

Modal Analysis법에 의한 우주대공간 구조물의 좌굴해석

Buckling Analysis of the Large Span Spatial Structures by Modal Analysis

한 상 을*, 권 택 진**
Han, Sang-Eul, Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

This paper is mainly focused on the application of modal analysis to analyze the geometrically non-linear buckling behaviours of large span spatial structures, and the evaluation of each eigen mode affected post-buckling behaviours and buckling loads. Modal analysis is applied to derivation of the system matrices transforming actual displacement space into generalized coordinates space represented by coefficients multiplied in the linear combination of eigen modes which are independent and orthogonal each other. By using modal analysis method, it will be expected to save the calculating time by computer extremely. For example, we can obtain the satisfactorily good results by using about 7% of total eigen modes only in case of single layer latticed dome. And we can decrease the possibility of divergence on the bifurcation point in the calculation of post-buckling path. Arc-length method and Newton-Raphson iteration method are used to calculate the nonlinear equilibrium path.

1. 서론

대공간 구조물, 특히 복층래티스 돔과 같은 구조물은 많은 절점으로 구성되어 있기 때문에 구조물의 역학적 특성을 규명하기 위해서는 필연적으로 대규모의 연립방정식을 풀지 않으면 안된다. 특히, 재료 및 기하학적 비선형해석에 있어서는 보다 정밀한 해를 구하기 위하여 뉴턴-랩슨 수치해석과정의 각 단계에서 반복계산이 필요하므로 기존의 계산방법을 적용한다는 것은 비경제적이며, 불합리하다고 사료된다. 따라서, 래티스 돔과 같이 많은 자유도

* 인하대학교 건축공학과 교수

** 성균관대학교 건축공학과 교수

를 갖는 대공간 구조물의 안정해석등 구조적 거동특성을 규명하기 위해서 새로운 해석법의 개발필요성이 제기되고 있으므로, 본 논문에서는 자유도 수를 극단적으로 저감시켜 대공간 구조물의 기하학적 비선형 좌굴특성을 효율적으로 규명하기 위하여 모드중첩법을 이용한 해석기법을 제안한다. 본 해석과정에서는 3차원 변위 해석공간(actual displacement space)을 상호 독립적이고 직교성을 갖는 고유모드의 선형결합에 곱해지는 계수에 의해 표현되는 일반화 좌표공간(generalized coordinate space)으로 변환시키는 계의 강성행렬(system matrix)을 유도한다. 여기에 이용되는 고유모드는 단지 최초 스텝의 강성매트릭스에서 구하거나, 동일형태를 갖는 연속체의 자유진동해석으로부터 구할 수 있다. 해석과정중 필요한 모드를 전체 고유모드로부터 선택하는 것은 대단히 어려운 일이므로, 본 논문에서는 고유치와 하중모드의 변화를 고려한 선택기법을 제안한다.

모드중첩법을 사용함으로써 수치해석상 계산량을 획기적으로 줄일 수 있음은 물론 분기점에서 계의 강성매트릭스에 있어서 계수다중저감(multi-degeneration of rank)을 피할 수 있어 후좌굴상태에서의 분기경로의 추적이 용이하게 됨은 물론, 발산 가능성을 줄일 수 있다.

적용된 해석기법 및 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 단층 및 복층 래티스 등의 두 모델을 해석하여 일반적인 비선형 해석결과와 비교, 고찰하였다. 상하진동을 받는 연속체 셀의 동적거동특성 규명에 있어 르잔드르다항식(legendre polynomial)으로 표현되는 변위식을 이용한 고유모드 해석에 의해 모드중첩법의 유용성은 이미 검증된바 있다¹⁾.

2. Modal Analysis 법에 의한 비선형 수치해석 알고리즘

n 개의 자유도를 갖는 구조물에서 공간변위벡터를 $\{D\}$ 로 표시할 때 계의 증분평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^1\{dF\} = {}^n[K(N)] {}^1\{dD\}. \quad (1)$$

