韓國精密工學會 '96年度 秋季學術大會論文集 pp.230~235

외란이 있는 동적시스템의 고유구조지정 제어 기법
Eigenstructure Assignment Method for a Dynamical System with Unknown Disturbances

최 재 원, 홍 금 식, 이 만 형, 양 경 진
(Jae Weon Choi, Keum Shik Hong, Man Hyung Lee, Kyung Jinn Yang)
부산대학교 제어기계공학과 및 기계기술연구소

Abstract
Eigenstructure (eigenvalues/eigenvectors) assignment has been shown to be a useful tool for flight control system design. In the sense of the eigenstructure assignment, the effectiveness and disturbance suppressibility of a controller depend mainly on the left eigenstructure (eigenvalues/left eigenvectors) of a system. On the other hand, the disturbance decouplability is governed by the right eigenstructure (eigenvalues/right eigenvectors) of the system. In this paper, in order to obtain a disturbance decouplable as well as effective and disturbance suppressible controller, a concurrent assignment methodology of the left and right eigenstructures is proposed. The biorthogonality condition between the left and right modal matrices of a system as well as the relations between the achievable right modal matrix and state selection matrices are used to develop the methodology. The proposed concurrent eigenstructure assignment methodology guarantees that the desired eigenvalues are achieved exactly and the desired left and right eigenvectors are assigned to the best possible(achievable) sets of eigenvectors in the least square sense, respectively. The proposed design methodology is applied to designing a lateral flight control system for an L-1011 aircraft with disturbances.
Key Words : Concurrent Eigenstructure Assignment, Flight Control System, Disturbance Decoupling, Control Effectiveness, Disturbance Suppression.

1. 서 론

단입력 시스템에 대한 고전적인 제어시스템 설계의 대표적인 목적은 되먹임 이득을 조절하여 폐루프 시스템으로 하여금 요구되는 고유치 패턴을 갖도록 하는 것인데, 이는 대체로 극점 또는 고유치(극점들로 구성된 집합은 고유치들로 구성된 집합의 부분집합이 되며 시스템이 제어 가능하고 동시에 관측 가능한 경우 두 집합은 일치)들에 의하여 시스템의 반응이 특징 지워지고 또한, 극점들에 의하여 대상 시스템의 안정성이 결정되기 때문에 극점 배치가 중요한 제어 목적이 된다. 특히, 계단입력에 대한 시스템의 오우버슈우트와 정착시간은 기본모드(fundamental mode)의 감쇠율에 의해 결정되며, 고유주파수는 시스템의 응답 속도 및 대역폭과 밀접한 관계가 있다. 그러나 시스템이 다입력이 되면 응답은 고유치들뿐만 아니라 고유벡터들에 의해서도 영향을 받는다[1]. 단입력 시스템의 경우 폐루프 시스템의 고유치들을 원하는 위치로 옮길 수 있게 하는 이득행렬은 유일하게 결정되지만, 다입력 시스템의 경우는 이득행렬이 유일하게 결정되지 않고 일반적으로 무한히 많은 해가 존재하게 되는데 이는 옮기고자하는 고유치들의 숫자보다 이득행렬에 주어지는 자유도가 많기 때문이다[2]. 따라서 이러한 여유 자유도를 시스템의 응답 형태를 원하는 형태로 바꾸는데 사용하기 위하여 고유치들뿐만 아니라 고유벡터들도 동시에 원하는 방향을 갖도록 폐루프 시스템을설계하자는 문제가 바로 고유구조(고유치/고유벡터) 지정 문제가 된다.

이와 같은 고유구조 지정 문제는 지정하고자 하는 고유벡터가 우고유벡터인지 또는 좌고유벡터인지에 따라 우고유구조(고유치/우고유벡터) 및 좌고유구조(고유치/좌고유벡터) 지정 문제로 구분되고 또한, 각각의 지정 문제는 그 해법에 따라 Sylvester 방정식 접근법 및 영공간(null space) 접근법으로 분류될 수 있다[3].

