

3차원 유한요소와 Hyperement 연계에 의한 구형강체기초의 동적강성행렬

진 병무, 김 재관, 장 승필
서울대학교

요약

이 논문에서는 지반과 기초를 일반적인 3차원 유한요소로 모델링하고, 유한요소의 바깥영역은 일반적인 모드의 축대칭 유한요소와 축대칭 Hyperement를 사용하여 전달경계로 모델링하여, 유한요소와 전달경계의 경계에서 두 요소간의 연계에 의하여 기초에서의 동적강성행렬을 구한다. 이를 위하여 3차원 유한요소와 축대칭 요소간의 연계방법을 제안한다. 제시되는 기초의 동적강성행렬은 x,y,z방향의 병진성분과 x,y,z축에 관한 회전성분의 6자유도로 표현된다. 이 논문에서 사용한 3차원 유한요소와 축대칭 요소의 연계방법의 검증을 위하여 구형기초와 등가의 강성을 갖는 강체원형기초의 동적강성행렬을 구하고 이를 비교하였다.

1. 서론

현재 지반-구조물 상호작용에 대한 해석은 일반적으로 2차원 내지는 근사적인 3차원 해석으로 수행되어지고 있다. 2차원 내지는 근사적인 3차원 지반-구조물 상호작용 해석방법은 방법의 간편성 등의 여러 가지 이유로 널리 이용되었으나, 3차원의 2차원 해석은 과도하게 보수적인 결과를 산출하는 경향이 있다는 연구가 있고, 다음과 같은 경우에는 불가피하게 3차원 해석이 필요하다. 1) 기초의 형상 또는 구조물이 기하학적인 축대칭이 아닌 경우이거나, 2) 지반 재료의 축대칭적인 균질성이 보장되지 않은 경우, 3) 축대칭 하중이 아닌 일반적인 하중이 작용하는 경우이다. 그러나, 3차원 해석은 2차원 해석에 비하여 모델링이 쉽지 않고, 2차원에 비하여 해석에 요구하는 시간이나 노력이 매우 크다. 그러나 지반의 성질이 구조물을 포함한 근역(Near field)을 제외한 원역에서 축대칭의 성질을 갖는다면, 전체 영역을 축대칭요소와 일반적인 3차원 유한요소를 연계한 방법으로 해석을 수행할 수 있다.

2. 3차원 유한요소와 축대칭 요소의 연계방법

3차원 유한요소로 모델링한 영역의 경계가 축대칭을 이루고 있을 때, 이 경계에서의 변위와 하중은 푸리에 확장으로 푸리에 정수 N에 대해서 대칭 모드와 역대칭 모드의 합으로 표현할 수 있다. 3차원 요소와 축대칭의 경계에서의 변위의 푸리에 계수는 각각의 푸리에 정수 N에 대해서 연속이다. 마찬가지로 이 경계에서의 하중의 푸리에 계수는 푸리에 정수 N에 대해서 평형을 이룬다. 위와 같은 가정아래 그림1에 나타낸 바와 같이 전체 영역을 3차원 유한 요소와 축대칭 유한 요소, Hyperement 등의 축대칭 요소로 모형화 하였을 때, 축대칭 요소에서사용한 푸리에 정수가 N일때 전체 영역에서의 가상일은 식(1)과 같이 근사화한다.

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}^{(n)T} \bar{\mathbf{p}}^T \cong \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} + \sum_{n=-N}^N \bar{\mathbf{u}}^{(n)T} \bar{\mathbf{p}}^T \quad (1)$$

여기서, $\delta \mathbf{u}, \mathbf{p}$ = 직각좌표계(x,y,z)에서 정의된 영역 Ω_1 에서의 가상변위와 하중

$\bar{\delta \mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}}$ = 원통형좌표계(r, θ , z)에서 정의된 영역 Ω_2 에서의 가상변위와 하중의 가상변위와 하중의 푸리에 계수

M, L = 영역 Ω_1, Ω_2 에서의 요소의 개수, N = 해석에 사용한 푸리에 정수이다.

