

주상복합구조물의 효율적인 3차원 해석

Efficient 3D Analysis of Building Structures with A Rigid Floor System

황현식* 이동근**
Hyun-Sik Hwang Dong-Guen Lee

ABSTRACT

Very stiff floor system in a residential-commercial building causes some problems in the numerical analysis procedure due to significant difference in stiffness with adjacent structural elements. Static analysis of structure with a stiff transfer-floor can be performed approximately in two steps for upper and lower parts for the structure. However, it is impossible to perform dynamic analysis in two steps with separate models.

An efficient method for dynamic analysis of a structure with a rigid floor system is proposed in this study. The matrix condensation technique is employed to reduce the degree of freedom for upper and lower parts of the structure and a beam elements with rigid bodies at both ends are introduced to model the rigid floor system. Efficiency and accuracy of the proposed method are verified through analysis of several example structures.

1. 서 론

인구의 도시 집중으로 인하여 도심 속의 주거와 상업공간이 상당히 부족하게 되었다. 이러한 공간의 활용도를 높이기 위해서 서로 다른 성격의 두 공간을 하나의 건물에 배치해야 하는 필요성을 느끼게 되어 생겨난 새로운 건물형태가 주상복합건물이다. 두 가지의 서로 다른 용도의 건물을 하나의 구조체로 건설하기 위해서는 Setback이 생기거나 상하부의 골조가 정확하게 맞물려서 연결되지 않는 경우가 발생하게 된다.

주상복합건물은 상부의 주거용 공간과 하부의 상업용 공간을 위한 구조 계획상에 큰 차이가 있는 경우가 대부분이며, 이들을 서로 구조적으로 연결시키기 위하여 매우 큰 단면을 가지는 보(transfer girder)나 두꺼운 바닥판(transfer slab) 등을 사용하고 있다. 이러한 구조 시스템간의 큰 차이를 가진 구조물의 구조해석시 연결층의 큰 강성차로 인한 문제점이 발생하게 된다. 두꺼운 바닥판을 가진 구조물의 정적해석은 상부와 하부의 구조물을 별개의 구조물로 구분한 후, 2단계에 걸친 해석을 통하여 근사적으로 파악할 수 있다. 그러나 동적해석은 이와 같이 하나의 구조물을 별개의 구조물로 나누어 해석할 수 없다. 그런데, 이러한 구조물을 연결하는 층의 강성과 질량은 인접한 층의 질량과 강성에 비해서 크게 차이가 나므로 내진설계를 위해서는 반드시 동적해석을

* 성균관대학교 건축공학과 석사과정

** 성균관대학교 건축공학과 교수

하여야 할 정도로 비정형성이 강한 구조물이다. 따라서, 이러한 특성을 가진 구조물에 대한 동적 해석기술을 개발하고 내진설계에 활용하도록하여 안전하고 경제적인 주상복합건물의 구조설계가 가능하도록 할 필요가 있다.

본 연구에서 제안한 해석법을 사용하면 상부와 하부 구조물의 2단계로 나누어 수행되던 주상복합건물의 근사적인 정적해석보다 훨씬 정확한 결과를 더욱 효과적으로 얻을 수가 있게 된다. 비정형성이 매우 강한 주상복합건물의 동적해석이 가능하게 되면 구조물의 동적거동을 정확히 파악할 수 있기 때문에 보다 안전하고 경제적인 구조물의 설계가 효과적으로 이루어질 수 있게 될 것이다.

