

# 확률론적 특성을 갖는 선형 동적계의 과도응답 해석 Transient Response Analysis of Linear Dynamic System with Random Properties

김 인학\*  
Kim, In-Hack

독고 옥\*  
Dokko, Wook

---

Most dynamic systems have various random properties in excitation and system parameters. In this paper, a procedure for response analysis is proposed for the linear dynamic system with random properties in both excitation and system parameters. The system parameter and response with random properties are modeled by perturbation technique, and then response analysis is formulated by probabilistic and vibration theories. And probabilistic FEM is also used for the calculation of mean response which is difficult by the proposed response model. As an application example, the transient response is calculated for a sdof system with random mass and spring constant subjected to stationary white-noise excitation and the results are compared to those of numerical simulation.

---

## 1. 서론

정적계와 마찬가지로 동적계에도 다양한 불확실성이 존재하여 확률론적 접근이 요구되며, 그 불확실성의 형태에 따라 기진력이 확률과정인 불규칙 진동계(random vibration system), 계 인자(system parameter)들이 확률변수인 불확정 인자 동적계(random parametric system) 그리고 두가지 불확정성을 모두 가지는 계 등의 세가지로 분류될 수 있다. 이와 같이 불확정성의 존재로 그 응답이 확률과정이 되는 동적계를 통틀어 확률론적 동적계(stochastic or random dynamic system)라고 말한다.

확률론적 동적계의 응답해석은 기진력을 고려한 불규칙 진동 이론에서 출발하였으며, 계 인자의 불확정성을 해석하기 위하여는 섭동법과 진동이론을 결합한 방법이 시도되었고[1,2,3], 이후에 확률유한요소법(PFEM)이 제안되었다[4,5,6]. 그리고 최근에 와서 두가지 불확정성을 모두 고려한 시도가 있었는데[7,8], 기진력이 협대역 확률과정이라는 근사가 요구되고 복잡한 수학적 과정이 수반되어야 하는 어려움이 있다.

위의 문제점을 해결하기 위하여, 본 논문에서는 평균이 0이 아니고 광대역 특성을 갖는 기진력 문제에 대하여 좀더 쉬운 개념의 응답해석 과정을 제안하였다. 기진력이 광대역 특성을 가질 경우에 기진력과 계 인자의 불확정성이 응답에 미치는 효과가 거의 독립적이라는 성질로부터 응답에 대한 섭동모델을 도출하고, 진동 이론과 섭동법을 결합하여 두가지 불확정성을 모두 고려한 응답해석 과정을 정식화하였다. 이 과정에서 제안된 응답모델이 계 인자의 불확정성이 평균에 미치는 효과를 제대로 고려할 수 없는 관계로 확률유한요소법에 의한 2차 평균 해석을 수행하였다.

---

\* 국방과학연구소

제안된 해석과정을 평균이 0이 아닌 정상(stationary) 백색잡음(white noise) 기진력을 받는 1자유도계 문제에 적용하여 과도응답에 대한 평균과 분산을 계산하고, 그 결과를 시뮬레이션 결과와 비교하여 타당성을 검토하였다.

## 2. 불규칙 진동 이론

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.1)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = p(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n, \quad \frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \& \quad p(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (2.3)$$

(2.1) 혹은 (2.2)와 같이 점성감쇠를 갖는 1자유도계를 고려해 보자.  $m, c, k, f(t)$ 는 각각 질량, 감쇠계수, 스프링상수, 기진력을 나타내며,  $\zeta$ 와  $\omega_n$ 은 각각 점성감쇠비와 고유원진동수를 의미한다.  $f(t)$ 가 확률과정이면 불규칙 진동 이론에 의하여 해석될 수 있다.

(2.2)의 해  $x(t)$ 는 임펄스 응답함수  $h(t)$ 와  $p(t)$ 의 convolution 적분에 의하여 (2.4)와 같이 계산된다.

