

# 헬리컬 기어의 냉간단조에 관한 상계해석 (II) Upper-bound Analysis for Cold Forging of Helical Gear (II)

최재찬 (부산대학교 정밀정형 및 금형가공 연구센터),  
탁성준\*, 최영 (부산대학교 대학원 기계설계공학과),  
J.C. Choi (Pusan Univ.), S.J. Tak\*, Y. Choi (Graduate School, Pusan Univ.)

## ABSTRACT

In this paper, the clamping type forging of helical gears has been investigated. Clamping type forging is an operation in which the product is constrained to extrude sideways through an orifice in the container wall. Punch is cylindrical shaped. The punch compresses a cylindrical billet placed in a die insert. As a consequence the material flows in a direction perpendicular to that of punch movement. The forging has been analysed by using the upper-bound method. A kinematically admissible velocity field has been developed, wherein, an involute curve has been introduced to represent tooth profile of the gear. Numerical calculations have been carried out to investigate the effects of various parameters, such as module, number of teeth, helix angle, friction factor and initial height of billet on the forging of helical gears.

**Key words :** Forging of Helical Gear (헬리컬 기어 단조), Clamping Type Forging (구속형 단조), Upper-bound Analysis (상계해석)

### 1. 서론

소성가공에 의해 성형된 기어는 절삭가공된 기어에 비하여 재료 및 비용절감과 강도 증가를 기대할 수 있으므로, 최근 기어 제조에서 소성가공에 의한 기어의 성형법 개발과 이에 대한 새로운 해석방법의 연구가 진행되고 있다.

헬리컬기어 성형에 관해서는 Samanta 등<sup>(1)</sup>에 의해서 스피어 기어와 헬리컬기어의 냉간압출 공정이 제시되었으며, Choi 등<sup>(2,3)</sup>은 새로운 냉간압출법을 제안하고 상계해석, 전극설계 및 금형강도를 평가하였다.

단조공정은 압출공정에 비해 기어의 치폭이 좁은 경우에도 적용하기 유리하고 생산성이 높다. 이러한 단조공정에 의한 헬리컬기어 성형에 관한 연구를 살펴보면, Dohman과 Traudt<sup>(4)</sup>는 냉간단조에 의한 헬리컬기어 성형시 금속유동과 공구하중을 슬래브법으로 해석하였다. Lange 등<sup>(5,6)</sup>은 헬리컬기어의 냉간단조를 3차원 유한요소 해석하고 변형해석 결과를 이용하여 3차원 경계요소법으로 금형변형을 해석하였다. 또한 Yang 등<sup>(7)</sup>은 반복경계조건을 이용하여 헬리컬기어의 냉간단조에 대한 3차원 유한요소 해석을 하였다.

기어를 냉간 단조에 의해 성형하기 위한 방법으로는 Fig.1과 같은 기본적인 두가지 공정으로 분류된다.<sup>(7,8)</sup>

Fig.1에서 (a)는 내부에 치형을 갖는 다이속으로 외부치형을 갖는 상부펀치를 안내하므로써 기어가 성형되는 안내형 공정(guiding type)이며, (b)는 단순 원통형 펀치에 의해 성형재료를 다이의 치형으로 성형시키는 측방 압출 방식의 구속형 공정(clamping type)이다

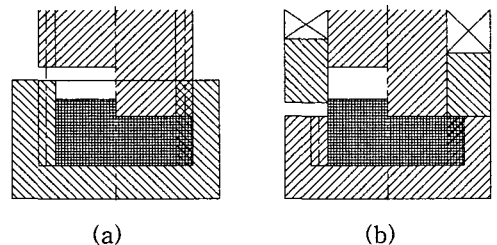


Fig.1 Die design schematics for the gear forging<sup>(7,8)</sup>

(a) guiding type (b) clamping type

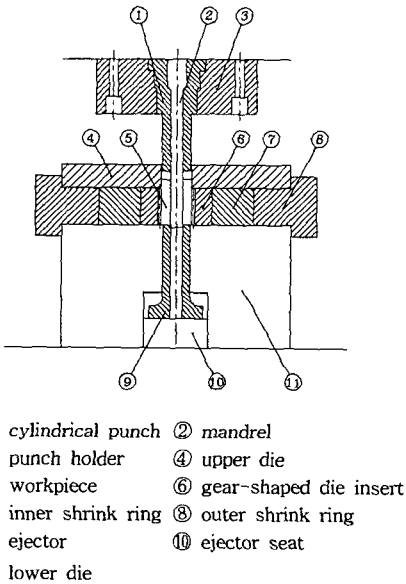
Choi 등<sup>(9)</sup>은 헬리컬기어의 안내형 단조공정에 대하여 금형구조를 제안하고 상계해석 및 실험을 수행하