여기에서, $\{dF\}$, $[K(N)]$, $\{dD\}$ 는 각각 증분하중, 전체좌표계에서의 접선강성, 증분공간변위이다. 식(1)은 비선형좌굴해석을 위한 증분계의 n 원 비선형 연립방정식을 나타내고 있다. 일반적으로 식(1)의 해를 구하는 문제는 연립방정식 자체가 비선형이며, 미지수가 대단히 많기 때문에 여러 가지 문제점이 제기되므로 본 논문에서는 새로운 해석방법으로 Modal Analysis 법을 제안한다. 본 알고리즘을 적용함에 있어서 일반화좌표 A_j ($j=1, 2, \dots, m$)에 의해 표현되는 새로운 강성매트릭스를 유도할 수 있다. 공간변위벡터 $\{D\}$ 와 증분변위벡터 $\{dD\}$ 는 고유벡터의 선형결합에 의해 식(2), (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^1\{D\} = A_1 {}^n\{D_1\} + A_2 {}^n\{D_2\} + \dots + A_m {}^n\{D_m\}. \quad (2)$$

$${}^1\{dD\} = dA_1 {}^n\{D_1\} + dA_2 {}^n\{D_2\} + \dots + dA_m {}^n\{D_m\}. \quad (3)$$

여기에서 A_j 는 고유모드 $\{D_1\}$, $\{D_2\}$, \dots , $\{D_j\}$, \dots , $\{D_m\}$ 와 관계되는 일반화 좌표이다. 각 부재의 부재력 $\{N\}$ 은 식 (4)의 공간변위로 나타낼 수 있다.

$${}^k\{N\} = {}^n[C] {}^1\{D\}. \quad (4)$$

식 (2)를 식 (4)에 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\{N\} = \Lambda_1\{H_1\} + \Lambda_2\{H_2\} + \dots + \Lambda_m\{H_m\}. \quad (5)$$

여기에서,

$$k_{\{H_j\}}^1 = k_{\{C\}^n \{D_j\}^1} = \text{const}. \quad (6)$$

그러므로, 내력성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{\alpha\beta} = \Lambda_1 h_{1\alpha\beta} + \Lambda_2 h_{2\alpha\beta} + \Lambda_m h_{m\alpha\beta}. \quad (7)$$

여기에서, $h_{j\alpha\beta}$ 는 식(6)으로부터 얻을 수 있으며, 식(1)의 $[K(N)]$ 의 성분 k_{ij} 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} k_{ij}(N_{\alpha\beta}) &= k_{ij}(\Lambda_1 h_{1\alpha\beta} + \Lambda_2 h_{2\alpha\beta} + \Lambda_m h_{m\alpha\beta}) \\ &= \tilde{k}_{ij}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m). \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서, $\Lambda_1 \sim \Lambda_m$ 이 주어지면 식(8)의 성분 \tilde{k}_{ij} 를 계산할 수 있다. 즉 \tilde{k}_{ij} 는 일반화좌표의 함수이며, 위 식을 고려하면 식(1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^n\{dF\} &= {}^n[K(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)]^n\{dD\} \\ &= [\{B_1\}, \{B_2\}, \dots, \{B_m\}] \begin{Bmatrix} d\Lambda_1 \\ \vdots \\ d\Lambda_m \end{Bmatrix} \\ &= {}^m[B] {}^m\{d\Lambda\}. \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서,

$$\{B_j\} = [K(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)]\{D_j\}. \quad (10)$$

또한, 충분하중도 다음과 같이 고유모드에 의해 나타낼 수 있다.

$${}^n\{dF\} = dP_1 {}^n\{D_1\} + \dots + dP_m {}^n\{D_m\}. \quad (11)$$

식(9)에 Galerkin법을 적용하면, 일반화좌표에 의한 계의 충분방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\{D_j\}^T \{dF\} = \{D_j\}^T [B] \{d\Lambda\}. \quad (12)$$

(j = 1, 2, 3, \dots, m)

위 식을 정리하면, 최종적으로, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}^m\{dP\} = {}^m[\bar{K}] {}^m\{dA\}. \quad (13)$$

여기에서,

$$\{dP\} \equiv \begin{Bmatrix} \{D_1\}^T \{dF\} \\ \vdots \\ \{D_m\}^T \{dF\} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

$${}^m[\bar{K}] \equiv \begin{bmatrix} \{D_1\}^T [K] \{D_1\} \cdots \{D_1\}^T [K] \{D_m\} \\ \vdots \\ \{D_m\}^T [K] \{D_1\} \cdots \{D_m\}^T [K] \{D_m\} \end{bmatrix} \quad (15)$$

