확실성은 크게 구조적 불확실성(structured uncertainty)과 비구조적 불확실성(unstructured uncertainty)으로 표현되는데, 전자는 후자에 비해 시스템의 불확실성을 더 정확히 표현한다. μ 제어이론에서는 이러한 형태의 섭동을 다루며 이와 관련된 구조적 특이값(μ)은 다음과 같이 정의된다. [1] (Fig. 1 (a) 참조)

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in B_{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

$$B_{\Delta} = \{\Delta \in \underline{\Delta}, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$$

$$\underline{\Delta} = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

S, F : nonnegative integers
 r_i, m_j : positive integers
 $I_{r_i} = I^{r_i \times r_i}$
 $\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n$ (1)

일반적으로 구조적 특이값을 정확히 구할 수는 없지만 상한치와 하한치는 다음과 같이 구해진다.[6]

$$\max_{U \in \underline{U}} \rho(UM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \underline{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

$$\underline{U} = \{U \in \underline{\Delta} : UU^* = I_n\}$$

$$\underline{D} = \{\text{diag}[D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1}, I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0\}$$

(2)

2.2 견실안정성 및 견실성능(Robust Stability and Robust Performance)

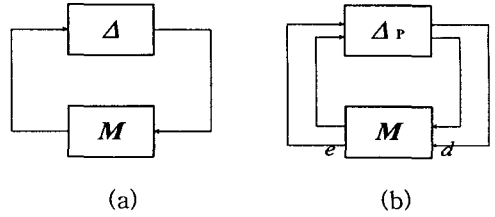


Fig. 1 : μ Analysis Framework

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1/\beta, \Delta \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$\mathbb{Z} = \{\Delta \in \mathcal{RH}_{\infty}, \Delta \in \underline{\Delta}\}$$

(\mathcal{RH}_{∞} : real-rational, proper, stable transfer mat.)

앞서 정의된 μ 를 이용하고 (3)을 가정했을 때 Fig. 1과 같은 시스템의 견실안정성과 견실성능은 다음과 같이 정량적으로 구할 수 있다[3].

[견실안정성] : (3)을 만족하는 Δ 에 대해 Fig. 1(a)에 나타난 시스템은 (4)를 만족시킬 때 내부적 안정성(internal stability)이 보장된다.

$$\sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq \beta, \quad M \in \mathcal{RH}_{\infty} \quad (4)$$

Fig. 1(b)에서 Δ_P 는 M 의 매개변수변동을 나타내는 Δ 외에 외부 입출력에 대한 섭동을 추가한 것으로 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta \in \underline{\Delta}, \Delta_F \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d} \right\} \quad (5)$$

[견실성능] : Fig. 1(b)를 $F_u(M, \Delta)$ (upper Linear Fractional Transformation)로 나타내면 (3)을 만족하는 Δ 에 대해 (6)을 만족시킬 때 이 시스템은 내부적으로 안정하며 $\|F_u(M, \Delta)\|_{\infty} \leq \beta$ 이다.

$$\sup_{\omega} \mu_{\Delta_P}(M(j\omega)) \leq \beta, \quad M \in \mathcal{RH}_{\infty} \quad (6)$$

2.3 μ 제어기 설계 (D - K 반복계산법)

견실성능을 보장하는 μ 제어기의 설계는 아직까지 완전한 해법이 나와있지 않은데 현재까지 가장 많이 쓰이고 있는 것은 D - K 반복계산법이다. 이 방법은 (2)에서 μ 의 상한치공식을 이용하며 다음의 식을 최소화하는 것이 목적이다.[6] (Fig. 2 참조)

$$\sup_{\omega} \inf_{D_{\omega} \in \underline{D}} \bar{\sigma}[D_{\omega} F(N, K)(j\omega) D_{\omega}^{-1}] \quad (7)$$

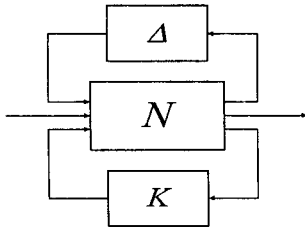


Fig. 2 : μ Synthesis Framework

$$D_\omega = \text{diag}(d_1^\omega I, \dots, d_{F-1}^\omega I, I) \in \underline{D}$$

(7)은 D_ω 와 K 의 함수로써 nonconvex 형태임이 알려져 있으며[6] 따라서 전역최적치(global optimum)를 구하기는 어렵다. D - K 반복계산법에서는 (7)을 최소화하기 위해 D_ω 를 고정시킨 상태에서 H_∞ 제어를 구한 다음, 제어를 포함하는 시스템에 대해 μ 의 상한치를 최소화하는 D 를 구한다. 이 값과 이전 D_ω 와의 곱에 대해 곡선 맞춤(curve fitting)을 하여 새로운 스케일링 행렬 D_ω 를 구한다. 이 과정은 만족할 만한 μ 값을 얻을 때까지 반복된다. 이 방법은 각 단계에서 구해진 스케일링 행렬 D_ω 가 모두 곱해지므로 최종적으로 구해진 제어기의 차수가 대단히 커질 수 있다는 단점이 있다.