2. 주상복합구조물의 해석

2.1 기존의 해석방법

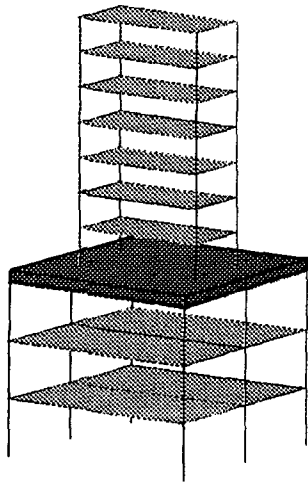


그림1 주상복합건물

가) 2단계 해석법

그림1과 같은 주상복합구조물에서 구조물의 중간에 강체와 같은 거동을 보이는 구조물의 정적해석은 구조물의 상부와 하부가 연결되는 부위에 매우 큰 단면을 가지는 보나 바닥판을 중심으로 두 개의 구조물로 분리시켜서 해석한다. 먼저 상부구조물에 대해서 구조해석을 수행하며 연결부의 큰 보를 고정지반과 같이 생각하고 경계조건을 줄 수가 있다. 그리고, 상부 구조물에 대한 해석결과로부터 얻어지는 수평반력, 연직반력, 그리고 회전반력을 하중으로 생각하면서 하부 구조물에 대하여 해석을 수행한다. 마지막으로 상하부의 구조물에 대한 해석결과로 얻어지는 부재력을 하중으로 사용하여 연결부의 큰 보에 대한 구조해석을 수행한다. 그러나, 이러한 해석법은 정적해석에 국한된 것이기 때문에 전체구조물의 모드형상과 진동수를 구할수 없는 단점을 가지고 있다.

나) 1단계 해석법

컴퓨터를 이용한 주상복합건물의 정적 및 동적해석은 다음의 모형화기법에 의해서 수행 될 수 있다. 구조물의 상하부를 연결하는 보나 바닥판은 아주 두꺼운 강체거동을 보이기 때문에 기존의 컴퓨터를 사용한 해석방법에서는 이러한 강체거동을 보이는 구조요소의 강성값을 크게 주어서 상하 연결부의 보나 바닥판을 강체로 모형화하는 방법을 사용한다. 이러한 방법은 기존의 프로그램을 그대로 사용할 수 있기 때문에 많이 사용되었으나 한가지 단점이 있다.

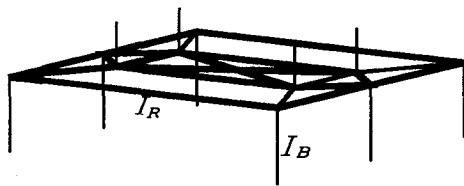
강체거동을 나타내기 위해서 주어지는 아주 큰 강성값이 어떤 일정한 범위 내에서는 안정되고 올바른 결과를 보이지만, 이 범위보다 더 큰 값이 주어지면 해석결과가 참값과 비교해 상당한 차이를 보이게 된다. 이것은 강성행렬의 인접한 요소값 사이에서 매우 큰 차이가 있기 때문에 수치오차(numerical error)가 발생하여 일어나는 현상인데, 이러한 수치오차의 가능성을 피하기 위하여 강체거동을 하는 요소에 강성값을 줄때는 세심한 주의가 요구된다.

2.2 해석오차

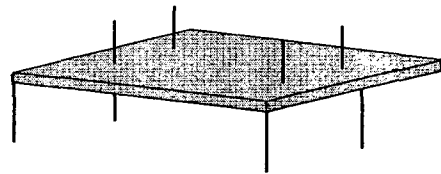
앞에서 언급한 수치오차를 다음의 예제 구조물을 통해서 확인 할 수 있다. 그림1의 주상복합건물에서 처럼 상부와 하부 구조물의 평면이 서로 다르기 때문에 기등선이 일치하지 않고 setback

이 있는 구조물이다. 상부와 하부를 연결짓는 transfer slab는 실제 내부변형이 없는 강체와 같은 거동을 보이게 된다. 이러한 연결층을 기존의 범용해석 프로그램인 ETABS와 SAP90을 사용하여 모형화 하였다.

그림2의 (a)는 transfer slab를 선부재로 모형화하기 위해서 강성이 매우 큰 보요소로 모형화한 방법이다. 그림(b)는 본 연구를 통해서 제안하는 방법으로서 transfer slab를 강체로 모형화 해서 기존의 선부재에 강체가 연결된 것으로 모형화한 것이다. 그림(a)에서 연결층의 강성을 I_R 이라 하고 인접한 부재의 강성을 I_B 라고 하자. 연결층 부재의 강성을 식으로 표현하면 다음과 같이 된다.



