

# 측정자료를 이용한 시간영역에서의 구조물의 동특성 추정 Time Domain Identification of Structures Using Test Data

한 종석\*                      정 범석\*\*  
Han, Jong-Seok              Jung, Beom-Seok

---

## ABSTRACT

This paper describes the theory and verification of a method which utilizes the free decay response of a structure to determine its vibration parameters. The theory of the method is based on the formulation of a system matrix, contains information characterizing the complete set of modal parameters of the system, and its eigen-solution problem.

The applicability of the method is verified by simulated free decay response data of a cantilever beam. The method described was used to determine the parameters related to the first five generated modes of vibration of a cantilever beam. It involves two very close natural frequencies which could not be identified using a frequency sweep test (peak amplitude) because of interference between modes.

---

## 1. 서 론

일반적으로 구조동력학에서의 기본적인 문제는 대상 구조물에 대한 진동모우드의 특성을 나타내는 변수를 정확히 결정하는 것이다. 구조물의 고유진동수와 모우드 형상과 같은 변수의 추정은 일반적으로 FFT 혹은 또 다른 주파수영역법에 의해서 수행되어져 왔고, 많은 실험 방법이 구조물의 가진법, 측정해야 할 자료의 양 그리고 해석해야 할 실험자료를 달리하여 제안되어져 왔다. 그러나, 주파수영역에서의 해석법은 어느 정도를 넘어서면 구조물의 진동특성을 정확하게 추정할 수 없는 감쇄율과 고유진동수간의 근접에 대한 한계를 지니고 있다. 이러한 제한은 각 모우드의 고유진동수의 개별적인 추정을 모호하게 하는 각 모우드간의 간섭에 기인한다. 따라서, 대부분의 모우드 실험법은 각 모우드 간의 간섭을 무시한다는 가정에 근거하고 있다.<sup>[1],[3]</sup>

주파수영역법을 사용할 때 발생하는 이러한 문제는 진동 실험에서 시간영역에 기초하는 분석법의 도입을 고려하게 하였다. 주파수영역으로의 전환 없이 시간영역에서 응답함수를 직접 사용하게 되면 주파수영역에서 발생하는 과도한 감쇄 혹은 근접한 고유진동수에 의해서 발생하는 모우드간의 간섭에 대한 가정이 필요 없게 되고 이러한 경우에 필요한 별도의 과정 또한 수행하지 않아도 된다.

---

\* 대림산업(주) 기술연구소 연구원

\*\* 대림산업(주) 기술연구소 선임연구원

Ibrahim에 의해서 제시된 알고리즘은 여러 가지 구조물로부터 얻어진 실험 자료를 해석하는데 다양하게 사용되어져 왔다. 이 알고리즘은 자유응답함수로부터 다수의 모우드의 변수를 계산하는데 사용자의 판단이 최소화된 입력치만을 요구하는 기계적인 기법이고 또한 구조계의 다수의 모우드의 변수를 평가하는데 한 번의 컴퓨터 실행이면 충분하다.<sup>[2],[4]</sup>

본 연구에서는 Ibrahim Time Domain(ITD) 알고리즘의 검증 및 적용성 평가를 위하여 모우드의 변수를 알고 있는 선형, 다중모우드 모형에 대한 자유응답 데이터를 모의실험에 의해서 측정하였다. 모형은 일정한 두께를 갖는 등방성 캔틸레버보로써 3개의 지점에 대해서 처음부터 5개의 해석적 모우드의 자유응답을 선형 조합한 자유응답함수로 구성되어 있고, 고유 진동수와 감쇄율 및 응답 수준은 각 모우드 모델에 대해서 임의로 결정하였으며, 각 신호의 RMS 기준으로 계산된 다양한 수준의 노이즈가 자유응답 함수에 추가되었다.

## 2. ITD 알고리즘 이론

### 2.1 고유치 해석법으로의 접근

자유응답의 진행시 단자유도 구조계를 지배하는 특성방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

여기에서  $M$ ,  $C$  와  $K$  는  $n \times n$  행렬이고,  $x$ ,  $\dot{x}$  그리고  $\ddot{x}$  는  $n$  차의 벡터이다. 이 특성방정식의 일반적인 해는 다음과 같다.

$$x = \psi e^{\lambda t} \quad (2)$$

따라서 식 (1)에 식 (2)를 대입하면 다음과 같은 방정식이 유도된다.

