

구조물 주변의 Stokes 흐름에 대한
적응적 유한요소 해석을 위한 변절점 요소
**Variable-Node Element for Adaptive Finite Element Analysis
of Stokes Flow around Structure**

최창근* 유원진** 정근영***
Choi, Chang-Koon Yu, Won-Jin Chung, Keun-Young

ABSTRACT

This paper deals with the variable-node element for fluid flow and the adaptive h -version mesh refinement algorithm. The transient element has been formulated by the Galerkin approach in which the pressure term is replaced with the penalty function. The present element having variable mid-side node and is suitable for constructing a locally refined mesh avoiding the use of the highly distorted elements. A modified Gauss quadrature is needed to integrate the element matrices to solve the trouble associated with the discontinuity of derivatives of shape functions.

Several numerical examples show that the proposed element can be effectively used in the h -version adaptive mesh refinement

1. 서론

구조물에 작용하는 유체의 거동을 수치적으로 해석하려는 시도는 오래전부터 있어 왔으나 계산기법과 전산기 자체의 성능에 의하여 제한을 받아 왔다. 최근 급격한 전산기의 발전과 더불어 유한요소법의 괄목할만한 발전으로 인하여 유체에 대한 유한요소 해석이 가능해지고 있다. 유한요소법은 현재까지 유체장을 해석하는데 있어서 유한차분법에 비하여 계산시간이나 소요비용 관점에서 볼때 유한차분법에 비해 우위를 점하지는 못한다. 그러나 유한요소법은 복잡한 형상에 쉽게 적용이 되며 차분법에 의해 발생하는 특이문제에 대해 쉽게 적용할 수 있다. 또한 적응적으로 세분화되는 요소망을 통하여 복잡한 형상을 쉽게 표현하며 해의 국부적인 거동을 관찰하기에 용이하다.

- * 한국과학기술원 토목공학과 교수
- ** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
- *** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

4 절점 요소는 간단성과 사용성에 기인하여 2 차원 흐름을 해석하는데 있어서 가장 많이 사용되어지는 요소이다. 그러나 국부적인 세분화가 진행되고 급한 속도경사의 변화가 있는 지역에서는 전체적인 요소망이 이러한 국부속도경사에 적합하도록 새로 구성되어야 한다. 그러한 요소의 점진적인 구성에 있어서 4 절점만 사용하는 경우에는 종종 크게 찌그러진 요소를 생성시킬 수도 있으며 너무 많은 자유도를 가지게 되어 경제적인 해석시간을 얻지 못할 때도 있다

본 논문에서는 변절점을 이용한 변이요소를 이용하여 초기의 거친 요소망에서 변이영역에서 점점 세분화된 요소망으로 적응적인 요소 세분화를 진행하는 것을 보여준다. 변이요소 (transiton element)는 인접한 요소의 연결 상태를 변경하면서 자동적으로 새로운 요소를 구성한다. 또한 세분화 후에 발생하는 요소는 기존의 형상을 그대로 가지게 되므로 요소가 찌그러지는 일이 생기지 않는다.

본 논문에서는 점성유체 흐름의 가장 간단한 형태인 크리핑 흐름(Stokes flow) 를 대상으로 한다. 레이놀즈수(Re)가 아주 작을 때 관성력은 점성력에 비해 충분히 무시될 수 있으며 지배방정식으로부터 제거된다. 작은 레이놀즈 수는 매우 점성이 큰 흐름이나 느린 흐름에서 나타난다. 제안된 변이요소를 h 버전 요소세분화에 적용하는 수치예제를 해석하였다.