(a)SAP90, ETABS의 모형화



(b) 제안된 모형화

그림2. 연결층에 대한 모형화방법

$$I_R = 10^N \times I_B \dots\dots\dots(1)$$

강성의 승수인 N값의 조절을 통해서 연결부를 강체에 가깝게 모형화 할 수 있다. 이때, 연결층 부재의 강성 I_R 을 증가시킬 때 발생하는 수치오차를 살펴보면 다음의 그림3과 같다. 구조물에 횡하중을 가할 경우 구조물은 횡변형을 일으키게 되는데, 이때 식1의 변수N에 따라서 횡변위값이 변하게 된다.

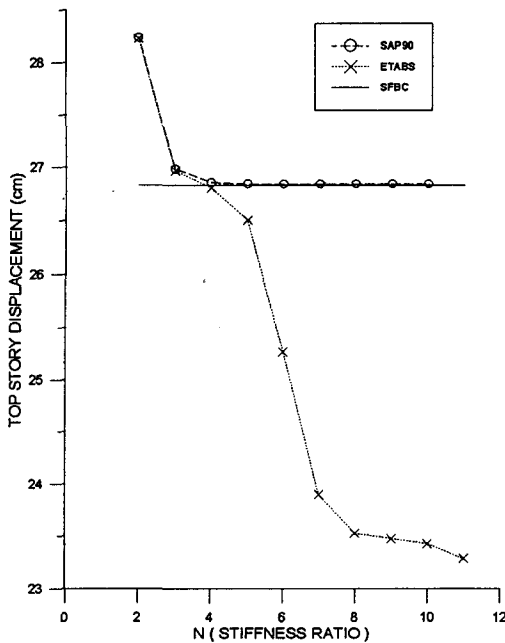


그림3. 강성비와 해석S/W에 따른 변위비교

본 연구에서 제안한 방법을 이용해서 개발한 SFBC의 해석결과는 강성비에 무관하게 일정한 값을 보이는 반면에, SAP90과 ETABS의 경우에 N값이 증가하면서 변위값이 변하게 된다. 이론적으로 N값이 증가하면서 일정한 값에 수렴을 해야한다. 그러나, SAP90의 경우에는 N값이 증가하면서 일정한 값에 접근하다가 N=11이상이 되면 컴퓨터해석의 계산범위를 벗어나는 overflow가 발생하여 결과가 출력되지 않는다. ETABS에서는 N값이 4일 때 SAP90과 SFBC의 해석결과와 근접할뿐, 그외의 범위에서는 많은 오차를 보이고 있음을 알 수 있다. 따라서 기존의 구조해석 S/W를 사용해서 주상 복합건물과 같이 비정형적인 구조물을 해석할 때는 수 많은 시행착오와 세심한 주의가 따르게 된다.

본 연구를 통해서 제시하는 모형화 방법은 강성 값을 조절하는 것이 아니라 직접 강체요소가 포함되어 있는 프레임요소를 사용하기 때문에 해석상의 수치오차가 발생하지 않는다. 이러한 요소는 다음장에서 소개할 축변환을 통해서 만들어진다.

3장 효율적인 해석모델의 개발

본 연구에서는 주상복합건물의 상층부와 하층부를 연결시키는 춤이 큰 보나 두꺼운 슬라브의 해석을 정확하고 간편하게 할 수 있는 해석기법을 이용하여 급격한 강성변화를 가진 구조물의 해석에 대한 정확성을 높일 수 있게 하였다. 또, 초고층 대형구조물의 자유도 수를 줄일 수 있는 행렬응축(matrix condensation)기법을 이용하여 구조물의 상부와 하부에 대한 별도의 행렬응축을 수행하고 이를 결합하여 전체구조물의 해석을 수행하도록 함으로써 구조방식이 현격히 다른 구조물에 대한 해석을 보다 효율적이고 안전하게 이루어지게 하였다.