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]\psi = 0 \quad (3)$$

위의 방정식 (3)으로 부터 구조계의 특성방정식의 근인  $2n$ 개의  $\lambda$ 가 정의되고, 각각의 근에 대하여 구조계의 좌표에 대한 상대 변위인  $\psi$ 가 정의된다.

모우드 실험의 일반적인 목적은 실험 데이터로부터 식 (3)을 만족시키는  $\lambda$ 와  $\psi$ 를 결정하는 것이다. 이에 필요한 실험 데이터는  $n$ 개의 측정점에서 측정되었다고 가정된 변위, 속도 혹은 가속도 응답중 하나이다.  $m$ 개의 진동 모우드를 갖는 선형 다중자유도 구조계에 대하여 측정점  $i$ 와 특정 시간  $t_j$ 에서의 자유응답은 각 모우드의 개별적인 응답의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_i(t_j) = x_{ij} = \sum_{k=1}^{2m} \psi_{ik} e^{\lambda_k t_j} \quad (4)$$

여기에서  $i$ 는 측정점이고  $j$ 는 시간이며  $k$ 는 모우드를 나타내는 첨자이다. 또한  $\psi_{ik}$ 와  $\lambda_k$ 는 일반적으로 복소수이고, 특성 방정식의 근의 개수가  $2m$ 개이므로 합이  $2m$ 개까지 확장되어 있다.

식 (4)를 이용하여  $2m$  개의 측정점과  $s$  개의 시간에서의 자유응답값을 행렬 형태로 배열하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2m,1} & x_{2m,2} & \cdots & x_{2m,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1s} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{2m,1} & \psi_{2m,2} & \cdots & \psi_{2m,s} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \cdots & e^{\lambda_1 t_s} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \cdots & e^{\lambda_2 t_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_{2m} t_1} & e^{\lambda_{2m} t_2} & \cdots & e^{\lambda_{2m} t_s} \end{bmatrix} \quad (5)$$

또는 간단하게 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\Phi] = [\Psi][A] \quad (6)$$

$(2m \times s) \quad (2m \times 2m)(2m \times s)$

식 (4)를 이용하여 동일한 측정점에서 측정된  $(\Delta t)_1$  시간 이후의 자유응답 신호를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_i [t_j + (\Delta t)_1] &= \sum_{k=1}^{2m} \psi_{ik} e^{\lambda_k [t_j + (\Delta t)_1]} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} [\psi_{ik} e^{\lambda_k (\Delta t)_1}] e^{\lambda_k t_j} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \hat{\psi}_{ik} e^{\lambda_k t_j} \end{aligned} \quad (7)$$

또는, 행렬 형태로  $2m$  개의 측정점과  $s$  개의 시간에 대해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\hat{\Phi}] = [\hat{\Psi}][A] \quad (8)$$

$(2m \times s) \quad (2m \times 2m)(2m \times s)$

$s \geq 2m$ 인 경우  $[\Psi]$  와  $[\hat{\Psi}]$ 는 식 (6)과 식 (8)에서  $[A]$ 를 제거하여 시스템 행렬  $[A]$ 로 표현하면 다음과 같은 관계가 된다.

$$[A][\Psi] = [\hat{\Psi}] \quad (9)$$

$(2m \times 2m)(2m \times 2m) \quad (2m \times 2m)$

여기에서  $[A]$ 는 다음의 관계를 만족시키는 행렬이다.

$$[\Phi]^T [A]^T = [\hat{\Phi}]^T \quad (10)$$

$(s \times 2m)(2m \times 2m) \quad (s \times 2m)$

$[\Psi]$ 와  $[\hat{\Psi}]$ 의 열은 식 (7)에 의해서  $\{\hat{\psi}\}_k = e^{\lambda_k (\Delta t)_1} \{\psi\}$ 의 관계를 갖게 되므로 이제까지의 과정은 하나의 고유치 문제로 대치되게 된다. 이러한 고유치문제의 방정식은 다음과 같다.

$$[A]\{\psi\}_k = e^{\lambda_k (\Delta t)_1} \{\psi\}_k \quad (11)$$

구조계의 고유진동수와 감쇄율은  $[A]$ 의 고유치로부터 구할 수 있고 식 (11)의 고유치는 다음과 같다.

$$e^{\lambda_k(\Delta t)_1} = a_k + ib_k \quad (12)$$

이 식으로 부터 다음의 값들을 유도할 수 있다.

$$(\omega_d)_k = 2\pi f_k = \frac{1}{(\Delta t)_1} \tan^{-1}(b_k/a_k) \quad (13)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2(\Delta t)_1} \ln(a_k^2 + b_k^2) \quad (14)$$

$$(C/C_c)_k = \frac{\sigma_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + (\omega_d)_k^2}} \quad (15)$$

[A]의 고유 벡터는 얻고자 하는 구조물의 모우드형상이 된다.