였다.

본 논문에서는 원통형 펀치를 사용하여 재료가 축방의 치형부로 압출되는 유동형태를 가지는 단조공정인 구속형 공정에 대해 치형이 인벌류트 곡선인 헬리컬기어 단조에 대한 동적가용속도장을 구성하고 상계해석하였다.

## 2. 이론 해석

Fig.2는 헬리컬기어를 구속형 공정으로 냉간단조하기 위한 금형구조 개략도를 나타낸다. 구속형 단조는 Fig.2에 도시된 바와 같이 원통형 펀치가 하강함에 따라 재료가 축방의 치형부로 유동되어 간다.



지 않고 이에 대한 추가적인 회전속도는 없다. 따라서 헬릭스 각에 의해 발생하는 회전속도 성분은 ②~④영역에서만 추가된다. ②영역에 추가되는 회전속도는 반경의 제곱에 비례한다고 가정하였고 ③, ④영역에 추가되는 회전속도는 반경에 비례한다고 가정하였다. 이렇게 구성된 헬리컬기어의 구속형 단조 공정에 대한 동적가용 속도장을 Table 1에 나타낸다.

Table 1에서 영역①과 영역②, ③의 경계  $Z(r)$  은 다음의 식(1)로 나타낸다.

$$Z(r) = \begin{cases} \frac{H-\epsilon}{r_m-r_i} r + \epsilon - \frac{H-\epsilon}{r_m-r_i} r_i & @ r_i \leq r \leq r_m \\ H & @ r_m \leq r \leq r_n \end{cases} \quad (1)$$

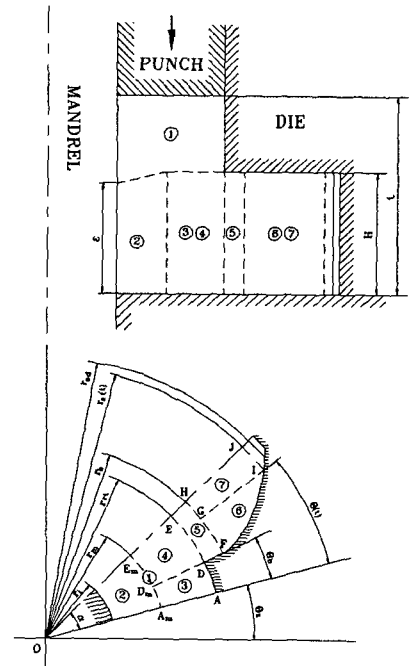


Fig.2 Schematic drawing of die set for helical gear forging

Fig.3 Assumed deformation regions of helical gear forging

이와 같은 재료유동에 대한 속도장을 표현하기 위하여, Fig.3과 같이 헬리컬기어의 반 피치를 7개의 영역으로 분할한다. 여기서  $r_m$ 과  $\epsilon$ 은 전체 에너지 소비율이 최소가 되도록 하는 반경 및 높이,  $\theta_2$ 는 입의  $z$ 에서 축직각 단면이 회전된 각도이다.

### 2.1 동적가용속도장

본 연구의 속도장은 저자의 헬리컬기어의 안내형 단조 공정에 대한 속도장<sup>(9)</sup>을 토대로 구속형 단조공정의 경계조건<sup>(10)</sup>을 만족하도록 재구성하였다.

