

사장교 케이블 단면적의 점진적 최적화에 관한 연구

A study on the Evolutionary Optimization of Cable Area of the Cable-Stayed Bridge

최창근* 이태열*** 홍현석** 김은성***

Choi, Chang-Koon Lee, Tae-Yeol Hong, Hyun-Seok Kim, Eun-Sung

ABSTRACT

This study presents the optimization technique to determine the cable areas of the cable-stayed bridge. The optimization method presented in this paper is based on an evolutionary procedure, in which the area of high stressed cable is increased step-by-step until an optimal area of the cable is obtained. A comparison between the maximum values of the present method and those of the cable-stayed bridge that has the same cable area shows the advantages of the present method.

1. 서론

사장교는 사장 케이블의 인장력을 조절하여 교량 각 구조부재의 단면력을 가능한한 균등하게 분배시킴으로써, 일반적인 거더교에 비하여 단면의 크기를 줄일 수 있는 교량 형식이다.[1]

사장교의 설계는 일반적으로 예비설계와 본설계로 나누어 수행되는데, 예비설계는 각 구조형식별 비교에 따른 구조체계의 결정, 재료의 선정 및 주요 단면형태의 결정 등을 수행하는데 그 목적이 있고, 본설계는 결정된 구조체계와 단면을 가지고 구조해석을 하는데 그 목적이 있다.

예비설계 단계에 있어서 사장교의 전체 강성에 영향을 주는 여러 변수들의 영향을 분석하는 것은 매우 중요하다. 특히 케이블의 단면적에 있어서, 단면적을 일률적으로 증가시킨 경우의 영향, 내측 케이블과 외측 케이블의 강성비에 대한 영향 등은 연구되어 왔다. 그러나, 이러한 연구는 각 케이블의 단면적이 다른 경우에 대해서는 고려가 되어있지 않다.[2][3]

본 연구에서는 최적의 케이블 단면적을 구하고, 각 케이블의 단면적을 다르게 할 경우 사장교 구조계에 미치는 영향을 평가하고자 한다.

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

*** 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

2. 사장교의 정적 비선형 해석

2.1. 사장교의 비선형 거동

일반적으로 사장교는 비선형 거동(Nonlinear Behavior)을 하게 된다. 사장교 해석시 비선형성(Nonlinearity)의 주된 원인은 케이블의 비선형 거동, 거더와 주탑의 P-delta 효과, 재료의 비선형성(Material Nonlinearity) 등이 있다. 사장교 해석시 보통의 하중 상태에서는 재료의 비선형성은 무시할 수 있으므로 본 연구에서는 케이블의 비선형 거동과 거더와 주탑의 P-delta 효과만을 고려하였다.[4]

2.2. 부재의 비선형 거동과 강성 행렬 구성

2.2.1. 케이블 부재의 강성 행렬

그림 1 과 같이 케이블 Sag 의 영향으로 발생하는 비선형 거동을 고려하는 간편한 방법은, 현수 곡선을 이루는 케이블 부재를 직선 부재로 가정하고, 그 대신 재료와 기하학적인 영향을 고려할 수 있는 등가탄성계수(Equivalent Modulus of Elasticity)를 사용하는 방법이다. 이 개념은 Ernst 에 의해 처음 제안되었고, 여러 연구자들에 의해 수정되었으며 검증된 바 있다. 등가탄성계수는 식 (1),(2)에 나타나 있다.[5]

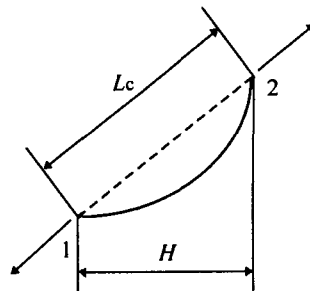


그림 1 Cable Element

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(wH)^2 (T_i + T_f) AE}{24T_i^2 T_f^2}} \quad (1)$$

여기서, E_{eq} 는 케이블의 등가탄성계수

E 는 케이블의 탄성계수

w 는 케이블의 단위길이당 무게

H 는 케이블의 수평투영길이

A 는 케이블의 단면적

T_i 는 하중 증분을 시키기 전의 케이블 장력

T_f 는 하중 증분을 시킨 후의 케이블 장력이다.