3.1 강체의 모형화(Modeling of Rigid Body)

주상복합건물의 연결층에 배치되는 transfer girder나 transfer slab는 내부의 변형이 없는 강체로 보고 해석을 수행할 수 있다. 그림4에서 볼 수 있듯이 일반적인 프레임요소의 강성행렬을 양쪽 끝에 강체가 연결되어 있는 프레임 요소의 강성행렬로 변환시킬 수 있다. 2차원 프레임에 대한 변환행렬은 다음의 식2와 같다. 식2에서 x_{pj} 와 y_{pj} 는 강체내부의 p 점에서 일반 프레임이 연결된 점/까지의 거리이다.

$$\text{식 } [T_{pj}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_{pj} & x_{pj} & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(2), \quad [T_{kj}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{pj} & y_{pj} & 1 & 0 & 0 \\ z_{pj} & 0 & -x_{pj} & 0 & 1 & 0 \\ -y_{pj} & x_{pj} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(3)$$

그림4는 2차원 평면상의 강체변환행렬로서 3차원 골조에서 강막(rigid diaphragm)을 고려할 때 사용하고, 연결층의 강체에 대해서는 3차원의 축변환행렬을 사용해야 한다. 그러한 3차원 축변환행렬은 식3에 나타나있다. 식1과 3의 축변환행렬을 이용해서 강체가 연결된 프레임에 대한 강성행렬을 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

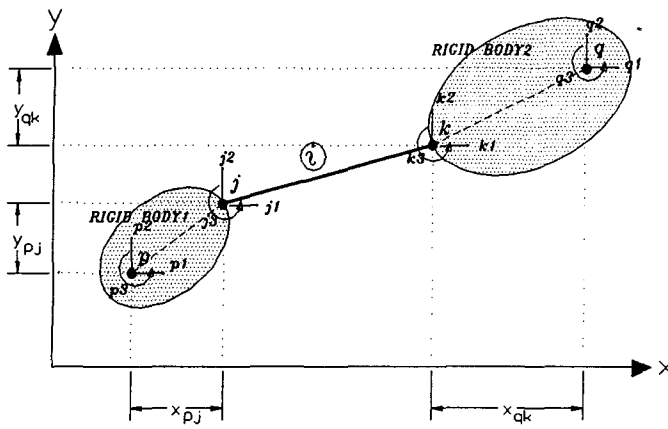


그림4. 부재양단에 강체가 연결된 프레임

$[S_{Bj}] = [T_j][S_j][T_j]^T \dots\dots(4)$
 프레임의 강성행렬 $[S_j]$ 를 강체가 연결된 프레임의 강성행렬 $[S_{Bj}]$ 로 변환시키면, 강체가 있는 구조물에 대한 보다 정확한 해석결과를 강성값의 조절없이 도출해 낼 수 있다.

3.2 행렬의 응축기법(Matrix Condensation Technique)

고층건물의 정확한 거동을 파악하기 위해서는 절점당 6개의 자유도를 가지는 3차원 해석을 하는 것이 바람직하지만, 대형건물일수록 3차원으로 해석을 한다는 것은 많은 해석시간과 컴퓨터의 용량을 필요로 하므로 비경제적이다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해서 자유도의 응축기법을 사용하였다. 관심있는 자유도에 대해서만 해석을 수행할 수 있는 자유도응축기법을 이용하면, 컴퓨터의 계산량을 감소시킬 수 있고 아울러 작은 기억용량을 가진 컴퓨터 시스템에서도

대형 구조물의 해석이 가능해진다.

구조물 바닥판의 면내변형을 무시하는 강막가정(rigid diaphragm assumption)을 이용하면 바닥판내 임의의 점에 대한 2개의 이동자유도와 1개의 회전자유도만을 가지고 그 바닥판의 평면내 이동과 회전에 대한 해석이 가능해진다(그림5.(a)→(b)). 다음으로 강막에 대한 변환을 수행하지 않은 자유도는 응축기법을 이용해서 소거할 수 있다(그림5. (b)→(c)). 이러한 응축기법은 횡방향 변위에 미치는 보의 휨변형과 기둥의 축방향 변형효과가 고려되기 때문에 정확한 해석결과를 도출해낼 수 있고, 동적해석의 경우에 많은 자유도 수의 감소 효과로 해석에 소요되는 계산시간을 크게 줄일 수 있는 이점이 있다. 최종적으로 정적응축기법에 의해서 자유도를 응축하면 그림(c)와 같이 층당 3개의 자유도를 가지는 막대모델로 단순화될 수 있다.