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)p(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

여기서  $h(t)$ 는 초기변위 및 초기속도가 없을때 다음과 같다.

$$h(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

적분 연산과 평균 연산이 교환되는 성질을 이용하면, 변위의 평균과 공분산은 기진력의 평균과 공분산에 의하여 (2.6)과 (2.7)에 의하여 각각 계산된다.

$$E[x(t)] = \int_0^t h(t-\tau)E[p(\tau)]d\tau \quad (2.6)$$

$$C_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1) C_{pp}(\tau_1, \tau_2) h(t_2-\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.7)$$

만약 기진력 함수가 정상 백색잡음일 경우에 (2.8)의 관계가 성립하고, (2.7)의 공분산은 (2.9)와 같이 바뀐다. 여기서  $S_0$ 는 백색잡음의 스펙트럼 밀도(spectral density)를,  $\delta(\tau)$ 는 Dirac delta 함수를 나타낸다.

$$C_{pp}(t_1 - t_2) = 2\pi S_0 \delta(t_1 - t_2) \quad (2.8)$$

$$C_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau) 2\pi S_0 h(t_2 - \tau) d\tau, \quad t_1 \geq t_2 \quad (2.9)$$

### 3. 계 인자의 불확정성과 응답의 평균

#### 3.1 섭동법에 의한 응답모델

기진력을 시간에 따른 확률과정으로 취급하는 것과 달리, 대개 계 인자의 불확정성은 시간과 무관한 확률변수로 취급하며, 이를 고려하기 위해 섭동법이 효과적으로 사용되어 왔다. 섭동성분이 비교적 크지 않을 경우에 임의의 확률변수 벡터  $\mathbf{r}$ 은 (3.1)과 같이 변수의 평균항과 섭동항으로 표현될 수 있으며, 여기서  $\varepsilon$ 은 섭동성분의 크기를 의미하는 섭동인자(perturbation parameter)를 나타낸다.

$$\mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + \varepsilon \tilde{\mathbf{r}}_i \quad (3.1)$$

(3.1)에서  $m$ 과  $k$ 를 확률변수로 가정하면 섭동표현식에 의하여

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} + \varepsilon_m \tilde{\mathbf{m}} \quad \& \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} + \varepsilon_k \tilde{\mathbf{k}} \quad (3.2)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 고유원진동수와 응답도 아래와 같이 표현된다.

$$\omega_n = \omega_n(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = \bar{\omega}_n + \varepsilon \tilde{\omega}_n \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.4)$$

$\omega_n$ 의 평균과 분산 그리고  $\mathbf{x}(t)$ 의 평균은 각각 (3.5), (3.6), (3.7)로 가정된다[9].

$$\bar{\omega}_n = \omega_n(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\omega_n}^2 = \frac{\partial \omega_n}{\partial m} \frac{\partial \omega_n}{\partial m} \sigma_m^2 + \frac{\partial \omega_n}{\partial k} \frac{\partial \omega_n}{\partial k} \sigma_k^2 + 2 \frac{\partial \omega_n}{\partial m} \frac{\partial \omega_n}{\partial k} \text{cov}(m, k) \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(\bar{\omega}_n, t) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{k}}, t) \quad (3.7)$$

#### 3.2 확률유한요소법에 의한 2차 평균

수치 시뮬레이션을 수행해 보면 실제 응답의 평균은 계 요소들이 평균값을 가질 때의 응답과 일치하지 않음을 알 수 있다. 이는 고유원진동수의 불확정성에 따른 고차항 성분의 존재 때문으로 판단되며, 이를 보완하기 위하여 2차항을 고려한 평균해석이 요구된다. 또한 광대역 기진력인 경우에 그 불확정성은 응답의 평균에 영향을 미치지 못하는 것으로 알려져 있다.

(2.1)에서  $f(t)$ 가 확정함수인 경우에 대하여

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

와 같이 표현하여 2차 평균 연산을 취하고 chain rule을 적용하면

$$\begin{aligned} E[\mathbf{g}(\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] &= \bar{m}\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2}\bar{m} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \ddot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_i \partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{m}}{\partial r_i} \frac{\partial \ddot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) \\ &+ \bar{c}\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2}\bar{c} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \dot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_i \partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial r_i} \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) \\ &+ \bar{k}\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\bar{k} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial r_i \partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial r_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial r_j} \text{cov}(r_i, r_j) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10)은 (3.11a)와 (3.11b)로 표현되는데[10],  $\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$ , 그리고  $\bar{\mathbf{x}}$ 는 각각 응답에 대한 가속도, 속도, 변위의 1차 평균항을,  $\Delta\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$ ,  $\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}}$ , 그리고  $\Delta\bar{\mathbf{x}}$ 는 그 2차 평균항을 의미한다.