## 2.2 변형측정점과 MCF

ITD 알고리즘의 실질적인 적용에서의 고려해야 할 사항으로 사용 가능한 자유응답측정점의 수가 [Ø]의 행의 수보다 적은 경우의 데이터 처리가 있으며,  $m$ 이 응답에 기여한 구조적인 모우드의 수보다 큰 경우에 얻고자 하는 구조적인 모우드에 대응하는 [A]의 고유치와 노이즈 모우드에 대응되는 고유치와를 구별할 필요가 있다. 이러한 두가지 경우에 따라 해석법을 달리하므로 실험 자료를 이용한 해석의 첫 번째 단계는 자유도의 수를 결정하는 것이다.

이용할 수 있는 측정점의 수( $p_0$ )가 얻고자 하는 계산상의 자유도의 수 보다 적을 때 [Ø]의 절반에 미치지 못하는 행만이 원시의 응답 함수로 채워지게 된다. 이러한 상황에서 두 응답행렬 [Ø], [Ø]의 행을 자유도와 같게 하기 위해서 변형측정점<sup>[3]</sup>이 도입이 필요하게 된다. 변형측정점은 처음  $p_0$ 개의 행에 위치한 원시의 응답함수에 두 응답행렬의 상부행렬이 다 채워질 때까지 두 번째 시간 증가치  $(\Delta t)_2$ 의 배수만큼 응답함수를 옮김으로써 구해진다. 만약, 평가된 동특성이 수렴되었다고 가정하면 변형측정점을 더하는 이러한 과정이 시스템행렬의 고유치에 수학적인 영향을 끼치지 않는다. 반면에, 자유도가  $p_0$ 보다 적은 경우에는 자유도 만큼의 응답함수만이 해석에 사용된다.

두 응답행렬의 하부행렬은 상부행렬에 세 번째 시간 증가치  $(\Delta t)_3$  만큼 지체된 신호를 같은 방법으로 배열하면 얻을 수 있다.

만약 동일한 측정점에서 얻어진 두 개의 자유응답함수의 집단이 임의의 시간  $\Delta t$ 만큼 차이가 있고, 응답행렬의 서로 다른 행을 이루고 있다면, 이 두 행에 대응되는 각각의 계산된 [A]의 고유벡터  $\psi_{ik}$ 와  $\psi_{ik}^*$ 는 identification이 수렴된 경우에 각각의 선형 구조계의 모우드  $k$ 에 대해서 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\psi_{ik}^* = \psi_{ik} e^{\lambda_k \Delta t} \quad (16)$$

식 (11)에서 표현된 기본적인 성질과 응답행렬의 상부행렬과 하부행렬간의 시간 증가치를 이용하여 얻고자 하는 구조적인 모우드와 노이즈 모우드와의 구별을 위해서 고안된 Modal

Confidence Factor, MCF,를 계산하게 된다. 하나의 MCF는  $[A]$ 로 부터 계산된 각각의 고유벡터에서 처음의  $p_0$ 개 만큼 각각 계산된다. 수렴된 선형 구조계에서모우드의 MCF의 크기는 1에 근접하고 위상은  $0^\circ$ 에 근접한 균을 이루게 된다. 이에 반해 노이즈 모우드에 대해서 계산된 값은 무작위로 분포된 형상을 나타낸다. MCF를 계산하기 위해서는 하부행렬의 처음  $p_0$ 개의 계산된 고유벡터와 이 값들에 대응되는 기대값과의 비교를 실행해야 한다. 기대값은 상부행렬의  $p_0$ 개의 요소에 대응되는 고유벡터와 계산된 특성방정식의 근  $\lambda_k$ 의 지수함수,  $e^{\lambda_k(t)}$ 의 곱을 식 (16)에 대입하여 구할 수 있다. 따라서, MCF 값은 계산된 고유치와 이에 대응되는 기대값 사이의 절대값의 비와 위상의 차이로 정의될 수 있고, 위상은  $-180^\circ$ 와  $180^\circ$ 사이의 범위에 정규화된다. 계산된 MCF 값이 절대값이 100%, 위상이  $0^\circ$ 부근의 값을 가질 때 선형 구조계의 모우드에 대한 identification의 정확도를 판단할 수 있는 필요조건을 충족시킨다고 말할 수 있다.