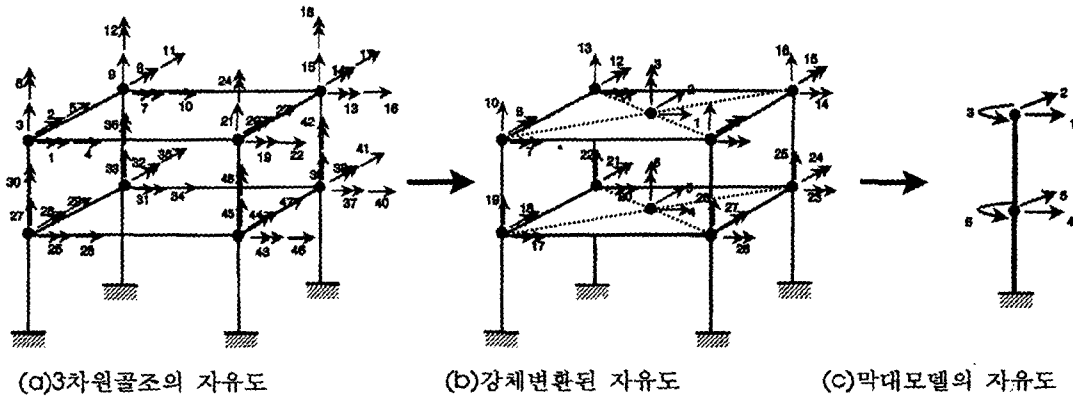


그림5. 3차원골조의 자유도응축 기법

3.3 상부 구조물에 대한 모형화

주상복합건물의 강성행렬은 상부와 하부구조물에 대해서 별개로 응축기법을 수행하게 되고, 다음으로 상하 구조물을 연결하는 연결층에 대한 강체의 좌표변환을 수행한다. 상부 구조물의 자유도는 각 층당 3개의 자유도와 강체내부의 한 절점에 6개의 자유도로 구성된다. 각 층의 내부절점의 위치는 동적해석시 지반가속도가 각 층의 질량중심에 가해진다고 보기 때문에 각 층의 무게중심에 정하였다. 이러한 상부구조물의 모형화는 옆의 그림6과 같다. 강체내부의 한 절점의 자유도를 6개로 정하여 상부와 하부 구조물의 강성을 별개로 유도하는데서 발생할 수 있는 상하 구조물들 간의 곡률이 일치하지 않는 것을 막도록 하였다.