⑤~⑦영역에서는 축방향 속도 성분  $V_z$ 는 존재하

### 2.2 상계해

각각의 영역에 대한 내부에너지 소비율과 전단에너지 소비율은 Table 1을 이용하여 수치적으로 계산된다. 마찰에너지 소비율은 Fig.3에 보인 반 피치의 변형영역에 대한 것과 대칭인 반 피치에 대한 것을 각각 계산한다. 치 한 개에 대응하는 에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_t = 2 \sum \dot{E}_p + 2 \sum \dot{E}_s + \sum \dot{E}_f \quad (2)$$

여기서,  $\dot{E}_p$ 는 반 피치에 대한 내부에너지 소비율,  $\dot{E}_s$ 는 반 피치에 대한 전단에너지 소비율이고  $\dot{E}_f$ 는 치 한 개에 대한 마찰에너지 소비율이다.

헬리컬기어 전체에 대한 에너지 소비율은 일정한 속도  $u$ 로 움직이는 펀치에 제공된 동력과 같아야 함으로 헬리컬기어 전체에서의 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_T = N \dot{E}_t \quad (3)$$

여기서  $N$ 은 헬리컬기어의 잇수이다. 그리고 상대압력에 관한 상계해는

$$\frac{P_{av}}{\sigma} = \frac{\dot{E}_T}{\sigma \cdot u \cdot A} \quad (4)$$

이다. 여기서  $A$ 는 해석하려는 순간의 펀치와 가공물의 접촉면적이다.

Table 1 Kinematically admissible velocity fields for helical gear forging

Region 1 $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$ $r_1 \leq r \leq r_1$ $Z(r) \leq z \leq t$	$U_r = 0$ $U_\theta = 0$ $U_z = -u$
Region 2 $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$ $r_1 \leq r \leq r_1$ $0 \leq z \leq Z(r)$	$U_r = \frac{u}{2} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{r} - \frac{1}{Z(r)} \right)$ $U_\theta = -\frac{r^2}{r_1} \frac{u \tan \beta}{HR_p} z$ $U_z = \frac{u}{2} \frac{z}{Z(r)} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{r} - \frac{1}{Z(r)} \frac{\partial Z(r)}{\partial r} - 2 \right)$
Region 3 $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2 + \theta_b$ $r_m \leq r \leq r_m$ $0 \leq z \leq H$	$U_r = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{r} - \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_m} \frac{(r - r_m)^2}{(r_m - r_m)^2} \right)$ $U_\theta = \frac{u}{2H} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_m} \frac{(3r^2 - 4rr_m + r_m^2)}{(r_m - r_m)^2} (\theta - \theta_2) - \frac{u \tan \beta}{HR_p} rz$ $U_z = -u \frac{z}{H}$
Region 4 $\theta_2 + \theta_b \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$ $r_m \leq r \leq r_m$ $0 \leq z \leq H$	$U_r = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{r} + \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_m} \frac{(r - r_m)^2}{(r_m - r_m)^2} \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \right)$ $U_\theta = \frac{u}{2H} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_m} \frac{(3r^2 - 4rr_m + r_m^2)}{(r_m - r_m)^2} \theta_b \frac{\alpha - (\theta - \theta_2)}{\alpha - \theta_b} - \frac{u \tan \beta}{HR_p} rz$ $U_z = -u \frac{z}{H}$
Region 5 $\theta_2 + \theta_b \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$ $r_1 \leq r \leq r_1$ $0 \leq z \leq H$	$U_r = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} + \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} \right)$ $U_\theta = 0$ $U_z = 0$
Region 6 $\theta_2 + \theta_b \leq \theta \leq \theta_2 + \theta(t)$ $r_b \leq r \leq r_m(\theta)$ $0 \leq z \leq H$	$U_r = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} + \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} \right)$ $U_\theta = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} + \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} \right) \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r}$ $U_z = 0$
Region 7 $\theta_2 + \theta(t) \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$ $r_b \leq r \leq r(t)$ $0 \leq z \leq H$	$U_r = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} + \frac{r_m^2 - r_1^2}{r} \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \right) + \frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} + \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \right) \frac{1}{\alpha - \theta(t)} \cdot \left( \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r} - \frac{r_b}{r} \tan^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r_b} \right)$ $U_\theta = -\frac{u}{2H} \left( \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} + \frac{\theta_b}{\alpha - \theta_b} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_b} \right) \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r} \frac{(\theta - \theta_2) - \alpha}{\theta(t) - \alpha}$ $U_z = 0$

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 속도장의 타당성 검토

축방압출(radial extrusion) 형식의 단조에 대한 본 속도장에서의 영역분할이 타당함을 검토하기 위해 Fig.4와 같은 단조 형태에 대하여 Bramley등의 상계해<sup>(11)</sup>와 본 연구에서의 상계해석 결과를 비교한다.