식(1)에서 3차원 요소를 사용하여 모형화한 영역(Ω_1)과 축대칭 요소를 사용하여 모형화한 영역(Ω_2)을 내부(i)와 외부(e) 및 두 영역의 접촉면(b)(즉, 3차원 유한 요소와 축대칭 요소의 접촉면)으로 각각의 자유도를

나누어서 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_i^T \quad \mathbf{u}_b^T] \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^T = [\bar{\mathbf{u}}_b^T \quad \bar{\mathbf{u}}_e^T] \quad (3)$$

영역(Ω_2)의 경계(b)에서 정의된 변위장은 푸리에 급수의 확장에 의하여 변위의 푸리에 계수 $\bar{\mathbf{u}}$ 로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}_c = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)} \bar{\mathbf{u}}^{(n)} \quad (4)$$

여기서, $\mathbf{u}_c = \{u_c \ v_c \ w_c\}^T$, $\bar{\mathbf{u}}^{(n)} = \{\bar{u}^{(n)} \ \bar{v}^{(n)} \ \bar{w}^{(n)}\}^T$

$$\Phi^{(n)} = \text{diag}(\cos n\theta, -\sin n\theta, \cos n\theta) \quad (\text{대칭모우드}) \quad (5a)$$

$$\Phi^{(n)} = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (n=0) \quad (5b)$$

$$\Phi^{(n)} = \text{diag}(\sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta) \quad (\text{역대칭모우드}) \quad (5c)$$

변위의 푸리에 계수는 역푸리에 변환 관계에 의하여 식(6)과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) \int_0^{2\pi} \Phi^{(n)} \mathbf{u}_c \, d\theta \quad (6)$$

여기서, $\delta_{n0} = 0 \ (n \neq 0), \delta_{n0} = 1 \ (n = 0)$ 이다.

영역(Ω_1)의 경계(b)에서 정의된 직각좌표계의 변위장은 식(4)의 원통형좌표계의 변위장으로 다음과 같이 변환된다.

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{T} \mathbf{u}_k \quad (7)$$

여기서, 좌표변환행렬 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

위의 관계식을 식(6)에 대입하면 경계(b)의 직각좌표계에서 정의한 변위 \mathbf{u}_b (영역 Ω_1)와 원통형좌표계에서 정의한 변위의 푸리에 계수 $\bar{\mathbf{u}}_b^{(n)}$ 의 역푸리에 변환관계를 식(8)과 같이 구한다.

$$\bar{\mathbf{u}}_b^{(n)} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) \int_0^{2\pi} \Phi^{(n)} \mathbf{u}_c \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) \int_0^{2\pi} \Phi^{(n)} \mathbf{T} \mathbf{u}_k \, d\theta \quad (8)$$

영역 Ω_1 의 연속적인 변위장 \mathbf{u}_k 는 경계(b)에서 정의된 이산화된 절점변위 \mathbf{u}_b 로 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{N}_b \mathbf{u}_b \quad (9)$$

여기서 \mathbf{N}_b 는 경계면(b)를 따라서 정의된 형상함수이다. 식(9)을 식(8)에 대입하여 경계에서 정의된 절점변위 \mathbf{u}_b 와 변위의 푸리에 계수 $\bar{\mathbf{u}}_b^{(n)}$ 와의 역푸리에 관계는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_b^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) \int_0^{2\pi} \Phi^{(n)} \mathbf{T} \mathbf{N}_b \mathbf{u}_b \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) \sum_s \left(\int_s \Phi^{(n)} \mathbf{T} \mathbf{N}_b \, d\theta_s \right) \mathbf{u}_b \\ &= \phi_{n0} \mathbf{S}^{(n)} \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\phi_{n0} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right)$ 이다.

그러므로 영역 Ω_2 에서 정의된 변위의 푸리에 계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_b^{(n)} \\ \bar{\mathbf{u}}_e^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n0} \mathbf{S}^{(n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \bar{\mathbf{u}}_e^{(n)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

식(1)은 다음식과 같이 영역 Ω_1, Ω_2 에서 정의된 동적강성행렬로 표현된다.