$$[K_m] = \begin{bmatrix} AE_{eq} / L_c & -AE_{eq} / L_c \\ -AE_{eq} / L_c & AE_{eq} / L_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2.2. 휨과 압축력을 동시에 받는 부재의 강성 행렬

휨에 의한 변형과 압축에 의한 변형이 큰 부재에서는 휨과 압축력의 상호작용 때문에 발생하는 비선형성을 고려하기 위하여 안정 함수(Stability Function)를 계수로 도입하여 그 영향을 반영할 수 있다.[6] 그림 2 와 같은 국지 좌표계에서의 2 차원 보요소(Beam Element)의 강성 행렬은 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

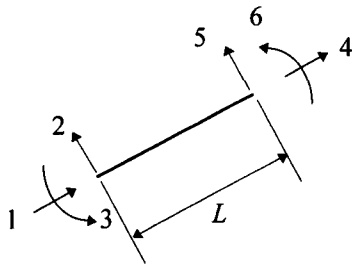


그림 2 Beam Element

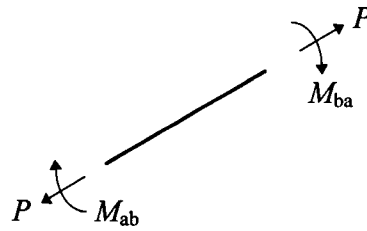


그림 3

$$[K_m] = \begin{bmatrix} k_{11}S_5 & 0 & 0 & k_{14}S_5 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}S_1 & k_{23}S_2 & 0 & k_{25}S_1 & k_{26}S_2 \\ 0 & k_{32}S_2 & k_{33}S_3 & 0 & k_{35}S_2 & k_{36}S_4 \\ k_{41}S_5 & 0 & 0 & k_{44}S_5 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}S_1 & k_{53}S_2 & 0 & k_{55}S_1 & k_{56}S_2 \\ 0 & k_{62}S_2 & k_{63}S_4 & 0 & k_{65}S_2 & k_{66}S_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 $k_{11} \sim k_{66}$ 은 일반 휨 부재의 강성 행렬의 항들과 동일하다.

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = \frac{AE}{L} \\ k_{22} &= k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = \frac{12EI}{L^3} \\ k_{23} &= k_{32} = k_{26} = k_{62} = -k_{35} = -k_{53} = -k_{56} = -k_{65} = \frac{6EI}{L^2} \\ k_{33} &= k_{66} = \frac{4EI}{L} \\ k_{36} &= k_{63} = \frac{2EI}{L} \end{aligned} \quad (4)$$

안정 함수는 그림 3 과 같은 축력 P 와 재단 모멘트 M_{ab}, M_{ba} 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

압축력일 경우	인장력일 경우
$S_1 = (xL)^3 \sin(xL) / 12R_c$ $S_2 = (xL)^2 [1 - \cos(xL)] / 6R_c$ $S_3 = (xL) [\sin(xL) - (xL) \cos(xL)] / 4R_c$ $S_4 = (xL) [(xL) - \sin(xL)] / 2R_c$ $S_5 = 1 / [1 + (EAR_{cm}) / 4P^3 L^2]$ 여기서 $x = (P / EI)^{1/2}$ $R_c = 2 - 2 \cos(xL) - (xL) \sin(xL)$ $R_{cm} = (xL) (M_{ab}^2 + M_{ba}^2) [\cot(xL) + (xL) \csc^2(xL)]$ $- 2(M_{ab} + M_{ba})^2$ $+ (M_{ab} M_{ba}) [1 + (xL) \cot(xL)] \times [2(xL) \csc(xL)]$	$S_1 = (xL)^3 \sinh(xL) / 12R_t$ $S_2 = (xL)^2 [\cosh(xL) - 1] / 6R_t$ $S_3 = (xL) [(xL) \cosh(xL) - \sinh(xL)] / 4R_t$ $S_4 = (xL) [\sinh(xL) - (xL)] / 2R_t$ $S_5 = 1 / [1 - (EAR_{tm}) / 4P^3 L^2]$ 여기서 $x = (P / EI)^{1/2}$ $R_t = 2 - 2 \cosh(xL) + (xL) \sinh(xL)$ $R_{tm} = (xL) (M_{ab}^2 + M_{ba}^2) [\coth(xL) + (xL) \operatorname{cosech}^2(xL)]$ $- 2(M_{ab} + M_{ba})^2$ $+ (M_{ab} M_{ba}) [1 + (xL) \coth(xL)] \times [2(xL) \operatorname{cosech}(xL)]$