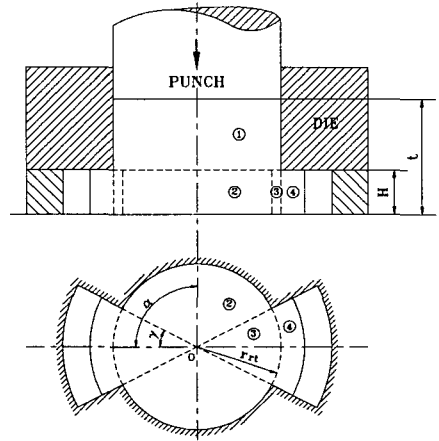


Fig.4 Deformation regions of radial extrusion

Fig.4에서 보인 축방압출(radial extrusion) 형식의 단조에 대하여, Bramley가 제안된 속도장을 나타내면 Table 2와 같다. Fig.4에 보인 단조공정에 대한 본 연구의 속도장은 앞서 보인 헬리컬기어 속도장의 제①~⑤영역과 같다.

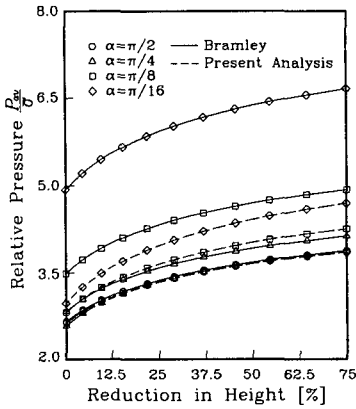
Table 2 The proposed velocity fields for radial extrusion by Bramley<sup>(11)</sup>

Region	Velocity		
1	$U_r = 0$	$U_\theta = 0$	$U_z = -u$
2	$U_r = 0$	$U_\theta = -u(a - \theta) \frac{r}{H}$	$U_z = -u \frac{z}{H}$
3	$U_r = u \frac{a\gamma}{2H\gamma}$	$U_\theta = -u(a - \gamma) \frac{\theta r}{H\gamma}$	$U_z = -u \frac{z}{H}$
4	$U_r = u \frac{r_0^2 a}{2Hr\gamma}$	$U_\theta = 0$	$U_z = 0$

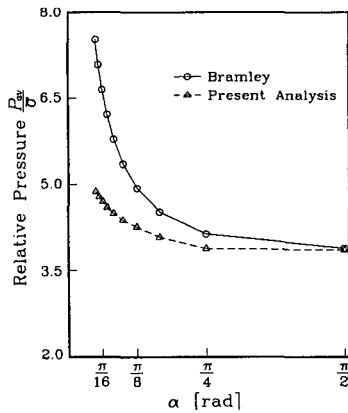
Fig.5는 Fig.4와 같은 축방압출(radial extrusion) 형식의 단조에 대하여 Bramley의 상계해와 본 연구에서의 상계해석 결과를 비교하였다. Fig.5(a)는 두 속도장의 압하률에 대한 상대압력을 반 피치각  $\alpha$ 를

변화시키면서 해석한 결과이다. Fig.5(b)는 최종상태에 대해서 반피치각  $\alpha$ 에 대한 상대압력의 변화를 나타내었다.

Fig.5에서 Bramley에 의해 제안된 속도장보다 본 저자에 의해 제안된 속도장의 상계해가 낮음을 알 수 있다. 따라서 본 저자에 의해 제안된 속도장의 영역분할이 측방압출 형식의 단조에 대해 좀 더 타당하다고 할 수 있다.