3. 고유모드의 선택법

무주 대공간구조물의 안정해석을 위한 Modal Analysis법 적용에 있어서는, 수치해석상의 제1스텝의 강성매트릭스로부터 얻은 몇 개의 정규화된 고유모드를 사용한다. 그러므로, 전체 고유모드로부터 필요한 모드를 어떻게 선택하느냐의 문제는 본 해석법의 적용에 있어 대단히 중요한 의미를 갖는다. 고유모드의 선택법은 여러 관점에서 고려될 수 있으며, 그중 한 방법은 각 스텝에서의 일반화 좌표의 절대값을 합한 기준치(standard factors)중 큰 것부터 순차적으로 선택하는 방법을 생각할 수 있으나, 전과정을 모두 계산하지 않으면 안되는 문제점이 있다. 그러므로, 본 논문에서는 다음식으로부터 주어지는 고유모드를 선택하여 수치계산을 행한다. 식 (1), (2), (11)로부터 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$[K] \sum \Lambda_i \{D_i\} = \sum P_i \{D_i\} \text{ and } [K] \{D_i\} = \lambda_i \{D_i\} \quad (16)$$

또한, 식 (16)을 정리하면,

$$\sum \Lambda_i \lambda_i \{D_i\} = \sum P_i \{D_i\} \quad (17)$$

를 유도할 수 있으며, 식(17)의 양변에 $\{D_i\}^T$ 를 곱하고 정리하면,

$$\Lambda_i = P_i / \lambda_i \quad (18)$$

와 같은 평가계수(evaluation factor)를 얻을 수 있다.

그림 1과 그림 2는 각각 등분포하중을 받는 복층래티스 돔의 평가계수와 기준치를 보여주고 있다. 두 그림으로부터 두 계수의 분포형태가 대단히 유사함을 알 수 있으며, 따라서 평가계수를 고유모드의 선택기준으로 사용하는 것이 합리적이라는 결론에 도달하였다.

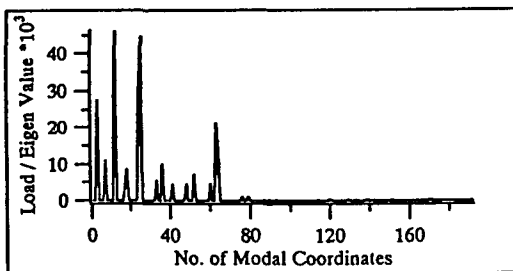


그림 1 평가계수(하중계수/고유치)의 분포

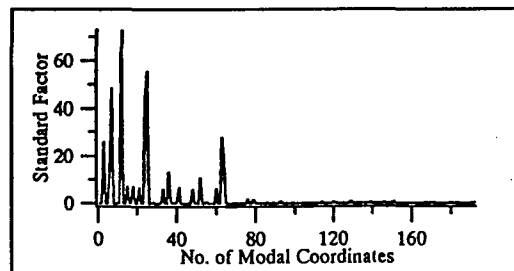


그림 2 기준치(변위계수 절대치의 합)의 분포

그림 3은 단층래티스 돔의 평가계수 분포형태를 보여주고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 몇 개의 모드를 제외하고는 대부분의 모드가 구조물의 거동에 기여하고 있지 못함을 알 수 있으며, 단지 전체 고유모드 수의 5% 미만의 고유모드만으로도 대단히 정확한 해를 구할

수 있다. 또한, 그림 4에서 보는 바와 같이 복층 이상의 래티스 돔에 있어서는 각 모드의 평가계수의 차가 많지 않음을 알 수 있으며, 따라서 해석시 많은 고유모드를 사용하여야 함을 알 수 있다.

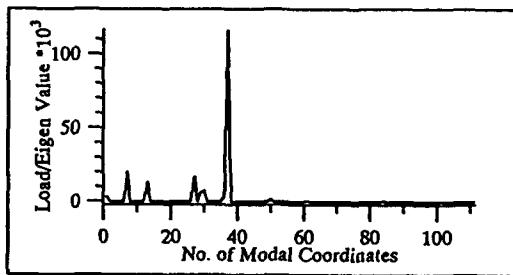


그림 3 단층래티스 돔의 평가계수 분포예

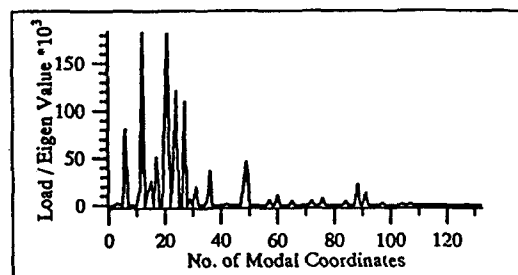
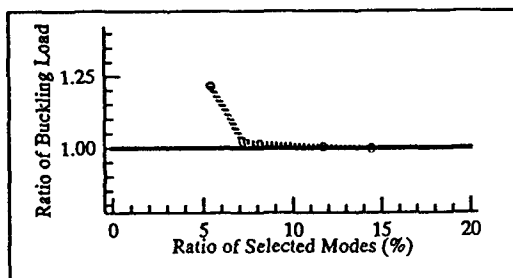