2. 정식화

Stokes 흐름에서 속도를 u , 압력을 p , 점성계수를 μ 라고 할 때 지배방정식은 아래의 두식으로 결정된다.

$$\text{연속 방정식} \quad : \quad u_{,j} = 0$$

$$\text{모멘텀 방정식} \quad : \quad P_{,j} - \mu(u_{,j} + u_{,j}) = 0$$

압력을 지배방정식으로부터 소거시키고 속도만으로 구성된 행렬식을 생성하기 위하여 Penalty 함수 정식화를 통하여 압력항을 Penalty 인자 λ 를 사용해서 다음과 같이 변경한다. 여기서 u, v 는 각각 x, y 방향의 속도이다.

$$P = -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

위 접근을 통하여 비압축성 조건 (연속방정식)은 만족되지 못하지만 거의 영에 접근한 값을 지니게 된다. 이 Penalty 인자 λ 는 수치실험등에 의하여 Reddy 와 hughes 등에 의해서 제안되어진 바가 있다. [2],[5]

Galerkin 접근법과 penalty 정식화를 통하여 요소방정식과 행렬방정식은 아래와 같이 획득된다.

$$\begin{bmatrix} [2K_{11} + K_{22}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{11} + 2K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{12}]^T & [L_{22}] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 부행렬 K와 L은 각각 다음식에 의해 구해진다.

$$K_{ab} = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_a} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x_b} \right] d\Omega, \quad L_{ab} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_a} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x_b} \right] d\Omega$$

3. 변절점 요소

그림 1에서 변절점요소의 자유도를 보였다. 요소 내의 속도장은 절점에서의 속도와 형상함수를 사용하여 요소 내부에서 보간된다.

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad (3)$$

여기서 형상함수는 아래와 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) - \frac{1}{2} (N_j + N_k)$$

$$N_k = \frac{1}{2} (1 + |\xi_k| \xi_k \xi - |\eta_k| \eta_k \eta) (1 + |\eta_k| \eta_k \eta - |\xi_k| \xi_k \eta)$$

$$i = 1, 2, 3, 4; j = \text{int}(1/i) \times 4 + i + 3; k = i + 4$$

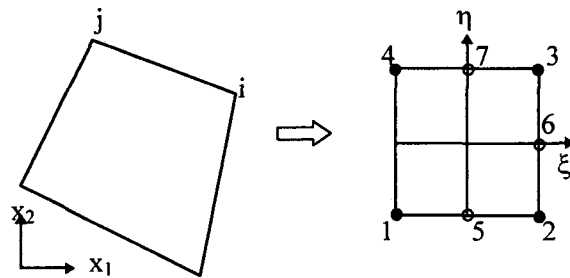


그림 1. 변절점 요소의 자유도

만약 면에 절점이 위치하지 않을 때에는 그에 따른 형상함수는 영이다. 일반적인 수치적분을 통

하여 요소행렬을 구성하는 방법은 요소내부에서 속도 경사의 불연속에 의하여 더이상 유효하지 않으며 적분점의 위치는 수정될 필요가 있다. Gauss 적분점의 위치는 각각의 부영역에서 새로 선정되고 전체 요소행렬로 조합된다. 5 절점의 경우에는 두개의 부영역이 구성되고 6 절점이나 7 절점의 경우에는 4 개의 부영역으로 구성된다. 적분점의 선정위치가 그림 2에 나타나 있다.

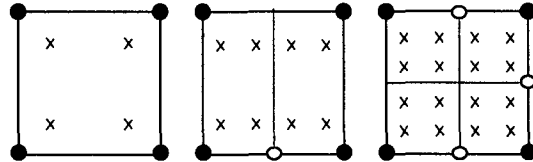


그림 2. 변절점에서 적분점의 위치

표 1. 변경된 적분위치.

적분점	$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$	가중치
1	-0.788675135	0.25
2	-0.211314865	0.25
3	0.211314865	0.25
4	0.788675135	0.25

4. 오차평가

적응적 단계에서 오차평가는 요소 세분화를 수행하기 위한 척도를 제공하는데에 필요하다. 고체역학에서 기본변수가 변위이고 변위의 공간미분에 대한 응력을 대상으로 오차를 평가하듯이 유체역학에서는 기본변수인 속도의 공간미분의 오차를 평가하게된다.

속도 경사의 L_2 놈(norm)은 아래와 같이 정의한다.

$$\|\nabla a\| = \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right)^{1/2} \quad (4)$$

이 때 오차의 L_2 놈은 다음처럼 정의한다.