MCF 값은 위와 같은 방법으로  $p_0$ 개의 측정점과 그에 대응되는 각각의 계산된 복소수 고유치에 대해서 계산된다. MCF 값을 좀더 단순하게 표현하기 위하여 각 모우드에 대해서 Overall MCF, OAMCF,를 사용할 수 있으며, OAMCF값은 단순히 최소한 95%이상의 절대값의 비와 위상에서  $0.0^\circ$ 로 부터  $10^\circ$ 이내의 MCF 값을 갖는 측정점의 백분율로 계산된다.

### 3. 수치예제

#### 3.1 모사 자유응답 함수의 구성

본 예제에서 사용된 모형은 균일한 단면을 가진 중공 캔틸레버보이다. 캔틸레버보의 단면형상은 그림 3.1과 같고, 유한요소 모형은 일정한 길이의 10개의 요소로 구성되어져 있다.

그림 3.1에서 보는 바와 같이 본 예제에서 사용한 캔틸레버보의 모형은 한 절점에 회전과 변위 두 개의 자유도를 가지며, 계산된 고유벡터는 결과의 비교에 더욱 적합하게 사용될 수 있도록 관성 행렬에 대해서 직교성을 만족하는 정규화된 벡터로 재조정하였다. 수직방향의 모우드 변위는 구조물의 10개의 절점에서 구하였고 그 결과는 표 3.1에 나타내었다.

고유치 해석결과에서처음 5개의 모우드 형상을 이용하여 세 절점(No. 3, 7 그리고 11)의 자유응답 함수를 형성하였고, 각 절점의 구하고자 하는 자유응답 함수에 대해서 고유진동수, 감쇠율, 응답진폭은 모우드별로 임의의 선정하였다. 그리고, 응답에 대한 각 모우드의 기여도는 적합한(양수 또는 음수) 모우드 형상에 cosine함수를 곱하여 표시하였다. 즉, 각 자유응답함수는 다음의 식과 같이 형성된다.

$$x_i(t_j) = \sum_{k=1}^5 \psi_{ik} e^{-\sigma_k t_j} \cos[(\omega_d)_k t_j] \quad (17)$$

자유응답 함수는 위의 식에 의해서 1000개의 데이터를 모사 하였고, sampling rate은 400개/sec을 사용하였다. 모사된 자유응답 함수에 일정하게 분포된 노이즈가 인위적으로 각 함수별로 추가되었고, 노이즈는 노이즈가 없는 각 함수의 1000개의 데이터의 RMS를 구하여 RMS의 백분율에 기준하여 추가되었다. 각 모우드 모형을 형성하는데 사용된 모우드 형상의 순서는 유한요소 해석결과를 기준으로 결정하였다.

Identification 결과를 보다 쉽게 확인하기 위해서 고유진동수는 유한요소해석의 결과를 사용하지 않고 임의의 값을 선정하여 사용하였다. 본 예제에서는 각 5개의 모우드의 고유진동수를 2Hz 에서 10Hz 까지 2Hz 간격으로 선정하였고, 모우드 감쇄율과 응답 크기는 각 모우드에 모두 동일하게 적용하였다. 위에서 모사된 기본 모형은 모우드 감쇄율과 추가된 노이즈의 크기에 의해서 특성지어지고, 이 모형을 간단히 기준모형이라고 한다.

### 3.2 기준모형에 대한 결과

본 예제에서는 시간 증가치  $(\Delta t)_1$ ,  $(\Delta t)_2$ ,  $(\Delta t)_3$  는 8/SF, 10/SF, 5/SF(SF : sampling frequency)를 사용하였다.

그림 3.2는 본 예제에서 사용된 3개 모형의 3번 절점에서의 신호를 보여준다. 그림 3.2(a)는 감쇄율( $C/C_c$ )이 0.1%이고 노이즈를 첨가하지 않았으며, 그림 3.2(b)는 감쇄율은 동일하고 노이즈를 10% 첨가한 신호이다. 그림 3.2(c)는 0.1% 감쇄율과 20% 노이즈에 대한 신호를 나타낸다. 위의 신호들에 대한 ITD 알고리즘을 이용한 해석결과는 표 3.2, 3.3 과 3.4와 같다.