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} + \sum_{n=1}^N \delta \mathbf{u}^{(n)T} \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{u}^{(n)} = \delta \mathbf{u}^{(n)T} \mathbf{p}(\omega) + \sum_{n=1}^N \delta \mathbf{u}^{(n)T} \bar{\mathbf{p}} \quad (12)$$

식(2)과 식(3)을 위식에 대입하고, 식(11)의 역푸리에 변환관계를 대입하면 다음과 같이 전체 구조시스템의 동적평형방정식을 구한다.

$$\begin{bmatrix} G_{ii} & G_{ib} & & & & \\ G_{bi} & G_{bb} + \sum \bar{R}_{ii}^{(n)} & \dots & \bar{R}_{ie}^{(j)} & \dots & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ & \bar{R}_{ai}^{(j)} & & R_{ae}^{(i)} & & \\ & \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \\ \vdots \\ \mathbf{u}_e^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_b + \sum \phi_{n0} \mathbf{S}^{(n)T} \bar{\mathbf{p}}_b^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_e^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 $\bar{R}_{bb} = \phi_{n0}^2 \mathbf{S}^{(n)T} R_{bb} \mathbf{S}^{(n)}$, $\bar{R}_{be} = \phi_{n0} \mathbf{S}^{(n)T} R_{be}$, $\bar{R}_{eb} = \phi_{n0} R_{eb} \mathbf{S}^{(n)}$,
 $\bar{\mathbf{S}}^{(n)} = \phi_{n0} \mathbf{S}^{(n)}$ 로 정의한다.

3. 구형강체기초의 동적강성행렬

그림1과 같이 지반과 기초를 3차원 유한요소로 모델링하여 강체 구형 기초의 동적강성행렬을 계산하였다. 3차원 유한요소로 모델링하는 영역은 반경 R=1인 원통형의 영역이고, 원역은 축대칭 Hyperelement를 사용하여 모델링하였다. 3차원 유한요소와 축대칭 Hyperelement의 연계에 의한 해석방법을 검증하기 위해서 반경 R=1, 기저암반까지의 깊이 H=2인 영역을 축대칭 요소만을 사용하여 모델링한 원형강체기초의 동적강성행렬과, 3차원 요소로 모델링한 원형강체기초의 동적강성행렬과 비교하였다. 이 경우에는 푸리에정수 N=1까지를 사용한 결과와 축대칭 요소만으로 구한 결과가 일치하며, 푸리에정수 N이 2이상인 경우에는 원형강체기초의 동적강성행렬에 기여하는 바가 매우 작은 것으로 확인되었다. H/L=√2의 정사각형기초의 경우에는 그림2-그림5에 나타난 바와 같이 푸리에정수 N이 작은 경우에도 만족할 만한 결과를 나타내었으며, L/B=2인 직사각형 강체기초의 경우에는 그림6-그림7에 나타난 바와 같이 푸리에정수 N이 4이상이면 대체적으로 수렴하는 양상을 보인다. 구형강체기초의 동적강성행렬을 등가 원형강체기초의 동적강성행렬(kxx(c),krr(c)등)과 비교하면 x,y,z방향의 병진운동성분은 등가원형강체기초의 값과 거의 일치하는 것을 보이며, x축과 y축에 관한 Rocking 성분과 z축에 관한 Torsion 성분은 등가원형강체기초에서 구한 값이 구형강체기초의 값보다 대체적으로 작음을 보인다. 표1과 표2에는 구형강체기초와 등가의 원형강체기초의 동적강성계수를 나타내었다.

4. 결론

이 연구에서는 강체 표면기초에 대한 동적강성행렬을 계산하였다. 계산결과로부터 3차원 유한요소와 축대칭 Hyperelement의 연계에 의한 해석방법을 검증하였다. 그러므로 기초를 포함하는 구조물주변의 비균질성과 지하형상의 비균질성을 포함하여 모델링한 3차원 유한요소와 축대칭 Hyperelement의 연계에 의한 해석방법은 재료의 비균질성을 포함하여 임의의 형상을 갖는 표면기초나 강체 측벽을 갖는 문힌 기초의 동적강성행렬을 계산하는데 있어 효과적인 방법이라 생각한다.