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla \hat{u}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (5)$$

여기서

∇u : Gauss 적분점에서 정확한 속도경사값
 $\nabla \hat{u}$: Gauss 적분점에서 계산된 속도경사값

그러나 정확한 속도경사값은 대부분의 공학문제에서 제공되어지지 않으며 따라서 오차는 직접적으로 계산되어질 수 없다. 그러나 만약 근사화된 속도 경사 ∇u^* 를 도입하면 오차 L_2 norms은 근사적으로 획득되어 질 수 있으며 이 값을 이용하여 요소세분화를 수행하게 된다.

평활화된 속도경사와 계산된 속도경사 사이의 오차는 다음 식을 이용하여 정의된다.

$$e_{\nabla u}^* = \nabla u^* - \nabla \hat{u} \quad (6)$$

여기서 평활화된 속도 경사는 속도와 같은 형상함수를 이용하여 요소 내부에서 보간되어질 수 있다. 따라서 요소에서 속도 경사는 아래 식과 같다.

$$\nabla u^* = \sum_{i=1}^n N_i \nabla u_i^* \quad (7)$$

유한요소에 의해 계산된 속도 경사와 평활화된 속도 경사사이의 오차는 최소가 되어야 하므로 아래와 같은 범함수(functional)을 최소로 만들어야 한다.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{nel} \left[\int_{\Omega_i} e_{\nabla u}^{*T} e_{\nabla u}^* d\Omega \right] \quad (8)$$

오차 범함수 Π 을 최소로 만들기 위해 속도경사 성분에 대해 아래 식이 성립되어야 한다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nabla u_i^*} = 0 \quad (9)$$

위 식으로부터 각 절점에서 평활화된 속도 경사를 계산할 수 있으며 이 속도경사 ∇u^* 를 이용하여 근사화된 속도 경사와 오차에 대한 L_2 norms을 아래 식과 같이 계산한다.

$$\|\nabla a^*\| = \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right)^{1/2} \quad (10)$$

$$\|e^*\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla \hat{u}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (11)$$

평활화 과정은 각각의 속도 경사 성분에 대해 수행되어야 하고 이때 해에서 발생한 오차는 아래

와 같이 정의되며 이 오차척도를 가지고 세분화를 수행하게 된다.

$$\eta = \frac{\|e^*\|}{\|\nabla a^*\|} \quad (10)$$

5. 수치예제

조각시험

변이요소의 사용성을 검증하기 위한 기초예제로서 전단상태에 대하여 해석을 수행하였다. 조각시험은 그림 3과 같이 네가지 다른 요소망을 이용하여 수행되었다. 각 조각시험 모델은 4절점과 5절점에서 7절점요소까지 모두 사용하였다.

서로 다른 요소망을 통하여 얻어진 해는 모두 같았다. 절점별 변위는 단순 전단 상태를 정확하게 표현하고 있다. 속도 경사값을 계산한 결과 $u_y = 1, u_x = v_x = v_y = 0$ 로 네가지 모델의 경우 모든 적분점에서 일치하였다. 변절점을 어디에 위치시키는 가는 해에 변화를 주지 않았다. 따라서 모든 변절점 요소는 조각시험을 통과하였다..

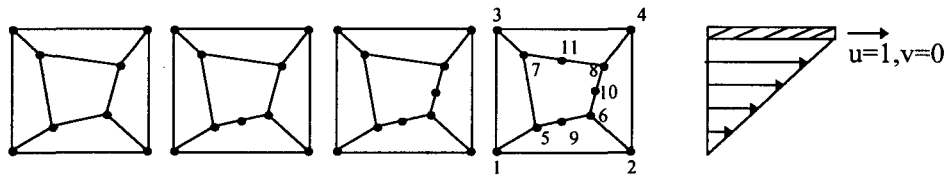


그림 3. 조각시험 모델

1) 절점 좌표와 속도

node	coordinates		velocities	
	x	y	u	v
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	1.00	1.00	0.00
4	1.00	1.00	1.00	0.00
5	0.30	0.30	0.30	0.00
6	0.70	0.40	0.40	0.00
7	0.20	0.80	0.80	0.00
8	0.80	0.70	0.70	0.00
9	0.50	0.35	0.35	0.00
10	0.75	0.55	0.55	0.00
11	0.50	0.75	0.75	0.00