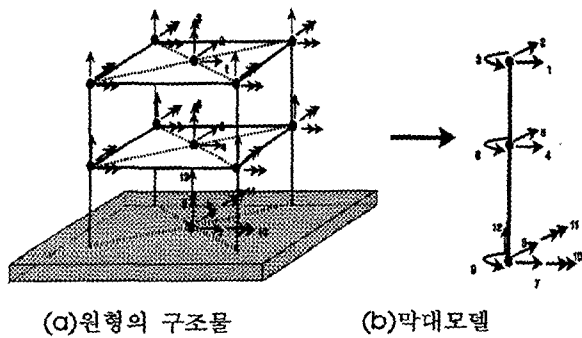


그림6. 상부구조물의 모형화

3.4 하부 구조물 모형화

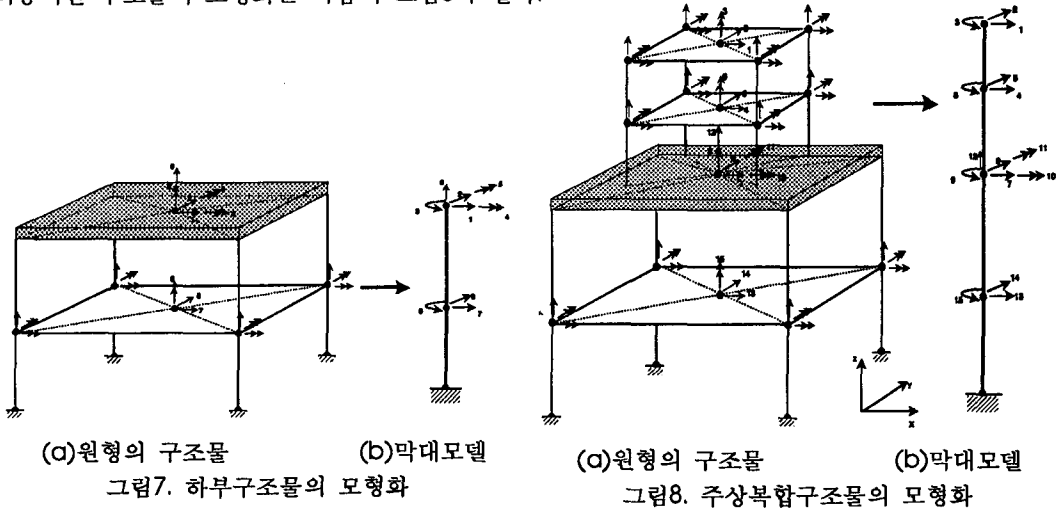
상부 구조물과는 별개의 구조물로 인식하는 하부 구조물은 최상부에 강체가 연결된 것으로 모형화하고, 강체의 자유도는 상부구조물과 같은 6개를 부여하고 각 층당 3개의 자유도를 남기고 다른 자유도는 정적응축기법에 의해서 응축된다. 강성행렬의 자유도번호는 그림7에서 보는 바와 같이 상부 구조물의 자유도 번호와는 별개로 형성한다.

3.5 상부와 하부 구조물 결합

독립적으로 형성된 상하부 구조물의 강성행렬을 연결층을 중심으로하여 하나의 강성행렬로 조합하여야 한다. 강성행렬의 응축이 끝난 상부구조물의 강성행렬을 $[S_{FFU}]$ 라 하고, 하부 구조물 강성행렬을 $[S_{FFD}]$ 이라고 하자. 조합된 강성행렬인 $[S_{FFC}]$ 는 다음의 식(5)와 같이 된다.

$$[S_{FFC}] = [S_{FFU}] + [S_{FFD}] \dots \dots \dots (5)$$

최종적인 구조물의 모형화는 다음의 그림8과 같다.



4. 건물의 예제해석

해석모델의 정확성과 효율성을 검토하기 위해서 앞의 그림1과 같은 주상복합건물을 예제로 사용하였다. 본 논문에서 제안한 모형화기법을 사용해서 개발한 SFBC프로그램의 해석결과를 범용 구조해석 프로그램인 SAP90과 ETABS를 사용한 해석결과와 비교·검토하였다.

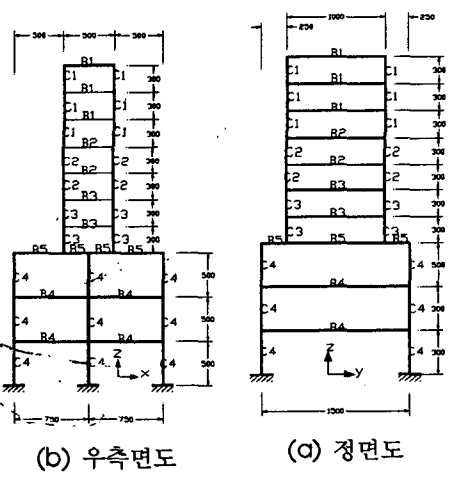


표1. 부재와 단면성질

부재 기호	단면적A (cm×cm)	비틀림 상수 J (m ⁴)	약축에 대한 I (m ⁴)	강축에 대한 I (m ⁴)
C1	45×45	100,000	400,000	400,000
C2	50×50	100,000	600,000	600,000
C3	55×55	100,000	800,000	800,000
C4	70×70	100,000	2,100,000	2,100,000
B1	40×50	100,000	266,666	500,000
B2	40×55	100,000	293,333	600,000
B3	40×60	100,000	320,000	750,000
B4	60×90	100,000	1,620,000	3,700,000

부재의 탄성계수와 포와송비는 각각, 2100ton/cm²과 0.17이다. 기둥과 보의 단면성질은 표1과 같고, 하중은 두가지 형태로 최상층에 가하였다. 하중조건1은 비틀림이 발생하지 않도록 평면의 중심에 1000ton을 가하였고, 하중조건2(L.C.2)는 그림9의 (c)에서 최상층의 우측기둥과 보가 접하는 부분에 100ton을 가하여 비틀림이 발생하도록 하였다. 연결층의 강성을 SAP90의 경우에는 인접한 부재강성에 10⁴배(model A)과 10⁷배(model B)를 하고, ETABS의 경우에는 10⁴배를 하였다. SAP90의 경우에 연결층을 두가지 형태로 구분한 이유는 다음의 4.1절에서 설명하도록 하겠다.