그러나 $S_1 \sim S_4$ 에서 x 가 0에 가까운 값일 때 분모 R_c, R_t 값이 0에 가까운 값을 가지므로 수치적으로 매우 불안정한 결과를 보인다. 따라서 본 연구에서는 $S_1 \sim S_4, R_c, R_t$ 를 Taylor 급수 전개를 하고 고차항을 생략하여 프로그램화 하였다.

2.2.3. 전체 구조 강성 행렬

전체 구조 강성 행렬은 국지 좌표계의 강성 행렬인 식(2)와 식(3)을 전체 좌표계로 조합(Assemble)함으로써 구할 수 있다. 국지 좌표계의 강성 행렬은 상수가 아니고, 각 부재의 변형 상태에 따라 다르므로 해석시에는 구조 강성 행렬을 재계산하는 Iteration이 필요하게 된다.

3. 사장교 케이블 단면적의 점진적 최적화

구조물 형상 최적화 문제에 있어서 ESO(Evolutionary Shape Optimization)는 Algorithm이 간단하면서도 FEM과 쉽게 연결시켜 사용할 수 있기 때문에 최근 많은 연구가 진행되고 있다. 이는 해석 후 응력이 작게 걸리는 부분을 점진적으로 제거해 나가면서 주어진 하중에 보다 효율적으로 저항하도록 하는 방법이다. 이와 유사한 개념을 사장교 케이블의 최적화 문제에도 적용할 수 있다. 즉, 초기 단면적으로 해석을 한 후, 최대의 응력이 걸리는 케이블 부재의 단면적을 점진적으로 증가시켜가면서 반복 계산을 하면 각각 다른 케이블 단면적을 얻을 수 있다. 그림 4에 케이블 단면적의 점진적 최적화 Algorithm을 개괄적으로 나타내었다.

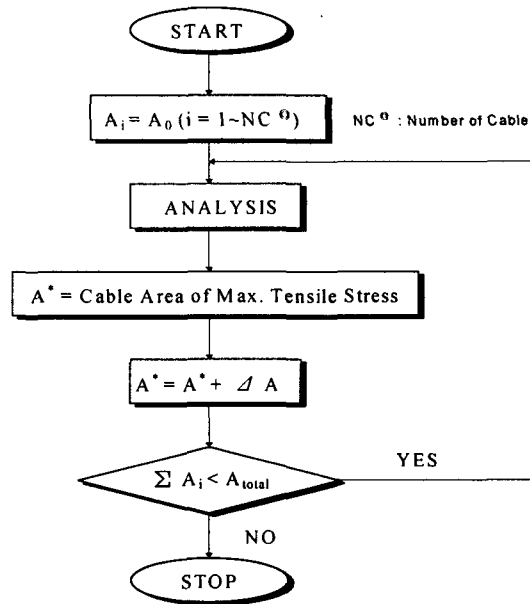


그림 4 케이블 단면적의 점진적 최적화 Algorithm

4. 예제 해석

그림 5와 같은 대상 구조물에 대하여 해석을 수행하였다. 하중은 거더에 등분포 하중 $w = 20\text{kN/m}$ 를 적용하였고, 케이블의 탄성 계수 = $2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, 거더와 주탑의 탄성 계수 = $2.35 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ 를 사용하였으며 $A_0 = 0.001 \text{ m}^2$, $\Delta A = 0.0005 \text{ m}^2$, $A_{\text{total}} = 0.05 \text{ m}^2$ 일 때 해석을 수행하였다. Iteration 단계에 따른 케이블 단면적, 케이블 장력, 케이블 인장 응력의 변화는 각각 그림 6~8과 같다.