우고유구조는 시스템 내부에서 외란 또는 모드의 분리에 관계하므로 이러한 성질을 바탕으로 외란 분리 문제[4], 비행체의 모드 분리 문제[5],[6] 및 항공기 또는 유연 우주구조물의 진동 억제 문제[7],[8]등에 폭넓게 사용되어 왔다. 한편, 좌고유구조는 Zhang 등[9]에 의해 일정 유연빔(uniform flexible beam)의 진동 제어 문제에서 시스템에 입력되는 바람직하지 않은 입력 즉, 외란을 억제하기 위하여 사용을 시도한 바 있으나주요 결과에 치명적인 오류가 발견되었으며[10], Kim과 Junkins[11]는 유연구조물의 진동 제어용 작동기의 배치를 최적화함으로써 유

연구조물 시스템의 가제어성을 향상시켰는데 이때 최적화의 기준으로 좌고유구조가 활용되었다. 그러나 Zhang 등의 결과에는 제어력 전달의 효율성은 설계 과정에 고려되지 않았으며; Kim과 Junkins의 결과에는 외란 억제문제가 고려되지 않았다. 그 후, Choi 등[12],[13]에 의하여 좌고유구조는 시스템 내부에서 제어력의 상태변수에로의 효과적인 전달 능력과 외란의 억제 능력에 영향을 미친다는 사실이 규명되고, 위의 두 가지 제어 목적들을 동시에 고려할 수 있는 체계적인 좌고유구조 지정 기법들이 각각 영공간 접근법[12] 및 Sylvester 방정식 접근법[13]에 근거하여 처음으로 제안되었다.

한편, 고유구조를 이용한 제어기 설계 문제에서는 제어력(control effort)의 효과적인 전달능력, 외란의 억제 능력, 그리고 외란의 분리 능력 모두 중요하기 때문에 이들을 모두 동시에 고려할 수 있는 제어기 설계 알고리즘이 필요하다. 앞에서 언급한 바와 같이 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란의 억제 능력은 시스템의 좌고유구조의 지배를 받는 반면, 외란의 분리 능력은 시스템의 우고유구조에 의하여 결정된다. 따라서 이러한 제어 목적들을 동시에 만족시키기 위해서는 좌 및 우고유구조를 동시에 적절한 값 및 방향들을 가지도록 지정시킬 수 있는 고유구조 지정 알고리즘이 요구된다.

고유구조 지정 기법은 그 동안 비행제어시스템 설계 문제에 폭넓게 적용되어 왔는데 이는 시스템의 감쇠 특성, 정착시간 및 모드 또는 외란 분리 특성 등을 제어기 설계 과정에 직접 반영시킬 수 있는 구조를 가지고 있기 때문이다. 이러한 제어 특성들은 앞에서 언급한 바와 같이 모두 시스템의 우고유구조에 의해 지배받는다. 특히, 제어 대상이 비행체와 같이 사람이 관계하는 경우에는 승기감(flight quality) 개념도 어느 정도 제어기를 통하여 확보할 필요가 있겠는데, 이는 조종간으로부터의 효과적인 제어력 전달뿐만 아니라 비행체에 작용하는 돌풍과 같은 외란을 적절히 억제하고 동시에 그 외란을 비행체의 자세와 관련된 상태변수들로부터 분리하여 승기감과 관계없는 상태변수들(예를 들면 작동기 동력학 상태변수 등)로 배출시킴으로써 이러한 제어 목적들을 성취할 수 있다. 이러한 제어 목적들은 앞의 외란 분리 등의 특성과는 달리 시스템의 좌고유구조의 지배를 받는다. 이와 같은 사실들로부터 본 논문에서는 제어력을 상태변수들에게로 효과적으로 전달할 수 있고 동시에 외란 억제 및 분리를 가능하게 하는 비행제어시스템을 설계하기 위하여, 가중치를 설정하고 이에 따라 좌 및 우고유구조를 최소자승의 관점에서 동시에 지정할 수 있는 새로운 고유구조 지정 기법인 동시고유구조 지정 기법을 제안한다. 본 제어기법은 시스템의 폐루프 고유치는 임의의 위치에 정확하게 배치시킬 수 있게 하며, 좌 및 우고유벡터들의 방향은 각각 최소자승의 관점에서 요구하는 방향에 최대한 가깝게 배치시킬 수 있도록 보장한다.