3. 유전알고리즘을 이용한 μ 제어기 설계방법

3.1 유전알고리즘

유전알고리즘은 적자생존의 자연선택 원칙과 유전학에 기반을 둔 탐색방법이다. 유전알고리즘은 문제에 대한 가능한 해들을 염색체(chromosomes)로 표현하며 여러 세대(generation)동안 선택(selection), 교배(crossover), 돌연변이(mutation) 등의 연산을 반복하여 좋은 유전인자를 가지는 염색체가 선택되도록 변형하는 과정에서 원하는 해를 얻는다. 이 방법은 기존의 수학적 최적화기법과는 여러 면에서 다른 특성을 가지고 있다. 특히 목적함수 또는 제약조건이 불연속적이거나 정성적인 것들도 다룰 수 있으며 전역적 최적값에 접근할 수 있다.

3.2 Youla Parameterization

μ 제어기를 구하기에 앞서 먼저 공칭 플랜트(nominal plant)를 고려한 전체 시스템을 내부적으로 안정화시키는 제어기의 조건을 구해야 한다. Youla

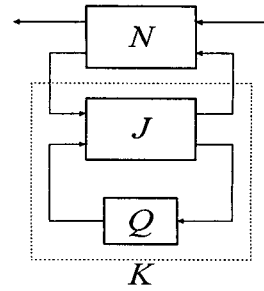


Fig. 3 : Q -Parameterization diagram

Parameterization은 이러한 조건을 만족시키는 모든 제어기를 Q -Parameter가 포함된 형태로 표현한다.(Fig. 3 참조)

Fig. 3에서 플랜트 N 을 다음식으로 나타내면

$$N = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

전안정화제어기(all stabilizing controllers) K 는 다음과 같이 표현된다.[5],[6]

$$K = F(J, Q), \quad Q \in \mathcal{RH}_\infty \quad (9)$$

$$J = \begin{bmatrix} A + B_2F + HC_2 + HD_{22}F & -H & B_2 + HD_{22} \\ F & 0 & I \\ -(C_2 + D_{22}F) & I & -D_{22} \end{bmatrix}$$

위 식에서 상태궤환이득 F 와 추정기이득 H 는 각각 $A+B_2F$ 와 $A+HC_2$ 를 안정화시키는 임의의 값이다.

3.3 μ 제어기 설계

이제 유전알고리즘을 통해 μ 제어기를 구하기 위해 위에서 언급한 세가지 변수, 즉 Q, F, H 를 유전알고리즘의 개체(individual)로 삼는다. 이 세가지 값들은 먼저 각각의 안정화 조건을 만족시켜야 하므로 유전알고리즘의 초기 세대에서 이러한 조건들을 만족시키도록 목적함수(fitness function)를 다음과 같이 설정한다.

$$\text{Min } f = \max \{ \text{real}[\text{eig}(A + B_2F), \text{eig}(A + HC_2), \text{eig}(A_Q)] \} \quad (10)$$

$\text{eig}(X)$: eigenvalues of X

$$Q = \begin{bmatrix} A_Q & B_Q \\ C_Q & D_Q \end{bmatrix}$$

일단 $f < 0$ 을 만족한 개체는 각각 하나의 전안정화제

여기를 나타낸다고 볼 수 있는데 다음 세대부터 이들 각각에 대해 (10)보다 우선순위(priority)가 높은 새로운 목적함수로서 다음 식을 적용한다.

$$\inf_{G \in \mathbf{G}, D \in \mathbf{D}} \left\{ \beta \left| \frac{DF_L(N, K)D^{-1}}{\beta} - jG \right| \right. \\ \left. (I + G^2)^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}$$

$$G = \{ \text{diag} [G_1, \dots, G_n, 0I_{r_{n+1}}, \dots, 0I_{r_s}, 0I_{m_1}, \dots, 0I_{m_F}] : \\ G_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, G_i = G_i^* \}$$

위 식은 실습동일 경우의 구조적특이값 상한치이다 [3]. 다음절에서는 예제를 통해 $D-K$ 반복계산법과 유전알고리즘을 이용한 방법의 비교를 통하여 본 방식의 타당성을 확인하였다.