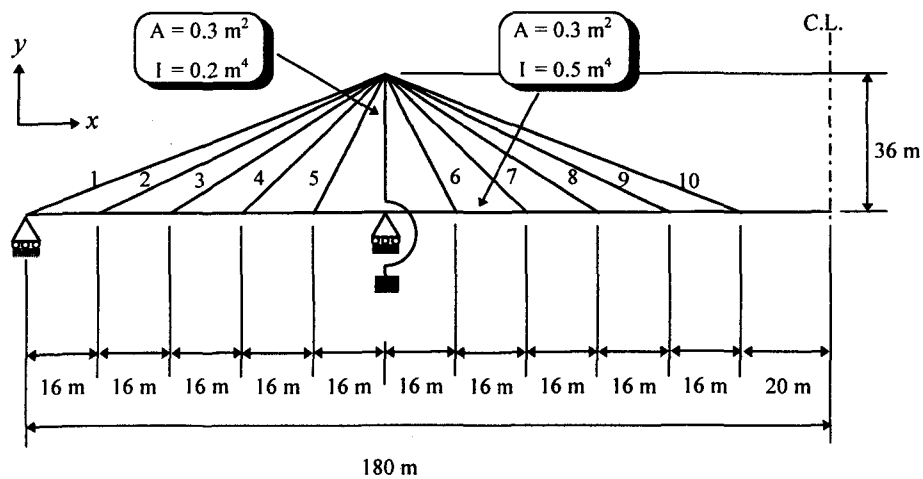


그림 5 예제 사장교 구조

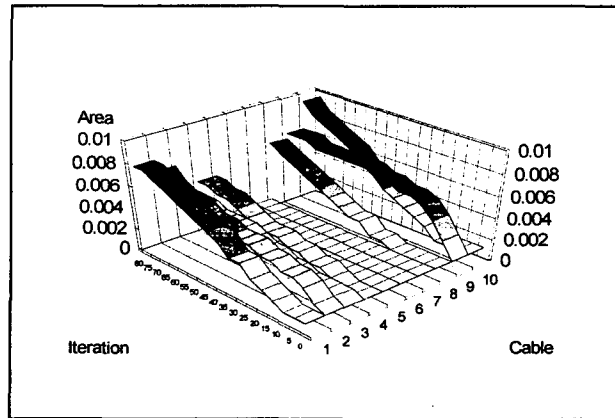


그림 6 케이블 단면적의 변화 (m^2)

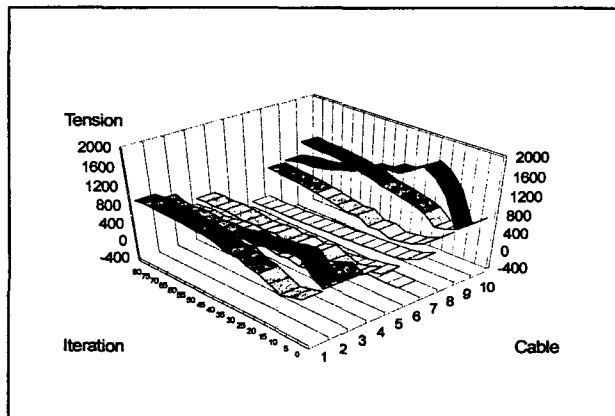


그림 7 케이블 장력의 변화 (kN)

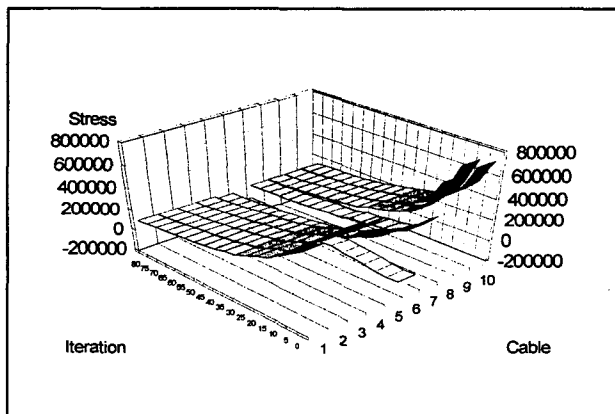


그림 8 케이블 인장 응력의 변화 (kN/m^2)