### 3.3 근접한 고유진동수를 갖는 신호에 대한 결과

모우드 identification 기법이 갖고있는 전형적인 문제는 두 개 혹은 그 이상의 구조적인 모우드가 동일한 고유진동수를 갖고 있을 때 정확한 모우드 변수를 결정하는 일이다. 구조물을 가진할 때 사용한 하중의 분배를 가정하지 않고 범위가 넓은 하중으로 가진할 때 하중에 의해서 발생된 응답에서의 두 개의 근접된 고유진동수를 갖는 모우드의 응답수준은 거의 동일하게 된다. 만약 신호해석에 T 초의 측정 데이터가 사용되었다면, 이에 대응되는 주파수영역 함수는 Fourier 방법에 의해서  $1/T$  Hz의 해상도에서 결정되는데, 예제에서 사용된 모형은 2.5초간의 신호를 사용했으므로 해상도는 0.4Hz가 된다. 주파수응답 함수나 주파수 스펙트럼의 응답최고치의 시각적인 결정에 의존하는 방법에 의해서 정확한 모우드 변수를 얻는 것은 고유진동수의 분리가 해상도의 값에 접근하면 분별력을 잃게 된다.

ITD알고리즘에서의 진동수에 대한 해상도를 알아보기 위해서 3번과 4번 모우드의 고유진동수가 6Hz로 동일한 모형을 구성하였다. 그림 3.3과 표 3.5는 두 개의 모우드의 감쇄율을 1%와 3%로 정한 모형에 대한 identification결과이다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 시간영역에서의 동특성 추정기법의 하나인 Ibrahim Time Domain기법에 대한 검증과 적용성을 평가하였으며, 해석결과에 따른 결론을 요약하면 다음과 같다.

- [1] ITD 알고리즘은 특별한 가정이 없이 유도되므로 사용성에서 많은 제한을 받지않고 정확한 동특성 추정이 가능하였다.
- [2] 모우드 간섭에 의해서 주파수 영역에서는 추정하기 힘든 근접한 모우드에 대한 효과적인 추정이 가능하였다.
- [3] 추정된 동특성치에 MCF의 개념을 도입하여 추정된 값의 정확성을 판별할 수 있다.

[4] 각 모드별 감쇄계수의 평가가 가능하여 이를 이용한 구조동력학적 문제해결에 효과적으로 사용될 것으로 판단된다.

[5] 짧은 시간에 측정된 데이터를 가지고도 효과적으로 구조물의 동특성을 판별할 수 있는 경제적인 방법이다.

#### 참 고 문 헌

1. Pappa, R. S. and Ibrahim, S. R., "A Parametric Study of the Ibrahim Time Domain Modal Identification Algorithm," *Shock and Vibration Bulletin*, No. 51, Part 2, Sept. 1979, pp.165-170.
2. Ibrahim, S. R., and Milulcik, E. C., "A Time Domain Modal Vibration Test Technique," *Shock and Vibration Bulletin*, No. 43, Part 4, Aug. 1973, pp.21-37.
3. Ibrahim, S. R., "Modal Confidence Factor in Vibration Testing," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol 15, No. 5, Sept.-Oct. 1978, pp.313-316.
4. Ibrahim, S. R., and Milulcik, E. C., "The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses," *Shock and Vibration Bulletin*, No. 46, Part 5, Aug. 1976, pp.187-196.
5. Ibrahim, S. R., and Milulcik, E. C., "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from Free Responses," *Shock and Vibration Bulletin*, No. 47, Part 4, Sept. 1977, pp.183-198.