3.4 예제

본 예제는 인공위성의 자세제어문제[4]로서 공칭 플랜트는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{10ds + 10k}{s^2(s^2 + 11ds + 11k)} \quad (12)$$

매개변수 d, k 의 값은 각각 0.022, 0.245 로 주어져서 각각 $\pm 80\%$, $\pm 60\%$ 범위에서 변동한다고 가정한다. 외란, 센서잡음 등을 고려한 전체 시스템구성은 Fig. 4와 같으며 Δ 블럭은 다음과 같이 정의된다. (5) 참조)

$$\Delta_F = \begin{bmatrix} \delta_d I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_F \end{bmatrix}, \delta_d, \delta_k \in \mathbf{R}, \Delta_F \in \mathbf{C}^{3 \times 4} \quad (13)$$

그런데 $D-K$ 반복계산법은 (13)과 같은 형태의 섭동에 대해 μ 제어를 구할 수 없다. 일단 유전 알고리즘에 의한 제어기와 비교를 위해서 먼저 복소섭동에 대해 $D-K$ 반복계산법으로 제어기를 구한 후 (13)의 섭동 형태에 대해 이 제어기에 대한 구조적 특이값을 구하였다.

3.4.1 $D-K$ 반복계산법에 의한 제어기

5차에 걸친 반복계산결과 36차 제어기가 구해졌다. 이 제어기가 포함된 시스템의 구조적 특이값 상한치 그래프가 Fig. 5에 있으며 최대값, 즉

$$\sup_{\omega} \mu_{\Delta_F}(F_L(N(j\omega), K(j\omega))) = 1.3862 \text{이다.}$$

Fig. 6은 설계범위 내에서의 최악의 섭동중 매개변

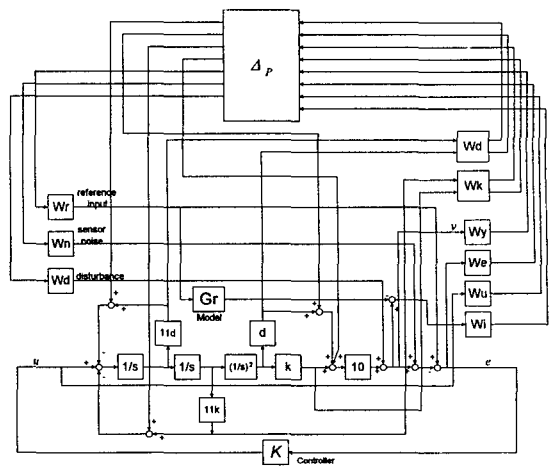


Fig. 4 : μ Control System Configuration

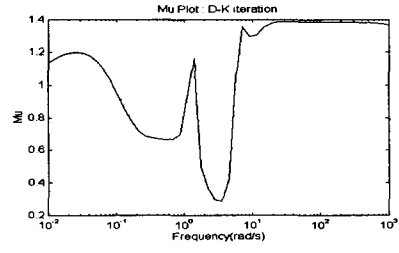


Fig. 5

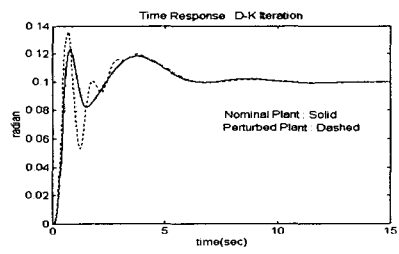


Fig. 6

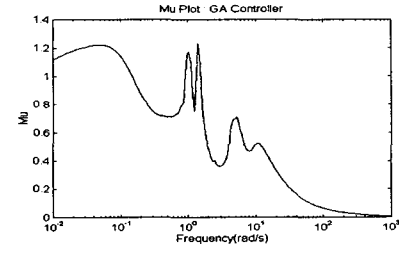


Fig. 7

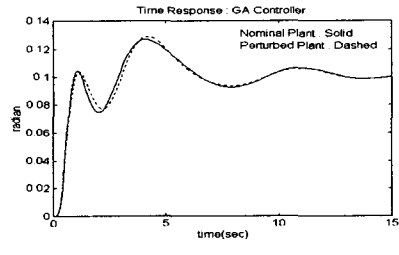


Fig. 8

수 섭동이 가해진 시스템과 공칭시스템의 계단응답 (0.1 rad) 시뮬레이션 결과이다.