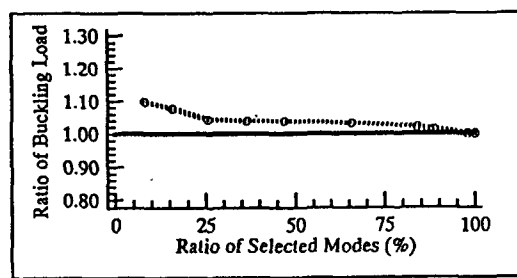
그림 4 복층래티스 돔의 평가계수 분포예

4. 수치해석 결과 및 고찰

본 논문에서는 단층 및 복층래티스 돔의 기하학적 비선형 좌굴해석을 행하였다. 그림 5(a) 및 (b)로부터 복층보다는 단층의 경우 좌굴하중값이 정해에 대단히 빨리 수렴하고 있음을 알 수 있다. 단층래티스 돔의 경우 단지 7%의 고유모드 만으로도 거의 정확한 결과를 얻을 수 있다.



(a) 단층래티스 돔



(b) 복층래티스 돔

그림 5 사용한 고유모드율에 대한 좌굴하중의 수렴 상황

그림 6은 등분포하중을 받는 단층래티스 돔의 좌굴점에 있어서의 각 절점의 처짐상황을 보여주고 있다. 비록, 7.2% 만의 고유모드를 사용하고 있지만 정해와 비교하여 전 절점에서 일치하고 있음을 알 수 있다. 집중하중의 경우에도 거의 비슷한 거동을 보여주고 있지만, 해석을 위해서는 좀더 많은(9.9%) 고유모드가 필요하다.

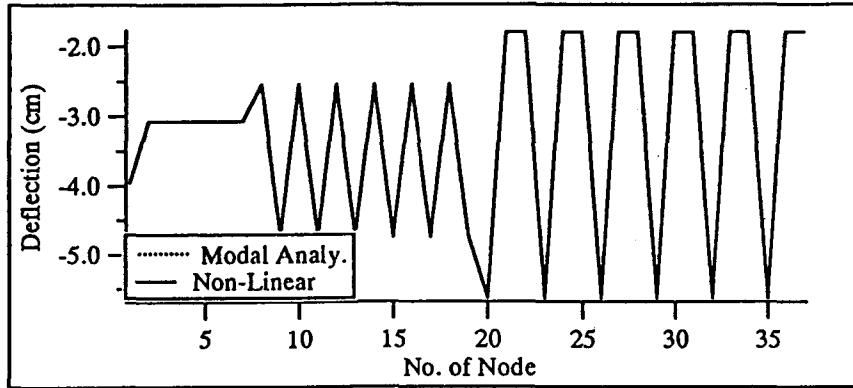


그림 6 단층래티스 돔의 좌굴점에서의 각 절점 처짐비교

그림 7은 반개각 32° , 세장비 100, 등분포 하중을 받는 복층래티스 돔의 좌굴점에서의 처짐비교를 나타내고 있다. 계산을 위하여 7.8%의 모드를 사용하였고, CPU 시간은 일반적인 비선형 해석시간의 약 15% 정도가 소요되었으며, 좌굴하중값은 약 10% 정도 상회하였다.