2. 문제의 정의

다음과 같이 주어지는 시불변 다변수 가제어 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ef(t) = Ax(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k u_k(t) + \sum_{l=1}^{n} e_l f_l(t), \quad (1)$$

$$u(t) = Kx(t), \quad (2)$$

$$z_j(t) = D_j x(t), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

여기서, (i) $x \in R^N, u \in R^m, f \in R^n$, $z_1 \in R^{r_1}$, $z_2 \in R^{r_2}$, $(m \le N$ 이며 $r_1 + r_2 \le N)$는 각각 상태변수, 제어 입력, 외란 및 제어 대상이 되는 출력 벡터들이다. 그리고 b_k와 e_l은 각각 제어 입력 행렬 B의 k번째 및 외란 입력 행렬 E의 l번째의 열벡터를 나타낸다; (ii) 행렬 A, B, E, K 및 D_j는 모두 실수 값을 갖는 상수행렬들로서 적절한 차원들을 가지며; (iii) rank $B = m \neq 0$.

제어 입력 $u(t)$와 외란 $f(t)$에 대한 위 시스템의 응답을 모든 초기 조건을 0으로 가정하고 모드분해(modal decomposition)를 이용하여 상태변수 및 제어 대상이 되는 출력변수에 대한 응답을 구해보면 다음과 같다[14].

$$x(t) = \Phi \int_t^0 e^{\Lambda(t-\tau)} \{ \Psi^T Bu(\tau) + \Psi^T Ef(\tau) \} d\tau = \sum_{i=1}^{N} \phi_i e^{\lambda_i t} \Big\{ \sum_{k=1}^{m} (\psi_i^T b_k) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} u_k(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^{n} (\psi_i^T e_l) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} f_l(\tau) d\tau \Big\}, \quad (4)$$

$$z_j(t) = D_j \Phi \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} \{ \Psi^T Bu(\tau) + \Psi^T Ef(\tau) \} d\tau, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

여기서, (i) $\Phi(\Psi)$는 폐루프 시스템의 우(좌)모드행렬(right(left) modal matrix)이고, Λ는 요구되는 고유치들로 구성된 대각행렬이다; (ii) λ_i, ϕ_i 및 ψ_i는 각각 i번째 고유치, 그리고 이에 대응하는 우 및 좌고유벡터들을 나타내며, $u_k(t)$는 k번째 제어 입력이고; (iii) 행렬 $D_1 \in R^{r_1 \times N}$과 $D_2 \in r_2^N$ 는 각각 ''수직 상태변수 선택행렬"과 ''평행 상태 변수 선택행렬"이라 칭하기로 하고, D_1은 전체 상태변수들 가운데 외란이 분리되기를 원하는 상태변수들만을 선택할 수 있도록 구성되는 행렬이며 D_2는 D_1에 의해 선택되고 남은 상태변수들 가운데 모두 또는 일부를 선택할 수 있도록 구성되는 행렬이다.

먼저, 좌고유구조의 관점에서 응답 특성을 살펴보기로 한다. 위의 식 (4)에서 알 수 있듯이, 외란 입력 행렬 E의 각 열벡터들 e_l이 좌모드행렬 Ψ의 각 열벡터들 ψ_i와 수직이면 외란은 시스템의 상태

변수에 영향을 미치지 못하게 된다. 마찬가지로, 좌고유벡터 (ψ_i)들의 방향이 제어 입력 행렬 B의 각 열벡터들 (b_k)과 평행하게 되면 제어력은 가장 효과적으로 시스템의 상태변수에 전달된다. 그러므로, 제어력을 효과적으로 전달할 수 있으며 동시에 외란을 억제할 수 있는 고유구조를 성취하기 위해서는, 시스템의 좌고유벡터들을 제어 입력 행렬 B의 각 열벡터들과는 서로 평행하게 하고 동시에 외란 입력 행렬 E의 각 열벡터들과는 서로 수직이 되게 하는 공간에 속하도록 제어기를 설계하여야 한다. 만일, 행렬 E 및 B의 열벡터들의 방향이 서로 같은 경우에는 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란 억제 능력 모두를 동시에 만족시킬 수 있도록 좌고유구조를 지정하는 것은 불가능하다. 따라서 이러한 경우에는 위의 두 제어 목적중 대상 시스템에 더욱 중요한 목적에 더 가중치를 부여하여 제어기를 설계하여야 할 것이다. 여기에 대한 자세한 설명은 참고문헌 [12] 및 [15]을 참조하기 바란다.