3.4.2 유전알고리즘에 의한 제어기

유전알고리즘에 사용된 선택, 교배, 돌연변이 연산자는 다음과 같다.

표 : 유전알고리즘 연산자

	선택	교배	돌연변이
연산자	Tournament	Simple Arithmetic Heuristic	Uniform Boundary

3.3절에서 언급한 방법으로 13차 제어기를 구하였으며 유전알고리즘에 의해 결정된 F, H, Q 의 값은 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} -6.3930 \times 10^1 & 2.7868 \times 10^1 & -6.8062 \times 10^0 \\ -3.0822 \times 10^1 & 4.8414 \times 10^1 & 4.8947 \times 10^1 \\ -8.7325 \times 10^0 & -4.6700 \times 10^1 & -6.5535 \times 10^1 \\ -6.3784 \times 10^1 & 1.1465 \times 10^1 & -2.0208 \times 10^0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -6.8681 \times 10^1 & 2.2637 \times 10^1 & -5.5424 \times 10^1 \\ -7.4426 \times 10^1 & 1.7087 \times 10^1 & -8.3103 \times 10^1 \\ 4.9569 \times 10^1 & 9.9843 \times 10^1 & 5.2997 \times 10^1 \\ 5.6661 \times 10^0 & -5.6712 \times 10^1 & -5.3430 \times 10^1 \end{bmatrix}^T$$

$$Q(s) = \frac{9.8305 \times 10^5}{s + 3.6966 \times 10^5}$$

Fig. 7은 이 제어기가 포함된 시스템의 구조적 특이값 상한치 그래프이며,

$\sup_{\omega} \mu_{\Delta_p}(F(N(j\omega), K(j\omega))) = 1.2277$ 이다. 특히 $D-K$ 반복계산법에 비해 고주파수 영역에서의 섭동에 대한 강인성이 향상되었음을 볼 수 있다.

Fig. 8은 $D-K$ 반복계산법의 경우와 마찬가지로 공칭시스템과 섭동이 가해진 시스템에 대한 계단응답이다. Q -Parameter의 차수가 1차로 결정되었는데 이보다 높은 차수의 값으로도 구조적 특이값은 그다지 나아지지 않았다.

4. 결론

본 논문에서는 유전알고리즘을 이용하여 μ 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 내부적 안정성을 보장하기 위해 Youla parameterization을 이용하였

고 상태궤환 이득, 추정기 이득 및 Q Parameter값을 유전알고리즘으로 결정하였다. 이 방법은 실(實) 섭동에 대해서도 제어기를 구하는 것이 가능하고 기존의 $D-K$ 반복계산법에 비해 작은 차수의 μ 제어기를 얻을 수 있으며 예제를 통해 이를 확인하였다.

부록

Fig. 4에 나타난 전달함수 및 상수값은 다음과 같다.

$$W_r = \frac{0.25s + 0.5}{2s + 1}, \quad W_n = \frac{0.03s + 0.0003}{2s + 1},$$

$$W_d = \frac{0.025s + 0.05}{s + 1}, \quad W_y = \frac{2(s + 1)}{10s + 1},$$

$$W_e = \frac{500(1 + s)}{0.05s + 1}, \quad G_r = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1},$$

$$W_d = w_{\delta_d} I_2, \quad w_{\delta_d} = 0.8,$$

$$W_k = w_{\delta_k} I_2, \quad w_{\delta_k} = 0.6,$$

$$d = 0.022, \quad k = 0.245$$

참고문헌

1. A. Packard and J. Doyle, "The Complex Structured Singular Value", Automatica, Vol. 29, No. 1, pp. 71-109, 1993.
2. Christopher R. Houck, Jeffery A. Joines and Michael G. Kay, "A Genetic Algorithm for Function Optimization : A Matlab Implementation", North Carolina univ.
3. Garry J. Balas, John C. Doyle, Keith Glover, Andy Packard, and Roy Smith, "The μ -Analysis and Synthesis Toolbox", The MathWorks Inc., 1991.
4. Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems, Third Edition", Addison-Wesley, 1994.
5. J.M. Maciejowski, "Multivariable Feedback Design", Addison-Wesley, 1989.
6. Kemin Zhou, John C. Doyle and Keith Glover, "Robust and Optimal Control", Prentice Hall, 1996.
7. Steen Tjøffner-Clausen and Palle Anderson, " μ -Synthesis, A Non-Conservative Methodology for Design of Controllers with Robustness Towards Dynamic and Parametric Uncertainty", Proc. of the EURACO Workshop on Recent Results in Robust and Adaptive Control, Florence, Italy, September, 1995.