$$\bar{m}\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{c}\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{k}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (3.11a)$$

$$\bar{m}\Delta\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{c}\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{k}\Delta\bar{\mathbf{x}} = \Delta\bar{\mathbf{f}} \quad (3.11b)$$

여기서 확률변수  $m$ 과  $k$  사이에 상관관계가 없다고 가정하면  $\Delta\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$ ,  $\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}}$ ,  $\Delta\bar{\mathbf{x}}$ , 그리고  $\Delta\bar{\mathbf{f}}$ 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Delta\ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 \ddot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_i^2} \sigma_{r_i}^2 \quad (3.12a)$$

$$\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 \dot{\bar{\mathbf{x}}}}{\partial r_i^2} \sigma_{r_i}^2 \quad (3.12b)$$

$$\Delta\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial r_i^2} \sigma_{r_i}^2 \quad (3.12c)$$

$$\Delta \bar{f} = -\frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial \bar{m}}{\partial r_i} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial r_i} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial r_i} \frac{\partial \dot{x}}{\partial r_i} + \frac{\partial \bar{k}}{\partial r_i} \frac{\partial x}{\partial r_i} \right) \sigma_{r_i}^2 \quad (3.13)$$

(3.8)의  $r_i$ 에 대한 미분에 의하여 (3.14)를 유도한 뒤, 이 식의 계산에 의하여 2차 평균항을  $r_i$ 에 대하여 편미분한다.

$$\bar{m} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial r_i} + \bar{c} \frac{\partial \dot{x}}{\partial r_i} + \bar{k} \frac{\partial x}{\partial r_i} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r_i}, \quad (3.14)$$

$$\text{where } \frac{\partial \hat{f}}{\partial r_i} = - \left( \frac{\partial \bar{m}}{\partial r_i} \ddot{x} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial r_i} \dot{x} + \frac{\partial \bar{k}}{\partial r_i} x \right) \quad (3.15)$$

결국 (3.14), (3.13), 그리고 (3.11b)의 순서로 계산된 2차 평균항과 (3.11a)에 의하여 계산된 1차 평균항의 합에 의하여 2차 평균이 구해진다.

$$E[x] \approx \bar{x} + \Delta \bar{x} \quad (3.16)$$

#### 4. 응답 해석의 정식화

기진력이 확률과정이고 계 인자들이 확률변수인 경우에는 불규칙 진동 이론과 섭동법의 결합에 의하여 응답을 구할 수 있고, 이 과정에서 확률유한요소법이 추가된다. 응답 해석과정에서 기진력과 계 인자들을 모두 섭동법으로 해결하기 위하여 기진력도 (4.1)과 같이 섭동표현 형태로 나타낸다. 여기서  $\bar{p}(t)$ 는 평균을,  $\hat{p}(t)$ 는 평균이 0인 정상 Gaussian 백색잡음 과정으로 가정한다.

$$p(t) = \bar{p}(t) + \hat{p}(t) \quad (4.1)$$

응답은 (3.4)에 기진력에 의한 효과가 더해져

$$x(t) = \bar{x}(t) + \hat{x}(t) + \varepsilon \bar{x}(t) \quad (4.2)$$

로 가정될 수 있다. 이 식과 (3.3)을 (2.2)에 대입하여 정리하면 계의 운동방정식은 평균, 기진력의 섭동항 그리고 계 인자의 섭동성분에 의한 항에 관한 식들로 표현될 수 있다.

$$\ddot{\bar{x}}(t) + 2\zeta\bar{\omega}_n \dot{\bar{x}}(t) + \bar{\omega}_n^2 \bar{x}(t) = \bar{p}(t) \quad (4.3a)$$

$$\ddot{\hat{x}}(t) + 2\zeta\bar{\omega}_n \dot{\hat{x}}(t) + \bar{\omega}_n^2 \hat{x}(t) = \hat{p}(t) \quad (4.3b)$$

$$\ddot{\bar{x}}(t) + 2\zeta\bar{\omega}_n \dot{\bar{x}}(t) + \bar{\omega}_n^2 \bar{x}(t) = -\bar{\omega}_n \hat{B}(t) \quad (4.3c)$$

$$\text{where, } B(t) = 2\zeta(\bar{x} + \hat{x}) + 2\bar{\omega}_n(\bar{x} + \hat{x}) \quad (4.4)$$