그림 6은 점차적으로 케이블의 단면적이 증가되는 양상을 나타낸다. 최종 단계에서는 주탑에 가까이 위치 할수록 케이블 단면적이 작고 멀수록 단면적이 증가함을 알 수 있다. 이는 서독의 Severin 교와 같이 서로 다른 단면적을 가지도록 실제 구조물에 적용된 바 있다.

그림 7은 점차적인 케이블 장력의 변화 양상을 보여준다. 단면적이 증가 할 때 장력도 같이 증가하는 경향을 나타내고 있다.

그림 8에서는 Iteration 단계가 낮을 때는 각 응력들의 차이가 심하지만 Iteration 단계가 증가할수록 평준화되어가는 양상을 알 수 있다.

제안 방법의 효율성을 입증하기 위하여 케이블 전체의 단면적의 합은 같고 각 케이블의 단면적이 동일한 경우(CASE I)를 해석하여 비교하였다. 표 1과 표 2에 각각 CASE I과 CASE II의 케이블 단면적을 나타내었다.

Cable	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area (cm ²)	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

표 1 CASE I

Cable	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area (cm ²)	80	70	40	10	10	10	10	65	70	95

표 2 CASE II (Present)

두 가지 경우의 해석 결과의 최대값들을 정리하면 표 3과 같다. 표 3에서 알 수 있듯이 케이블 단면적을 적절히 달리 할 경우가 변위나 힘, 응력 측면에서 구조물에 더욱 유리함을 알 수 있다.

	CASE I	CASE II (Present)
x 방향 최대 변위 (m)	0.045	0.015
y 방향 최대 변위 (m)	-0.256	-0.163
Max. Shear Force (kN)	635.874	533.374
Max. Moment (kN·m)	6787.309	5680.448
케이블의 최대 인장응력(kN/m ²)	222581.726	128761.328

표 3 최대값들의 비교

5. 결론

본 연구에서 케이블의 최적 단면적을 구하는 최적화 기법을 제안하였다. 제안 방법에서는 최대 인장 응력이 걸리는 케이블의 단면적을 점진적으로 증가시키면서 해석을 반복 수행하게 된다. 이러한 반복 수행의 결과로 변위와 힘, 응력 측면에서 보다 바람직한 결과를 얻을 수 있었다.

또한 전체 단면적은 같으나 각각의 케이블의 단면적이 같은 사장교에 대한 해석 결과와 비교해 본 결과 본 연구에서 제안한 바와 같이 각각 최적의 케이블 단면적을 가지는 경우가 보다 바람

직 하다고 할 수 있다.

따라서 사장교의 예비 설계 단계에 있어서 이 기법을 적용하면 보다 합리적인 설계를 할 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

- [1] 黃鶴周, 最新 橋梁工學, 東明社 (1994)
- [2] P. Krishna, A.S. Arya and T.P. Agrawal, Effect of Cable Stiffness on Cable-Stayed Bridges, *J. of the Structural Division*, ASCE, Vol.111, No.9, 2008-2020 (1985)
- [3] M. S. Troitsky, Cable-Stayed Bridges, BSP Professional Books (1988)
- [4] ASCE Committee on Cable-Suspended Bridges, "Guidelines for Design of Cable-Stayed Bridges", ASCE (1991)
- [5] J. F. Fleming and E.A.Egeseli, Dynamic behavior of a cable-stayed bridge, *Int. J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8, 1-6 (1980)
- [6] J. F. Fleming, Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structures, *Int. J. Computers and Structures*, 10, 621-635 (1979)
- [7] W. Podolny and J.B. Scalzi, Construction and Design of Cable-Stayed Bridges, John Wiley Sons, (1986)