5. 알림

이 연구는 한국 원자력 안전기술원의 위탁 용역 과제에 일부로서 수행되었다.

참 고 문 헌

1. Tassoulas, J.L., and Kausel, E. (1983). "Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Strata," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 19, 1005-1032.
2. Werkle, H. (1986). "Dynamic finite element analysis of three-dimensional soil models with a transmitting element." *J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, 41-60.
3. 윤철호등(1994),원전 지반-구조물 시스템 내진안정성 평가기술 개발, 3차년도 보고서,한국원자력안전기술원

표1. 정사각형기초의 정적강성계수의 비교

	3차원 모델				등가 원형 기초
	N=1	N=2	N=4	N=8	
K_{xx}^o	5.071	5.071	5.109	5.168	5.014
K_{yy}^o	5.071	5.071	5.109	5.168	5.014
K_{zz}^o	7.703	7.703	7.833	7.866	7.658
$K_{rr_x}^o$	2.502	2.502	2.553	2.605	2.502
$K_{rr_y}^o$	2.502	2.502	2.553	2.605	2.502
K_{tt}^o	3.402	3.402	3.553	3.603	3.216

표2. 직사각형기초의 정적강성계수의 비교

	3차원 모델				등가 원형 기초
	N=1	N=2	N=3	N=4	
K_{xx}^o	3.806	3.806	3.856	3.860	3.448
K_{yy}^o	3.449	3.449	3.553	3.557	3.448
K_{zz}^o	5.106	5.232	5.232	5.235	4.889
$K_{rr_x}^o$	1.683	1.632	1.645	1.647	1.499
$K_{rr_y}^o$	0.614	0.614	0.628	0.629	0.550
K_{tt}^o	1.569	1.658	1.660	1.670	1.397

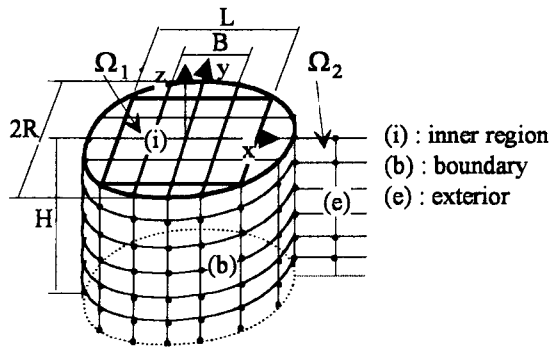


그림1. 3차원 유한요소와 축대칭 Hyperelement의 연계해석을 위한 모델링

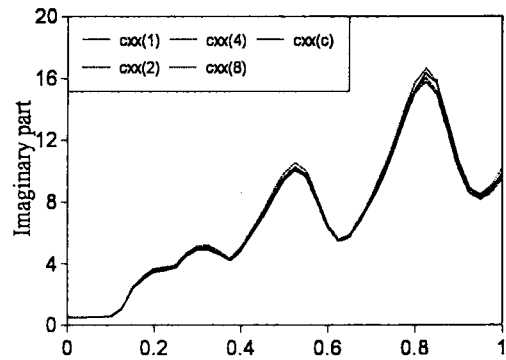
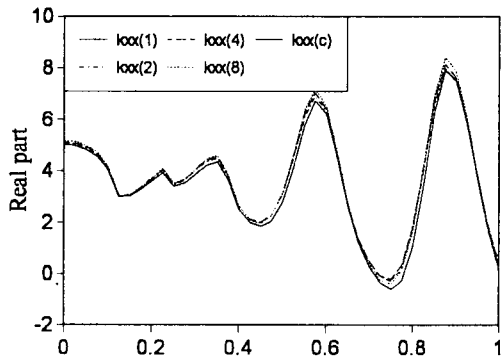


그림2. 동적강성행렬의 x,y축 방향 수평성분 (정사각형기초, $H/L=\sqrt{2}$)