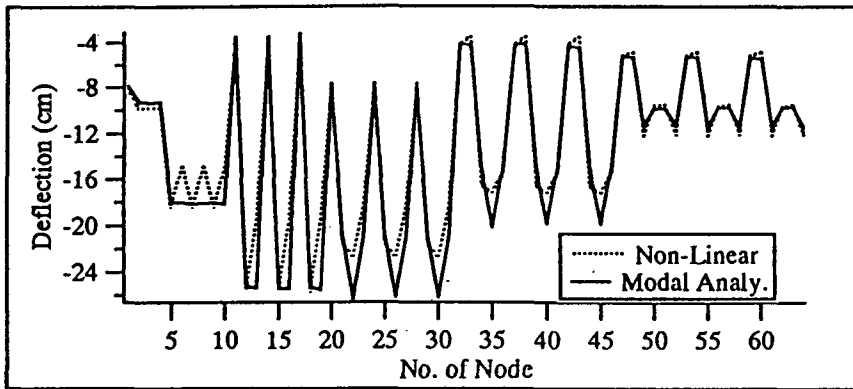


그림 7 복층래티스 돔의 좌굴하중에서의 처짐비교
(반개각 32° , 세장비 100, 등분포 하중)

그림 8은 반개각 32° , 세장비 130, 등분포 하중을 받고 있는 대단히 세장한 부재로 구성된 래티스 돔의 예를 보여주고 있다. 연속체의 경우와 같이 소프트한 모델의 경우 정해에 근사한 거동을 하고 있음을 알 수 있다.

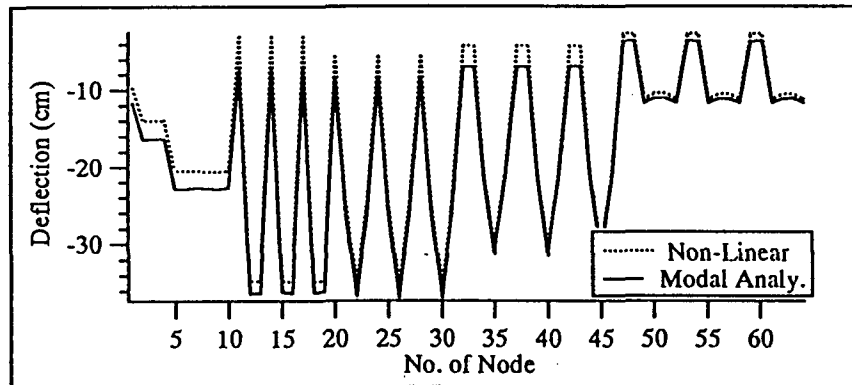


그림 8 좌굴점에 있어서의 각 절점의 처짐비교
(반개각 32° , 세장비 130, 등분포 하중)

5. 결론

본 논문에서는 일반적으로 자유도가 큰 우주대공간 구조물의 좌굴거동을 규명하기 위한 경제적인 해석기법으로 비선형 모드중첩법의 알고리즘을 전개하였다. 몇 개의 해석예에서 볼 수 있듯이 단지 10% 이내의 고유모드를 선택하여, CPU 시간 기준으로 15% 이내에 정해에 가까운 해를 얻을 수 있음이 밝혀졌다. 결과적으로, 본 논문에서 가장 중요한 문제점은 해석모델의 기하학적 특성 및 하중조건 등에 관계 없이 좌굴후에도 정확한 좌굴경로의 추적이 가능한 고유모드 선택을 어떻게 보증할 것인가이다. 따라서, 본 논문에서는 어떻게 고유모드를 택할 것인가에 대하여 다음의 항목을 제안한다.

1. P_i 값에 관계없이 λ_i 가 작은 고유모드로부터 순차적으로 몇 개의 변형모드(모드를 구체적으로 지정할 수 없을 경우에는 예를 들어 전체모드의 5% 이내 등)를 Λ_1 에 의한 선택 모드에 추가하여 해석한다.
2. 모드의 선택에 있어서 외력 모드에 미소한 비대칭성분을 부여하여 Λ_1 를 계산하기 위한 P_i 를 구한다.
3. 비대칭변위에 관한 기하학적 초기불완전성을 부여하여 Λ_1 를 평가한다.

현실적으로는 구조물들이 분기점보다는 극한점이 임계점이 되며, 인위적으로 비대칭성등을 갖는 몇 개의 불완전성(imperfection) 모드를 포함한 Λ_1 를 고려하는 것은 의미가 있다고 사료된다.

참고문헌

1. Kunieda, H., Classical Buckling Load of Spherical Domes under Uniform Pressures, Proc., ASCE, Vol.118, No.EM8, August, 1992, 1513 - 1525.
2. Rijs, E., Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.47, 1984, 219 - 259.
3. Murtha-Smith, E. and Bean, J.E., Double Layer Grid Space Frame Buckling. Int. J. Space Structures, Vol.4, No. 3, 1989, 117 - 127.