(a)



(b)

Fig.5 Comparisons of relative pressure for radial extrusion

- (a) Variation of relative pressure with respect to reduction in height for different segment angles " $\alpha$ "
- (b) Variation of relative pressure with respect to segment angles " $\alpha$ "

### 3.2 상대압력

본 연구에서는 치직각 압력각  $20^\circ$ , 치 높이가 2.25M 인 헬리컬기어에 대해 내경을 0으로 하여 치직각 모

둘, 잇수, 헬릭스 각, 마찰상수, 그리고 초기소재 높이 등에 따라 상대압력을 계산하였다. 또한 초기 소재의 직경은 단조되는 기어의 이뿌리원 직경과 같다고 가정하였고 전위계수는 0으로 선택하였다.

Fig.6과 Fig.7은 마찰상수 0.1, 헬릭스 각  $23.626^\circ$  일 때의 해석결과이며, Fig.6에 에너지 소비율이 최소로 되는 반경변수  $r_m$ 을 편치 압하율에 대해 구한 결과이다.

이 결과에 의하면 편치행정이 어느 정도 진행된 후에는  $r_m/r_t$ 이 거의 일정한 값을 갖는다. 그리고 모듈 변화 따르는 영향은 없다. 또 잇수가 많은 경우가 잇수가 적은 경우보다  $r_m/r_t$  값이 더 크다. 또한  $\epsilon/H \approx 1$ 의 값이 얻어졌다

이와 같이 얻어지는  $r_m, \epsilon$  값을 해석에 적용한다.

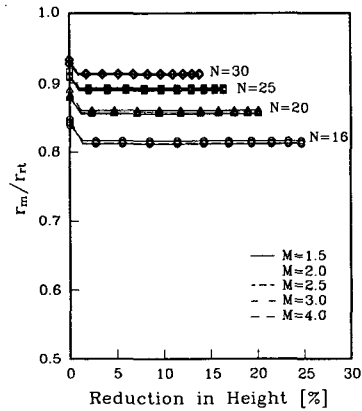


Fig.6 Variation of the fractional radius with respect to reduction in height for different number of teeth and normal modules ( $m=0.1$ , helix angle= $23.626^\circ$ )

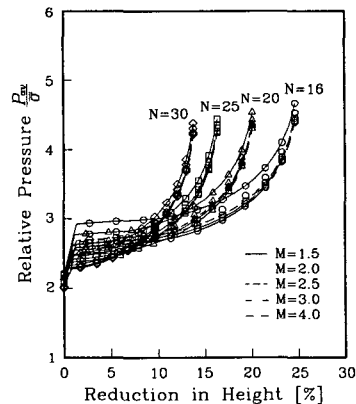


Fig.7 Variation of the relative pressure with respect to reduction in height for different number of teeth and normal modules ( $m=0.1$ , helix angle= $23.626^\circ$ )

Fig.7은 압하율에 대한 상대압력을 나타낸 것으로 단조 최종단계에 접근하면 상대압력이 급상승하는 경향을 보이고 있다. 이것은 단조 최종단계에 접근할수록 축직각 단면적 확대에 비해 다이면의 구속이 더 심해져서 에너지 소비율이 크게 작용된 것으로 생각된다.

Fig.8과 Fig.9는 단조 최종상태에서 해석한 결과이다. Fig.8은 헬릭스 각이 23.626°일 때, 이상적인 단조 조건으로 마찰상수가 0.0인 경우에 대해 해석한 것으로 각각의 잇수에 치직각 모듈과 상대압력의 관계를 나타낸 것이다.

Fig.7과 Fig.8의 두 경우 모두 치직각 모듈이 증가함에 따라 상대압력이 감소하고, 잇수가 증가함에 따라 상대압력이 감소함을 알 수 있다. 치직각 모듈이 커지거나 잇수가 증가하면 헬리컬 기어의 축직각 단면적이 증가하므로, Fig.7, 8의 결과 축직각 단면적이 큰 헬리컬기어가 구속형 공정으로 단조하기 유리함을 나타낸다.