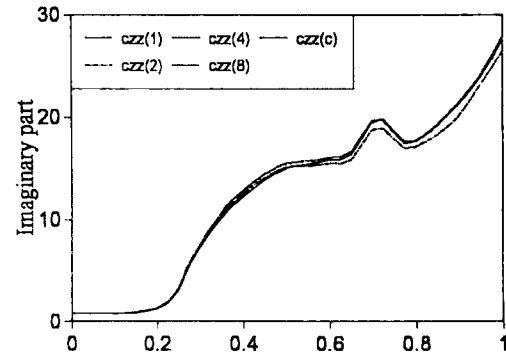
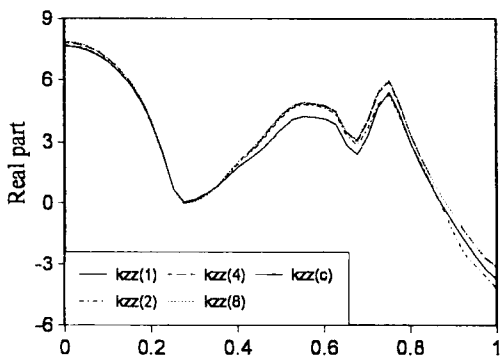


그림3. 동적강성행렬의 z축 방향 수직성분 (정사각형기초, $H/L=\sqrt{2}$)

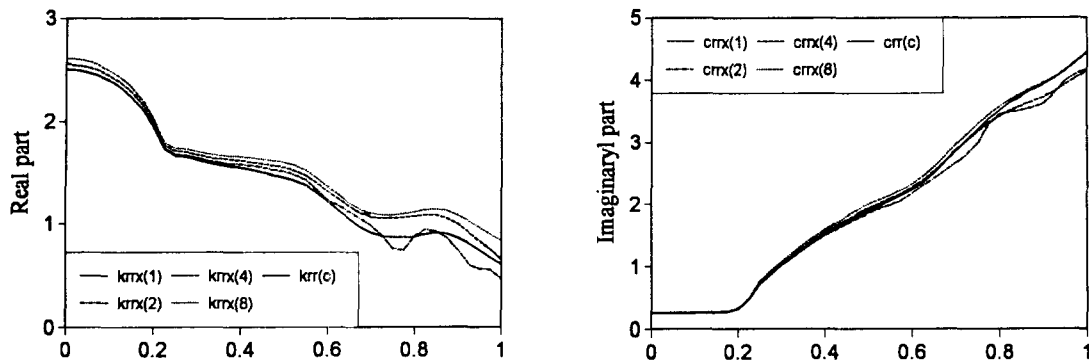


그림4. 동적 강성행렬의 x,y축에 관한 rocking 성분 (정사각형기초, $H/L = \sqrt{2}$)

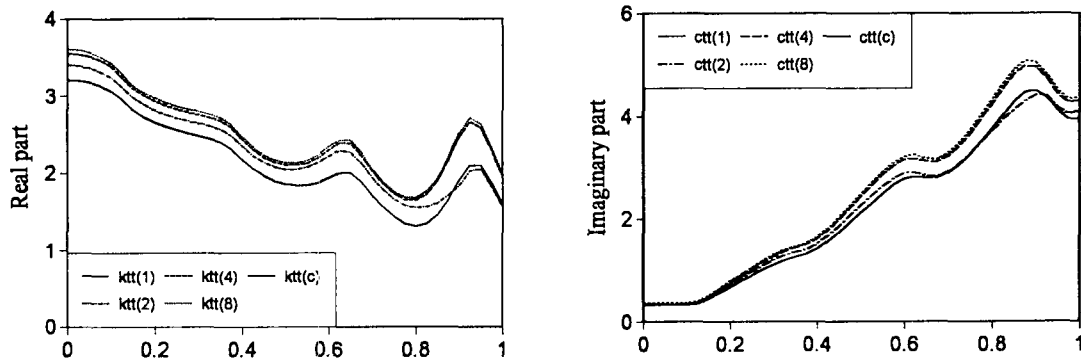


그림5. 동적 강성행렬의 z축에 관한 torsion 성분 (정사각형기초, $H/L = \sqrt{2}$)