이제, 우고유구조의 관점에서 살펴보자. 위의 식 (5)로부터 각 초기 조건에 대하여 $t \geq 0$에서 $z_1(t)$가 모든 $f(\cdot)$에 대하여 같은 값을 가지면 준 시스템은 $f(\cdot)$와 $z_1(\cdot)$의 쌍에 대하여 ''외란이 분리된다"라고 말한다. 따라서 외란 분리는 간단히 $t \geq 0$ 및 모든 $f(\cdot)$에 대하여 다음의 관계가 성립함을 의미한다[4].

$$z_1(t) = D_1 \sum_{i=1}^{N} \phi_i e^{\lambda_i t}\Big\{ \sum_{k=1}^{m} (\psi_i^T b_k) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} u_k(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^{n} (\psi_i^T e_l) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} f_l(\tau) d\tau \Big\} \quad (6)$$

즉, 식 (6)으로부터 우모드행렬 Φ의 각 열벡터(ϕ_i ; 우고유벡터)들이 행렬 D_1의 행벡터들의 일차결합으로 생성되는 부분공간의 핵(kernel)의 부분공간에 속하게 되면 준 시스템에서 외란은 분리된다. 이는 D_1에 의해 선택된 r_1개의 상태변수로부터 외란이 분리됨을 의미한다. 그러므로 외란 분리 문제를 푸는 것은 결국 시스템의 우고유구조를 적절하게 지정하는 문제와 같게 된다.

한편, D_2에 의해 결정되며 $z_2(t)$를 구성하는 r_2개의 상태변수에 대해서는 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란 억제 능력을 고려하여 설계한 좌고유구조를 최대한 보존하기 위하여, 즉, 식 (5)의 우변의 적분 량을 최대한 보존하기 위하여, 이번에는 각 우고유벡터들을 행렬 D_2의 행벡터들의 일차결합으로 생성되는 부분공간에 속하도록 지정한다.

따라서 본 논문에서는 이와 같은 제어 목적들 즉, 시스템의 좌고유구조에 의해 지배받는 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란의 억제 능력과 시스템의 우고유구조에 의해 지배받는 외란의 분리 특성 등을 설계자가 부여하는 가중치에 따라 최소자승의 관점에서 동시에 고려할 수 있는 새로운 동시고유구조 지정 기법을 개발하고 이를 L-1011 비행체의 비행제어시스템 설계에 적용한다.

3. 상태되먹임에 의한 우 및 좌고유구조 지정기법

본 장에서는 기존의 우 및 좌고유구조 지정 방법에 대하여 개별적으로 간단하게 살펴본다.

2장의 시스템 식 (1)에 상태되먹임에 의한 제어입력 식 (2)가 인가되면 전체적인 폐루프시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Ef(t). \quad (7)$$

상이한 공액복소수로 이루어진 집합 Λ를 $\{ \lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ 이라 하자. 그러면, 위의 폐루프 시스템에 대한 우 및 좌고유치 문제는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$(A + BK - \lambda_i I_N)\phi_i = 0 \quad (8)$$

$$(A + BK - \lambda_i I_N)^T \psi_i = 0. \quad (9)$$

여기서, I_N은 $(N\times N)$차원의 단위행렬이다. 시스템이 중복 고유치를 갖는 경우에 대해서도 위의 고유치 문제는 쉽게 일반화될 수 있다[16]. 따라서 본 논문에서는 식의 전개를 단순화시키기 위하여 상이한 고유치들만을 가진 시스템에 한정하여 이론을전개하기로 한다.

위의 고유치 문제들로부터 우 및 좌고유구조 지정 문제는 결국 요구되는 고유구조를 만족시킬 수 있게 하는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 문제가 된다.

우 및 좌고유구조 지정 문제를 구체적으로 기술하기 위하여 우 및 좌모드행렬을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi = [\ \phi_1,\ \phi_2, \cdots,\ \phi_i, \cdots,\ \phi_N],$$

$$\Psi = [\ \psi_1,\ \psi_2, \cdots,\ \psi_i, \cdots,\ \psi_N].$$

3.1 우고유구조 지정 기법 및 문제점

우고유구조 지정 문제는 요구되는 우고유구조 (Λ, Φ)를 얻을 수 있도록 하는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 문제이다. 문제의 기술을 위하여 다음과 같이 정의되는 행렬들을 먼저 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\ \lambda_i I_N - A \mid B\ ],$$

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ -- \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}.$$

여기서, 행렬 R_{λ_i}의 열(columns)들은 행렬 S_{λ_i}의 영공간의 기저를 이룬다. 그리고 rank $B = m$이면 행렬 R_{λ_i}의 부분행렬 N_{λ_i}의 열들은 서로 일차독립이 된다[5].