2) 속도 경사

$$\begin{aligned}
 u_{,x} = v_{,x} = v_{,y} = 0 & \quad : \text{ 모든 적분점에서} \\
 u_{,y} = 1 & \quad : \text{ 모든 적분점에서}
 \end{aligned}$$

원형구조물 주변의 흐름

변절점을 이용하여 국부 요소 세분화를 수행하는 실제 예를 해석하였다. 원형 구조물 주변의 요소는 속도경사의 오차가 급격한 곳에서 세분화된다. 초기의 요소망은 그림 4와 같이 100개의 절점과 80개의 요소를 이용하여 구성되었다. 3번의 요소 세분화 과정을 거쳐서 그림 5에서 보인 바와 같이 691개의 절점과 596개의 요소를 가지는 요소망을 구축하였다.

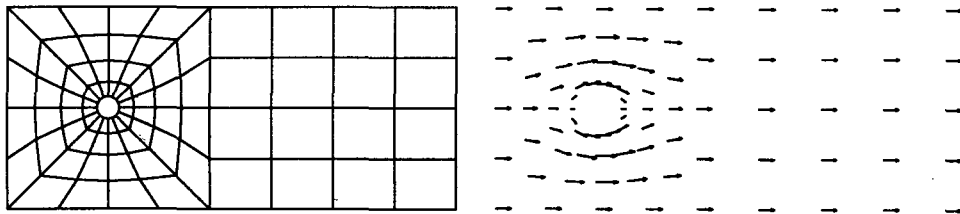


그림 4. 원형구조물 주변의 유동장에 대한 초기 요소망과 속도 벡터

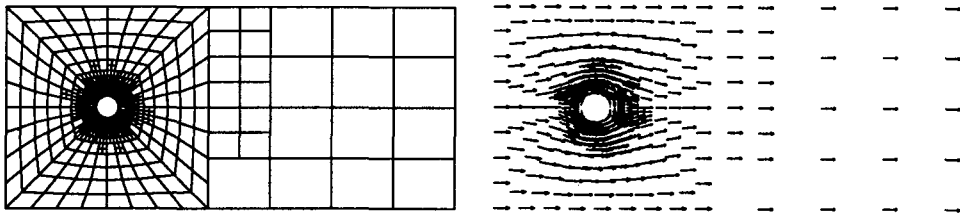


그림 5. 3단계 요소 세분화 후에 구성된 요소망과 속도벡터

6. 결론

Stokes 흐름을 위한 변이요소와 적응적 요소세분화 기법이 연구되었다. 이 연구에서 변절점 요소의 검증은 조각시험을 통하여 시행되었다. 요소크기와 오차 놈의 조화를 통하여 최적의 요소를 얻을 수 있다. 해석후 오차평가와 변절점을 사용하는 적응적 단계를 통하여 유체 흐름에 관한 많은 공학적인 문제가 최소의 요소갯수와 경제적인 계산시간으로 해석될 수 있다.

이 방법은 구조물 주변의 실제공기 유동으로도 확장할 가능성을 지니고 있으며 실제 대기 환경을 묘사하기 위해서 더욱 많은 연구가 필요하다.

참고문헌

1. C.K. Choi and Y.M. Park, (1989), "Nonconforming transition plate bending elements with variable mid-side nodes", *Comp. and Struct.*, 32(2), 295-304
2. J. N. Reddy, (1993), "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill
3. J.T. Oden, et al., (1993), "Progress on adaptive hp-finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations", *Computational Mechanics*, 11,421-432
4. K.H. Huebner, E.A. Thornton, T.G. Byrom, "The finite element method for engineers", Willey Interscience, 1995.
5. T.J. R. Huges, W.K. Liu, A. Brooks, "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty formulation", *J. of Comp. Physics*, 30, 1-60, 1979