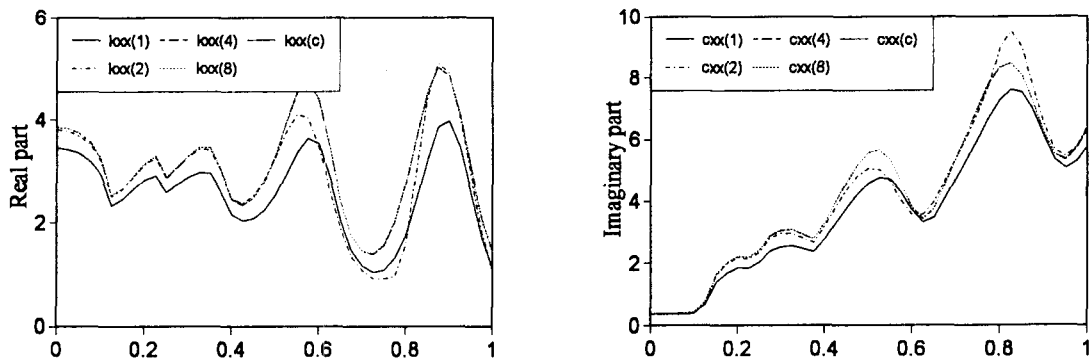


그림6. 동적강성행렬의 x축 방향 수평성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/L = \sqrt{2}$)

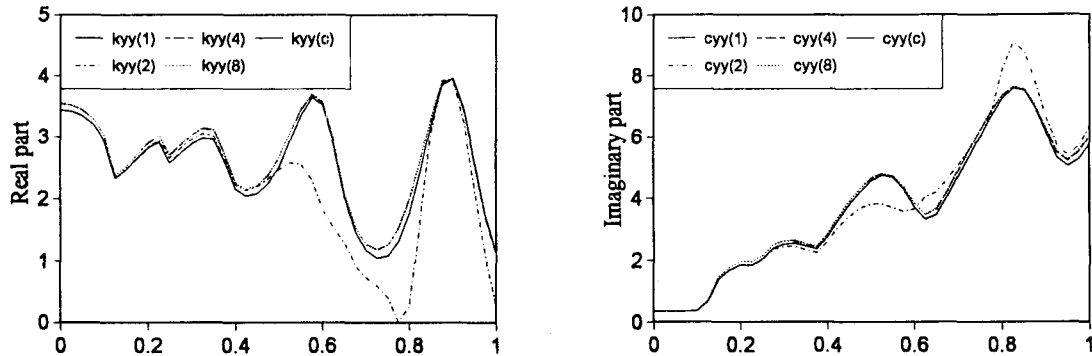


그림7. 동적강성행렬의 y축 방향 수평성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/L = \sqrt{2}$)

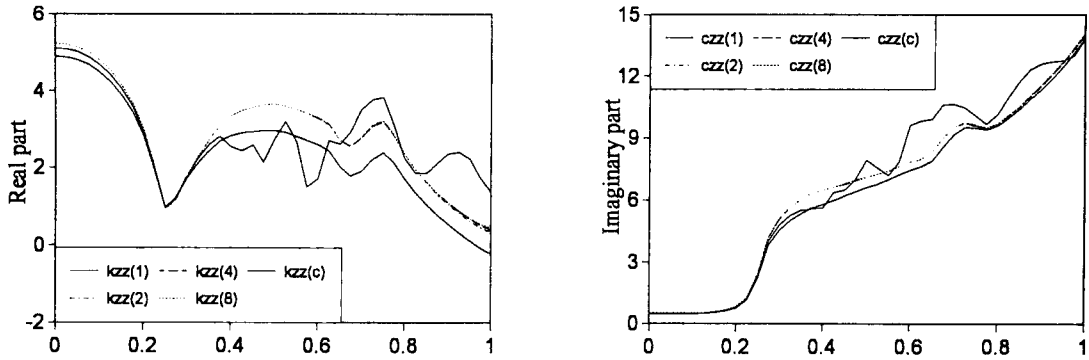


그림8. 동적강성행렬의 z축방향 수평성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/B=\sqrt{2}$)