다음 정리는 요구되는 우고유구조를 생성시킬 수 있는 이득행렬 K의 존재를 위한 필요충분 조건을 제공한다.

정리 3.1[5]

집합 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$의 원소들은 상이한 공액복소수로 이루어져 있다고 하자. 그러면 폐루프 시스템에 대한 고유치 문제 $(A+BK)\phi_i = \lambda_i \phi_i$, $i=1,2,\cdots,N$를 만족하는 실수로 이루어진 $(m\times N)$차원의 이득행렬 K가 존재하기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다.

1) 집합 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$는 N차원의 복소벡터 집합 C^N에 속하고 일차독립인 집합이다.

2) 임의의 두 고유치가 $\lambda_i = \lambda_j^*$와 같이 공액복소수 관계를 가지면, 이에 대응하는 고유벡터들도 $\phi_i = \phi_j^*$와 같은 공액복소벡터 관계를 가져야 한다. 여기서, 위첨자 $(\cdot)^*$는 $(\cdot)$의 공액복소수 또는 공액복소벡터를 의미한다.

3) $\phi_i = \mathrm{span}\{N_{\lambda_i}\}$.

또한, K가 존재하고 rank $B=m$이면 이때 K는 유일하게 결정되고, 위에서 정의한 부분행렬 N_{λ_i}과 M_{λ_i}를 이용하여 구할 수 있다.

3.2 좌고유구조 지정 기법

서론에서 언급한 바와 같이 시스템의 좌고유구조는 제어력의 전달 능력과 외란의 억제 능력을 지배한다. 본 절에서는 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건을 활용한 좌고유구조 지정 알고리즘에 대하여 기술한다. 본 기법은 원하는 좌고유벡터들이 획득 가능한 부분공간에 속하게 되는 경우에는 요구되는 좌고유구조를 정확히 획득할 수 있도록 보장하며, 요구되는 좌고유벡터들이 획득 가능한 부분공간에 속하지 않게 되는 경우에는 원하는 고유치들은 정확히 성취할 수 있게 하고 좌고유벡터들은 최소자승의 관점에서 최적인 값들을 가지도록 보장한다.

정리 3.1에 따르면 획득 가능한 우고유벡터 ϕ_i^a는 부분행렬 $\{N_{\lambda_i}\}$의 열공간에 속해야 하며, 이러한 ϕ_i^a들로 우모드행렬 Φ^a를 구성하면 다음과 같다.

$$\Phi^a = [\phi_1^a, \phi_2^a, \cdots, \phi_i^a, \cdots, \phi_N^a], \tag{10}$$

그리고 ϕ_i^a 는 N_{λ_i}의 열들의 일차결합으로 주어지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i^a = N_{\lambda_i} p_i. \tag{11}$$

이때 식 (11)에서 $(m\times 1)$차원의 계수벡터 p_i를 다음과 같이 정의되는 성능지표 함수를 최소화하도록 선택하게 되면 요구되는 좌고유구조를 최적으로 성취하게 된다.

$$J = \|(\Psi^d)^T \Phi_{aug}^a P - I_N\|. \tag{12}$$

식 (12)와 같이 주어지는 성능지표 함수의 최소화 문제는 결국 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건 $\Psi^d = (\Phi^a)^{-T}$를 만족하게 하는 계수벡터를 해석적으로 구하는 문제가 된다. 식 (12)에서 $(mN\times N)$차원의 계수행렬 P와 $(N\times mN)$차원의 확장된 획득 가능한 우모드행렬 Φ_{aug}^a는 다음과 같이 구성된다.

$$P = \text{block diag}\,[p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_N], \tag{13}$$

$$\Phi_{aug}^a = [N_{\lambda_1}, N_{\lambda_2}, \cdots, N_{\lambda_i}, \cdots, N_{\lambda_N}]. \tag{14}$$

그리고 $(N\times N)$차원의 요구되는 좌고유벡터들로 구성된 요구 좌모드행렬 Ψ^d는 참고문헌 [12]에 기술된 방법에 따라 가제어성 척도 및 외란 가억제성 척도를 제어 목적에 따라 적절하게 고려하여 설정할 수 있다. 따라서 식 (12)에서 Ψ^d 및 Φ_{aug}^a는 사전에 알 수 있는 값들이 되므로 이 값들을 이용하여 Ψ^d를 가장 최적으로 만족시키는 계수행렬 P를 구할 수 있게 된다.