4.1 해석결과 비교

표2는 SFBC(본 연구)를 SAP90과 ETABS의 해석결과중에 변위, 부재력, 반력을 비교한 것이다. 하중조건1의 경우에는 건물의 중심에 하중이 작용했기 때문에 비틀림이 생기지 않아야 하지만, SAP90과 ETABS는 transfer slab의 강성을 조절하는 데서 발생한 수치오차에 의해서 미소한 비틀림이 발생했음을 알 수 있다. 반면에, SFBC는 강성값을 조절하는 방법이 아니기 때문에 비틀림이 발생하지 않았고 변위오차는 최대 0.41%로 거의 발생하지 않았다. M부재의 부재력에서 SAP90의 model A와 ETABS에서 약축에 대한 전단력V_y와 모멘트 M_y가 크게 발생하였다. 이론적으로 하중이 기둥의 강축방향(x방향)에만 작용했기 때문에 이러한 수치는 컴퓨터 해석상의 오차일 것으로 추정한다. 반면에 SAP90의 model B의 경우에는 그 수치가 상당히 적기 때문에 앞의 해석이 합당함을 뒷받침한다. 반력에서도 오차가 최대 2%미만이므로 본연구에서 제시한 모형화 기법이 상당히 정확한 해석기법이었음을 확인할 수 있다.

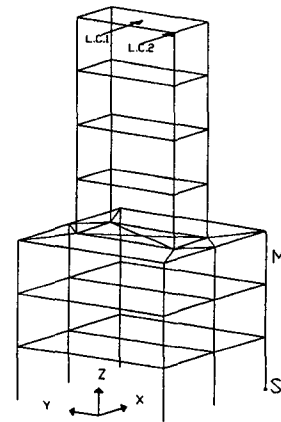


표2. 정적해석 결과비교

		하중조건1(L.C.1)				하중조건(L.C.2)			
		본 연구 (SFBC)	SAP90		ETABS	본 연구 (SFBC)	SAP90		ETABS
			model A	model B			model A	modal B	
최상층 변위	D _x	26.835	26.854	26.839	26.803	4.659	4.666	4.662	4.659
	D _y	0.000	0.000	-0.006	0.015	-0.988	-0.991	-0.989	-0.989
	D _z	0.439	0.440	0.439	0.441	0.071	0.071	0.071	0.071
	R _x	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	R _y	0.008	0.008	0.008	0.008	0.002	0.002	0.002	0.002
	R _z	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.004	0.004	0.004
M부재력	축력	-816.1	-816.1	-816.1	-815.6	-77.4	-86.7	-77.5	-87.1
	V _y	0.0	0.3	0.0	0.9	5.5	5.6	5.6	5.5
	M _v	0.0	-135.0	-1.3	-376.8	-2326.7	-2374.9	-2325.9	-2327.1
	V _x	-149.4	-149.4	-149.2	-147.9	-21.6	-21.8	-21.5	-21.2
	M _x	-55183.3	-55333.5	-55138.1	-54630.8	-8036.8	-8100.3	-8004.9	-7884.9
S점 반력	F _x	-149.4	-149.2	-149.2	-147.7	-21.6	-21.5	-21.5	-21.2
	F _y	0.0	0.0	0.0	0.6	-5.5	-5.5	-5.5	-5.5
	F _z	1081.7	1082.0	1082.0	1078.5	112.4	121.6	112.5	121.5
	M _x	0.0	0.0	0.0	-242.7	2326.7	2330.1	2325.1	2279.7
	M _y	-56267.9	-56220.0	-56220.0	-55628.0	-8145.2	-8139.9	-8138.8	-8020.44
	M _z	0.0	0.0	0.0	0.9	-9.6	-9.6	-9.6	-9.3