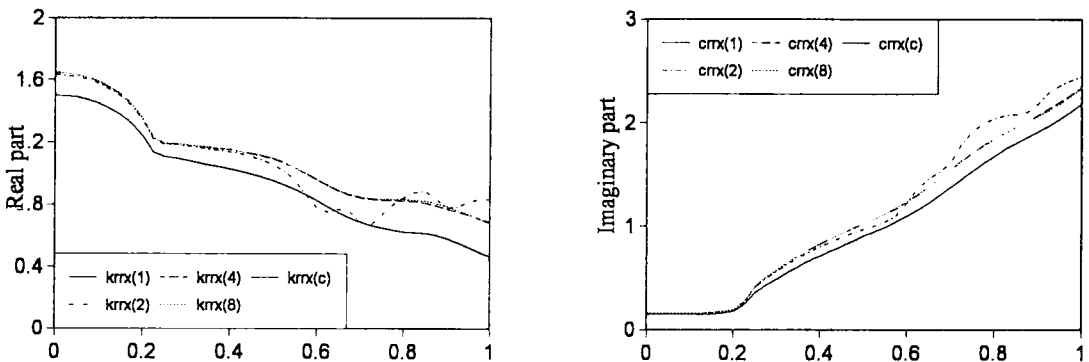


그림9. 동적강성행렬의 x축에 대한 회전방향성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/L=\sqrt{2}$)

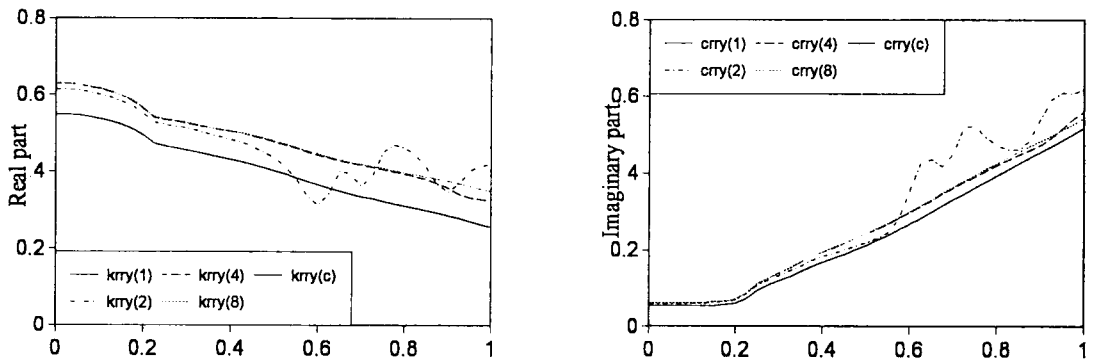


그림10. 동적강성행렬의 y축에 관한 rocking성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/L=\sqrt{2}$)

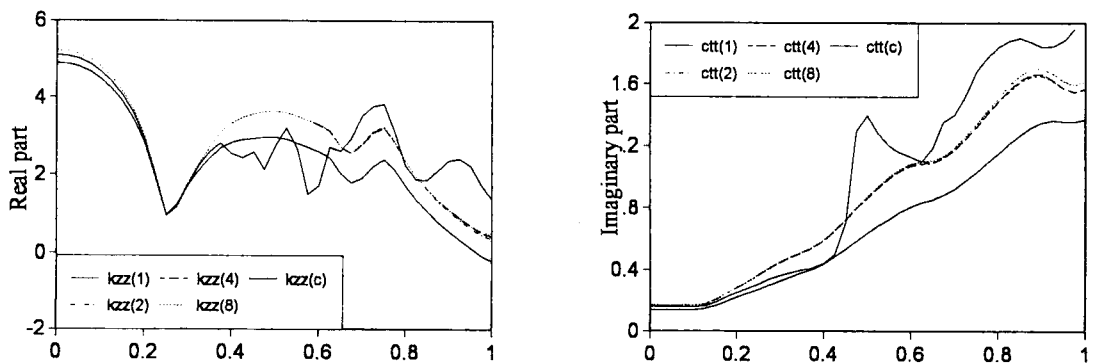


그림11. 동적강성행렬의 z축에 관한 torsion 성분 (직사각형기초, $L/B=2$, $H/L=\sqrt{2}$)