4.1 지정 기법의 유도

본 기법은 좌 및 우모드행렬들간의 상호 수직조건 및 획득 가능한 우모드행렬과 상태변수 선택행렬들의 관계를 활용하여 유도된다.

일반적으로 좌 및 우고유벡터들은 서로 수직인 관계를 가지므로 한쪽이 먼저 정해지면 다른 쪽도 따라서 결정된다. 이러한 이유로 두 고유벡터들을 동시에 지정하는 문제는 자체적인 모순을 가지게 된다. 본 논문에서는 이러한 모순을 해결하는 방편으로 가중치를 도입하여 최소자승의 관점에서 해를 구하는 방법을 제안한다. 이러한 해를 구하기 위하여 다음의 세 가지 조건들을 고려하자.

$$q_1[(\Psi^d)^T \Phi_{aug}^a P - I_N] = 0, \tag{15}$$

$$q_2\, D_1 \cdot \Phi_{aug}^a P = 0, \tag{16}$$

$$q_3(D_2^T \hat{R} - \Phi_{aug}^a P \cdot S) = 0. \tag{17}$$

여기서, q_i는 각 조건에 대한 가중치로서 $0\le q_i \le 1$ $(i=1,2,3)$이며 $\sum_{i=1}^{3} q_i = 1$인 관계를 가진다. 그리고 $P \in C^{mN\times N}$는 위의 세 조건들을 동시에 만족시키도록 결정되어야 할 계수행렬이다.

식 (15)으로 주어지는 첫째 조건은 요구되는 좌모드행렬 $(\Psi^d)^T$와 획득 가능한 우모드행렬 $\Phi_{aug}^a P$ 사이의 상호 수직조건을 나타낸다. 이 조건은 3.2절에서 기술한 좌고유구조 지정 알고리즘에 해당한다. 식 (16)로 표시되는 둘째 조건은 수직 상태변수 선택행렬 D_1과 획득 가능한 우모드행렬 $\Phi_{aug}^a P$ 사이의 수직조건을 나타내고 있는데, 이 조건은 D_1에 의해 선택되는 상태변수들로부터 외란을 분리해 내기 위하여 도입된 조건이다. 마지막으로 식 (17)로 표시되는 셋째 조건은 평행 상태변수 선택행렬 D_2와 $\Phi_{aug}^a P$ 사이의 평행관계를 나타내는 조건으로, D_1에 의해 선택된 상태변수들을 제외한 나머지 상태변수들에 대하여 첫째 조건에 의해 설계된 좌고유구조를 최대한 보존하기 위하여 도입한 조건이다.

여기서, 행렬 $\hat{K}$는 일차결합 계수행렬이며, $S=[\ s_1,\ s_2, \cdots,\ s_{r_2}]$는 행렬 $\Phi^{a}_{aug}F$의 각 열벡터들을 S의 각 원소 s_i를 통하여 임의로 선택할 수 있도록 구성되며 D_2의 i번째 행벡터의 전치벡터(transpose)와 같게 된다.

그러므로 위의 세 조건들이 동시에 만족되면 요구되는 고유치들은 정확히 원하는 값을 갖도록 지정되고 좌 및 우고유벡터들은 최소자승의 관점에서 가중치에 따라 최적인 방향을 가지도록 지정된다.
본 논문에서의 목표는 이와 같이 시스템의 고유치들을 정확히 원하는 곳에 지정시키며 동시에 획득 가능한 좌(Ψ^{a}) 및 우고유벡터(Φ^{a})들을 생성시킬 수 있는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 것인데, 이는 계수행렬 F 및 $\hat{K}$의 원소인 $\hat{k}_{ij}$를 구하게 되면 쉽게 계산이 되므로 F 및 $\hat{k}_{ij}$를 구하는 과정을 아래에 기술한다.