model A : 연결층의 강성을 B4×10⁴ 사용

model B : 연결층의 강성을 B4×10⁷ 사용

표2의 하중조건2는 비틀림을 유발시키기 위한 비대칭적인 하중이다. SAP90에서 두 가지 형태의 모형화에 의한 해석결과를 비교해볼 때, 변위 오차는 미소하지만, transfer slab와 연결되어 있는 부재의 경우 부재력에 심한 차이를 보이고 있음을 확인 할 수 있다. 그러한 이유는 연결층 강성을 10^4 배(model A)한 경우에 강제로 모형화한 보의 미소한 휨변형에 의해서 기둥에 추가적인 부재력(특히, 축방향력)을 유발시키기 때문이다. 따라서, 10^7 으로 모형화한 model B의 결과가 더 정확한 해석결과임을 추론할 수 있다. 반면에 ETABS의 경우에 앞의 그림3에서 연결층의 강성을 10^5 배 이상으로 정하게 되면 구조물의 변형이 비정상적으로 계속 줄어들기 때문에 SAP90과 같이 10^7 으로 정하지 못했다. 따라서 그 오차는 커지게 되는 것이다. 반력에서 SFBC와 SAP90의 model B의 오차는 1%미만인 반면에 SFBC와 ETABS의 F_2 의 오차가 9%에 이른다. 이러한 오차는 기둥의 축력에 의해서 전달된 연직반력이기 때문에, 결국 M부재의 축방향력의 오차와 같은 원인에 의한 것이다.

5장 결론

본 연구를 통해서 상부와 하부 구조물의 2단계로 나뉘어 수행되던 주상복합건물의 근사적인 정적해석보다 훨씬 정확한 결과를 더욱 효과적으로 얻을 수가 있게 되었다. 본 연구의 3장에서 언급한 모형화기법을 이용하면, 비정형성이 매우 강한 주상복합건물의 동적해석이 가능하게 됨으로 인해서 구조물의 동적거동을 정확히 파악하여 보다 안전하고 경제적인 구조물의 설계가 효과적으로 이루어질 수 있게 될 것이다.

본 연구의 해석 프로그램 SFBC에 의한 해석결과는 SAP90과 ETABS에 의한 해석결과와 비교해볼 때, 강제를 가지는 구조물의 설계용으로 사용하기에 충분히 정확하고 안정된 해석결과임을 알 수 있다. 그리고 행렬 응축기법을 이용함으로써 컴퓨터의 계산 용량을 줄일 수 있어서 대형 건물의 구조해석을 소형의 개인용 컴퓨터로 할 수 있다는 큰 장점을 가지고 있다. SFBC에 의한 해석시간은 SAP90과 ETABS에 의한 해석속도보다 상당히 빠르는데, 대형건물일수록 이러한 속도차이는 더 커질 것으로 판단된다. 그러므로 본 연구에서 제안한 해석방법은 주상복합건물의 구조설계에서 매우 정확하고 합리적인 방법이라고 할 수 있다. 더 나아가 개발된 기술을 동적해석에 적용하면, 보다 실질적인 주상복합건물의 해석과 설계에 적용할 수가 있을 것이다. 따라서 주상복합구조물의 설계에 신뢰성을 가진 구조해석이 가능하게 되므로 불량 구조시스템의 판별을 통한 구조안전성 확보에도 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. 이동근, 신영수, 조한욱, "고층건물의 해석 및 설계"교재 11-2
2. 이동근, 윤정방, "구조동역학의 개념 및 내진설계" 교재8-1
3. Bryan Stafford Smith, Alex Coull, "Tall Building Structures Analysis and Design", John Wiley & Sons, pp.150~151.
3. William Weaver, Paul R. Johnson, "Structural Dynamics by Finite Elements", Prentice Hall, pp. 411-423, pp.282~290.
4. William Weaver, James M. Gere, "Matrix Analysis of Framed Structures", Van Nostrand Reinhold, Third Edition.