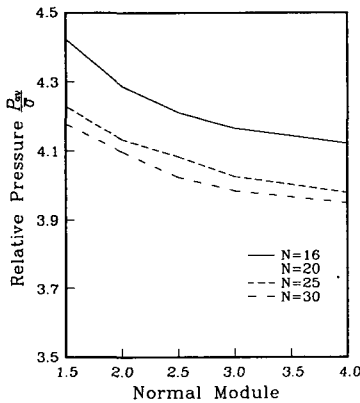


Fig.8 Variation of the relative pressure with respect to normal module different number of teeth ( $m=0.0$ , helix angle=23.626°)

헬리컬기어의 냉간단조에서 헬릭스 각의 영향을 살펴보기 위하여 마찰상수 0.1, 잇수 20과 30에 대하여, 헬릭스 각의 변화에 대한 상대압력의 변화를 Fig.9에 나타내었다. 비교를 명확히 하기 위해 각각의 축직각 단면이 동일한 축직각 모듈에 대해 도시하였다. 이 결과 헬릭스 각이 작은 헬리컬기어가 구속형 공정으로 단조하기 유리함을 나타낸다.

Fig.10은 초기 소재 높이의 영향을 살펴보기 위하여 치직각 모듈 2.0, 마찰상수 0.1, 헬릭스 각 23.626°, 초기 소재 높이 15mm, 20mm, 25mm에 대해 해석한 것으로 각각의 잇수에 대해 펀치 압하율에 대해 상대압력을 도시하였다. 초기 소재 높이가 높아질수록

상대압력은 미소하게 증가하는데 이것은 높이의 증가에 따른 마찰면적의 증가 때문이라 생각된다.

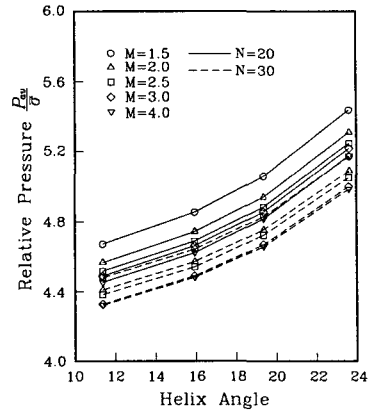


Fig.9 Variation of the relative pressure with respect to helix angle for different number of teeth and transverse modules ( $m=0.1$ )

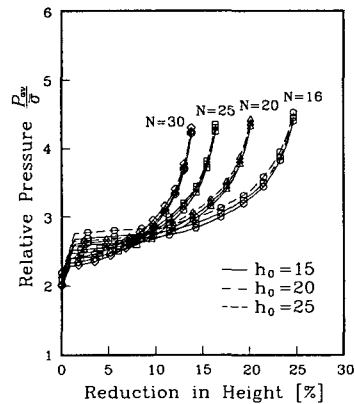


Fig.10 Variation of the relative pressure with respect to reduction in height for different number of teeth and initial heights ( $m=0.1$ , normal module = 2.0, helix angle=23.626°)

### 3.3 단조 하중

이론해석의 타당성을 검토하기 위해, Yang<sup>(7)</sup>등이 실험과 유한요소 해석한 헬리컬기어 단조시의 가공 하중과 비교하고자 한다. 단조는 잇수 19, 치직각 모듈 2.5, 헬릭스 각 18°의 경우이며, 초기소재는 높이가 20mm, 직경이 42mm인 SCM415강이다. 유효응력과 변형률의 관계는  $\bar{\sigma} = 862.6 \bar{\epsilon}^{0.15}$  (MPa)이며, 마찰상수값은  $m=0.12$ 이다.

Fig.11은 Yang<sup>(7)</sup>등의 유한요소(FEM) 해석결과 및 실험결과와 비교한 것으로, 예측된 상계하중이 실험치와 FEM해석 결과보다 조금 높게 평가되었으나 전체적으로 유사한 경향을 보임을 알 수 있다. 또한 단조 최종 단계에서는 유한요소 해석보다 작고 실험치보다 큰 상계해를 예측하였다. 예측된 상계하중은 펀치와 같은 공구의 재질 선택에 쉽게 이용될 수 있다.