먼저, 식 (14)와 같이 주어진 계수행렬 F를 다음과 같이 벡터화한다.

$$\hat{p}=[\ p_1^T, p_2^T, \cdots, p_i^T, \cdots, p_N^T]^T. \tag{18}$$

전개 과정을 간단히 하기 위하여 한 예로서, i번째의 획득 가능한 우고유벡터에는 위의 세 조건 모두 부과되고 나머지 우고유벡터들에 대해서는 처음 두 조건만이 부과된다고 가정하면, 식 (18)에 일차결합 계수벡터 $\hat{k}_{ij}$를 포함하는 확장된 축적 계수벡터(augmented stacked coefficient vector) $\hat{p}_{aug}$는 다음과 같이 구성된다

$$\hat{p}_{aug}=[\ p_1^T, p_2^T, \cdots, p_i^T,\ \hat{k}_{i1},\ \hat{k}_{i2}, \cdots,\ \hat{k}_{ir_2},\ p_{i+1}^T, \cdots, p_N^T]^T. \tag{19}$$

$\hat{p}_{aug}$의 i번째 벡터 $\hat{p}^{i}_{aug}$는 세 가지 조건들을 동시에 만족하는 획득 가능한 우고유벡터를 결정하는데 사용된다. 여기서 $\hat{p}_{aug}$의 차원 및 원소들은 각각의 획득 가능한 우고유벡터에 부과되는 조건들의 수에 따라 확장된다.

이제 앞의 세 가지 조건들은 다음 식과 같이 간단한 형태의 식으로 표시할 수 있다.

$$T\,\hat{p}_{aug}=\eta. \tag{20}$$

여기서, $\hat{p}_{aug}\in C^{mN+r_2}$, $\eta\in R^{M(N+r_1)+r_2}$ 및 $T\in C^{(M(N+r_1)+r_2)\times(mN+r_2)}$는 이 경우에는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\hat{p}_{aug}=\ [\ p_1^T, p_2^T, \cdots, p_i^T,\ \hat{k}_{i1},\ \hat{k}_{i2}, \cdots,\ \hat{k}_{ir_2}, p_{i+1}^T, \cdots, p_N^T]^T, \tag{21}$$

$$\eta\ =\ [\ q_1\ 0 \cdots 0\ 0\ \ q_1\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0\ \ q_1\ 0 \cdots 0\ 0 \cdots 0\ \ q_1]^T, \tag{22}$$

$$T=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\Omega_1 \\ q_2 D_1 N_{\lambda_1} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} q_1\Omega_2 \\ q_2 D_1 N_{\lambda_2} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \left[\begin{array}{c|c} q_1\Omega_i & 0_{N\times r_2} \\ q_2 D_1 N_{\lambda_i} & 0_{r_1\times r_2} \\ q_3 N_{\lambda_i} & X \end{array}\right] & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \begin{bmatrix} q_1\Omega_N \\ q_2 D_1 N_{\lambda_N} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{23}$$

여기서, X는 다음과 같은 행렬을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} -q_3 I_{r_2} \\ 0_{(N-r_2)\times r_2} \end{bmatrix}_{N\times r_2}$$

식 (20)로부터 $\hat{p}_{aug}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{p}_{aug}=\ T^{+}\,\eta. \tag{24}$$

따라서 이러한 $\hat{p}_{aug}$를 이용하여 식 (15)-(17)로부터 획득 가능한 좌 및 우고유벡터들을 최소자승의 관점에서 구할 수 있게 된다.

중복 고유치들을 가지는 시스템에 대하여 $(N-1)$개의 획득 가능한 우고유벡터에 본 논문에서 제안한 세 가지 조건들이 동시에 부과되는 경우가 일반적인 경우라고 할 수 있겠는데, 이 경우에는 $\hat{p}_{aug}$, η 및 T의 차원들이 조건들에 부합되게 확장되므로 위에서 전개한 방법과 마찬가지로 일반화시킬 수 있다.