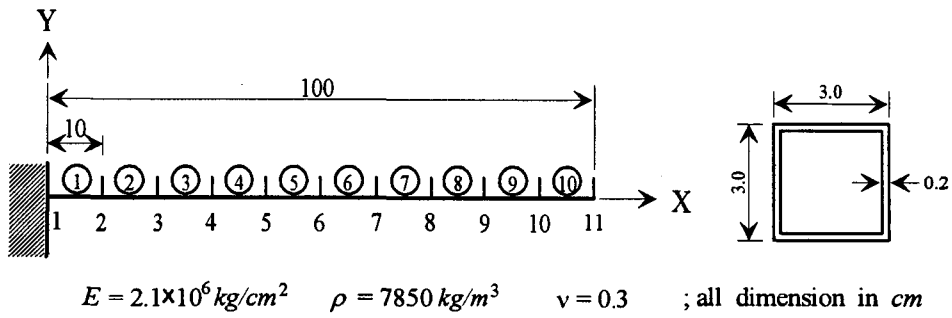


그림 3.1 캔틸레버보 모형의 제원 및 재료물성

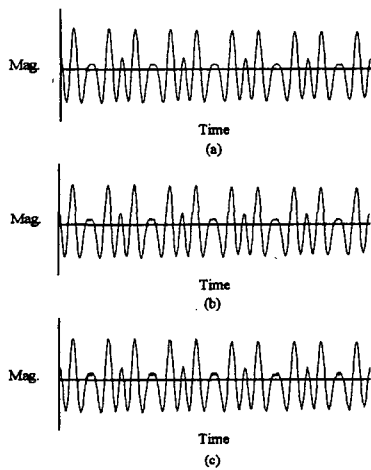


그림 3.2 모사된 자유응답신호

- (a)  $C/C_c = 0.1\%$  all modes ; 0% noise
- (b)  $C/C_c = 0.1\%$  all modes ; 10% noise
- (c)  $C/C_c = 0.1\%$  all modes ; 20% noise

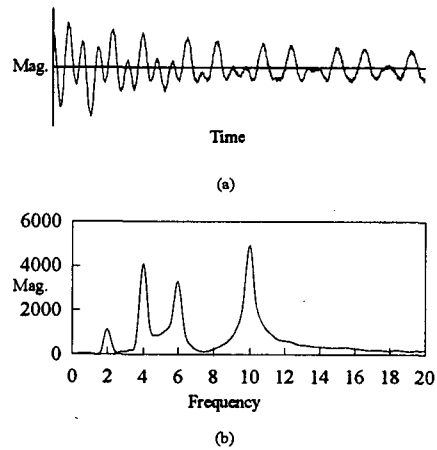


그림 3.3 두개의 모우드가 증첩된 경우

- (a) Free response
- (b) Frequency spectrum



표 3.1 수치모형의 수직방향 모우드변위

Mode no. Node no.	1	2	3	4	5
3	3.017	14.223	28.571	35.677	-31.324
7	21.784	27.848	-22.392	-15.456	-33.246
11	47.240	-47.243	47.263	-47.327	-47.464

표 3.2 노이즈 0% 기준모형에 대한 identification 결과

$C/C_c = 0.1\%$  in all modes; 0% noise;  $m = 30$  and  $s = 400$

Mode no.	Frequency (Hz)	$C/C_c$ (%)	Node no.	모우드변위	MCF		OAMCF(%)
					절대값	위상차	
1	2.0000	0.11	3	3.026	0.9951	0.583	100
			7	21.767	0.9989	0.018	
			11	47.240	0.9988	0.006	
2	4.0027	0.12	3	14.310	0.9987	0.897	100
			7	27.836	0.9995	0.322	
			11	-47.243	0.9989	0.424	
3	5.9992	0.10	3	28.531	0.9996	0.077	100
			7	-22.417	0.9991	0.030	
			11	47.263	0.9979	0.192	
4	7.9998	0.10	3	35.695	0.9999	0.118	100
			7	-15.436	0.9990	0.044	
			11	-47.327	0.9989	0.044	
5	9.9991	0.12	3	-31.327	0.9996	0.056	100
			7	-33.289	0.9993	0.020	
			11	-47.464	0.9974	0.035	

Table 3.3 노이즈 10% 기준모형에 대한 identification 결과

$C/C_c = 0.1\%$  in all modes; 10% noise;  $m = 30$  and  $s = 400$

Mode no.	1	2	3	4	5
Frequency(Hz)	2.0003	3.9968	6.0011	8.0006	9.9991
$C/C_c$ (%)	0.12	0.09	0.11	0.09	0.11

표 3.4 노이즈 20% 기준모형에 대한 identification 결과

$C/C_c = 0.1\%$  in all modes; 20% noise;  $m = 25$  and  $s = 380$

Mode no.	1	2	3	4	5
Frequency(Hz)	2.0049	3.9998	6.0009	7.9987	10.0024
$C/C_c$ (%)	0.08	0.12	0.11	0.13	0.07

표 3.5 두 개의 모우드가 중첩된 경우에 대한 identification 결과

(2개의 모우드가 6 Hz에서 중첩 :  $C/C_c = 1, 3\%$  and  $10\%$  noise)

Mode no.	1	2	3	4	5
Frequency(Hz)	2.0027	4.0013	5.9985	6.0021	10.0005
$C/C_c$ (%)	1.96	2.03	0.96	3.02	2.01