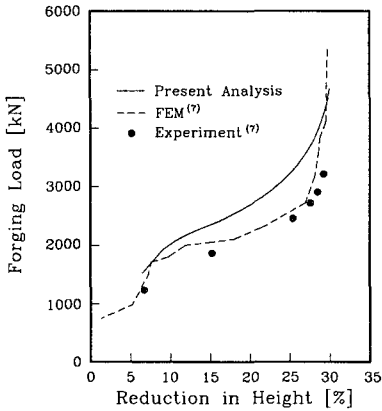


Fig.11 Comparison of the FEM solution and the experimental results<sup>(7)</sup> with the upper bound solutions

#### 4. 결 론

본 연구에서는 원통형 펀치를 사용하는 구속형 공정에 대해 상계해석할 수 있는 동적가용속도장을 제안하였고, 이 속도장에 의한 상계해를 이용하여 헬리컬기어의 구속형 단조공정에 대한 여러 공정변수의 변화에 대한 상대압력 변화를 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 축방압출형식의 단조형태에 대해 Bramley의 상계해와 비교한 결과 본 속도장이 더 타당함을 알 수 있었다.
- (2) 상계해석 결과 잇수가 증가하거나 치직각 및 축직각 모듈이 증가할수록 상대압력이 낮다. 이것은 헬리컬기어의 단면이 커질수록 구속형 공정으로 단조하기 유리함을 나타낸다.
- (3) 상계해석 결과 헬릭스 각이 작을수록 상대압력이 작다. 이것은 헬릭스 각이 작은 헬리컬기어가 구속형 공정으로 단조하기 유리함을 나타낸다.
- (4) 상계해석 결과 초기소재의 높이가 높을수록 상대압력이 미소하게 증가한다.
- (5) 기존의 실험치 및 유한요소 해석치와 상계해석으로 예측한 단조하중을 비교한 결과 조금 높은 값을 가지나 전체적으로 유사한 경향을 보인다. 예측

된 상계하중은 펀치와 같은 공구의 재질 선택에 쉽게 이용될 수 있다.

#### 참 고 문 헌

1. S. K. Samanta, "Helical gear: A noble method of manufacturing it", Proc. 4th North American Metalworking Research Conf., Battelle's Columbus Labs, OH, USA, Society of Manufacturing Engineers, pp. 199-205, 1976
2. 최재찬, 조해용, 권혁홍, 이연호, "헬리컬기어의 새로운 냉간압출법과 상계해석에 관한 연구", 한국정밀공학회지, 제9권, 제3호, pp. 12-28, 1992
3. Jaechan Choi, Haeyong Cho and Hyukhong Kwon, "A new extrusion process for helical-gears : experimental study", J. Mater. Process. Technol., vol. 43, pp. 35-53, 1994
4. F. Dohmann and O. Traudt, "Metal Flow and Tool Stress in Cold Forging of Gear Components" Advanced Technology of Plasticity, Vol. II, pp. 1081-1088, 1987
5. V. Szentmihalyi, K. Lange, Y. Tronel, J. L. Chenot and R. Ducloux, "3-D finite-element simulation of the cold forging of helical gears", J. Mater. Process. Technol., vol. 43, pp. 279-291, 1994
6. K. Lange and V. Szentmihalyi, "Optimized Cold Forging of Helical Gears by FEM - Simulation", Proc. of 9th International Cold Forging Congress, Solihull, UK, 22-26 MAY, pp. 283-289, 1995
7. 박용복, 양동열, "반복경계조건을 이용한 헬리컬기어의 정밀 냉간 단조에 유한요소해석" 대한기계학회 춘계학술대회 논문집(I), pp. 296-301, 1995
8. 심상운, 송기섭, 윤두성, 박용복, 양동열, "자동차용 후진 아이들 기어의 정밀 냉간 단조" 단조기술의 진보, pp. 145-157, 1995
9. 최재찬, 최영, 탁성준, "헬리컬 기어의 냉간단조에 관한 상계해석" 대한기계학회 춘계학술대회 논문집(I), pp. 296-301, 1996
10. W. A. Gordon, C. J. Van Tyne, "Injection Upsetting - An Upper Bound Analysis" 15TH NAMRC, MAY, pp. 278-284, 1987
11. M. Plancak, A. Bramley, and F. Osman, "Non-conventional cold extrusion", J. Mater. Process. Technol., vol. 34, pp. 465-472, 1992