5. 결론

일반적으로 제어력의 효과적인 전달 능력과 외란의 억제 능력은 시스템의 좌고유구조에 의해 지배를 받는다. 한편, 모드 또는 외란의 분리 능력은 시스템의 우고유구조에 의해 지배를 받게 된다. 따라서 본 논문에서는 고유구조를 이용한 제어기의 설계 시에 이러한 제어 목적들을 동시에 고려할 수 있게 하는 새로운 동시고유구조 지정 기법을 제안하였다. 본 기법을 개발하기 위하여 좌 및 우모드행렬들간의 상호 수직조건 및 획득 가능한 우모드행렬과 상태변수 선택행렬들간의 관계를 수식화하여 세 가지 조건으로 나타내어 이용하였다. 본 알고리즘은 폐루프 시스템의 고유치를 원하는 임의의 위치에 정확하게 배치시킬 수 있게 하며, 동시에 좌 및 우고유벡터들의 방향은 각각 최소자승의 관점에서 요구하는 방향에 최대한 가깝게 배치시킬 수 있도록 보장한다.

본 논문의 결과는 독립된 제어기의 수가 많은 CCV(Control Configured Vehicle)-형의 비행체 또는 우주 구조물의 제어에 효과적으로 활용할 수 있을 것이며 또한, 쌍대(dual) 문제로서 독립된 센서의 수가 많은 문제의 관측기 설계에도 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 독립된 제어기의 수가 적게 주어지는 경우는 제어 목적에 부합하는 특정 모드를 지정하여 그 모드에 대하여 집중적으로 성능 향상을 실현하는 문제를 고려해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] C.-F. Lin, Advanced Control Systems Design, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1994.

[2] B. L. Stevens, and F. L. Lewis, Aircraft Control and Simulation, John Wiley & Sons, Inc.,

1992.
[3] 최재원, Control Design Methodologies Using Left and Right Eigenstructures with Applications to Flight Systems, 서울대학교 공학박사학위논문,1995년 2월.
[4] W. M. Wonham, Linear Multivariable Control: a Geometric Approach, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, pp. 86-92, 1979.
[5] A. N. Jr. Andry, E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, ''Eigenstructure Assignment for Linear Systems," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-19, No. 5, pp. 711-729, 1983.
[6] G. M. Siouris, J. G. Lee, and J. W. Choi, ''Design of a Modern Pitch Pointing Control System," to appear in the IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.
[7] W. L. Garrard, and B. S. Liebst, ''Active Flutter Suppression Using Eigenspace and Linear Quadratic Design Techniques," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, No. 3, pp. 304-311, May-June 1985.
[8] J. W. Choi, J. G. Lee, H. Suzuki, and T. Suzuki, ''Comments on ''Matrix Method for Eigenstructure Assignment: The Multi-Input Case with Application"," Journal of Guidance, Control, and Dynamics ,Vol 19, No 4, p 983, July August 1996..
[9] Q. Zhang, G. L. Slater, and R. J. Allemang, ''Suppression of Undesired Inputs of Linear Systems by Eigenspace Assignment," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 3, pp. 330-336, May-June 1990.
[10] J. W. Choi, J. G. Lee, and Y. Kim, ''Comment on ''Suppression of Undesired Inputs of Linear Systems by Eigenspace Assignment"," submitted to the Journal of Guidance, Control, and Dynamics.
[11] Y. Kim, and J. L. Junkins, ''Measure of Controllability for Actuator Placement," Journal of Guidance, Control, and Dynamics,Vol. 14, No. 5, pp. 895-902, September-October 1991.
[12] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, ' Design of an Effective Controller via Disturbance Accommodating Left Eigenstructure Assignment," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18, No. 2, pp.347-354, March-April 1995.
[13] 최재원, 이장규, 김유단, 이달호, ''Sylvester 방정식을 이용한 좌고유구조 지정 기법," 대한전기학회 논문지, 제4권, 제9호. pp 1195-1200, 1995년 9월,
[14] J. L. Junkins, and Y. Kim, Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, AIAA Education Series, Washington D.C., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1993.
[15] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, ''Eigenstructure Assignment Considering Both Modal Controllability and Suppressibility Measures," Proceedings of the 32nd SICE Annual Conference, Kanazawa, Japan, pp. 1445-1451, August 4-6, 1993.
[16] B. H. Kwon, and M. J. Youn, ''Eigenvalue-Generalized Eigenvector Assignment by Output Feedback," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 5, pp. 417-421, May 1987.
[17] S. Srinathkumar, ''Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 1,pp. 79--81, February 1978.