그런데, 3.2절에서 기술한 바와 같이 응답의 실제 평균은 (4.3a)의 해와는 다르고, 따라서 이후의 정식화 과정에서 평균은 확률유한요소법으로 계산된 값을 응답의 평균으로 치환한다. 그리고 나머지 응답 성분들은 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{x}(t) = \int_0^t h(t-\tau)\hat{p}(\tau)d\tau \quad (4.5a)$$

$$\bar{x}(t) = -\bar{\omega}_n \int_0^t h(t-\tau)\hat{B}(\tau)d\tau \quad (4.5b)$$

위의 결과에 의하여 응답의 공분산은

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= E \left\{ [x(t_1) - \bar{x}(t_1)] \times [x(t_2) - \bar{x}(t_2)] \right\} \\ &= E \left\{ [(\bar{x}(t_1) + \hat{x}(t_1) + \varepsilon\bar{x}(t_1)) - \bar{x}(t_1)] \times [(\bar{x}(t_2) + \hat{x}(t_2) + \varepsilon\bar{x}(t_2)) - \bar{x}(t_2)] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

로 된다. 위의 식을 전개하면  $\hat{x}(t)$ 와  $\bar{\omega}_n$ 의 곱으로 이루어진 성분들의 평균항들이 존재하나, 기진력과 계 인자들 사이에 상관관계가 거의 없다는 사실로부터, 이러한 항들은 모두 0으로 가정한다. 결국 공분산은 (4.7)과 같이 기진력의 불확정성에 의한 성분과 계 인자들의 불확정성에 의한 성분의 합으로 계산된다.

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E \{ \hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) \} + \varepsilon^2 E \{ \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2) \} \quad (4.7)$$

## 5. 계산 결과 및 고찰

계산에로써  $m$ 과  $k$ 의 평균은 각각 1.0Kg과  $(2\pi)^2$ N/m이고, 이 경우에  $\bar{\omega}_n = 2\pi$ 이며,  $\zeta = 0.01$ 인 경우를 고려하였다.  $m$ 과  $k$ 의 표준편차를 각각  $\sigma_m = a_m \bar{m}$ 과  $\sigma_k = a_k \bar{k}$ 로 나타낸다면, 분산계수  $a_m$ 과  $a_k$ 는  $a = a_m = a_k = 0.02, 0.04, 0.06$ 인 경우를 고려하였다. 또한 기진력으로는  $\bar{p}(t) = 10N$ 이고  $2\pi S_0 = 1.0N^2$ 인 정상 백색잡음을 가정하였다.

Figure 5.1과 Figure 5.2는 계 인자들이 확률변수인 경우에 대한 변위의 평균을 나타낸 것으로 응답의 실제 평균이 계 인자들이 평균값을 가질 경우와 다르다는 것을 확인할 수 있는데, 이것은 2차 이상의 성분이 상당히 크다는 것을 의미하며, 두가지 평균 사이의 차이는 불확정성이 클수록 증가하는 것으로 나타났다. PFEM에 의한 결과가 시뮬레이션 결과와 비교적 잘 일치하긴 하지만, 개선의 여지는 남아 있는 것으로 판단된다.

Figure 5.3은 계 인자가 4%의 불확정성을 가질 때 변위의 표준편차에 대한 결과를 비교한 것이다. PFEM과 제안된 방법 모두가 시간이 갈수록 시뮬레이션 결과와 상당한 차이가 발생해 가는 것을 볼 수 있으나, 제안된 방법이 PFEM에 비해서는 우수한 결과를 보여주고 있음을 확인할 수 있다.

Figure 5.4-Figure 5.6은 기진력과 계 인자 모두에 불확정성이 존재할 경우에 대한 계산

결과이다. 계 인자의 불확정성이 증가할수록 제안된 방법의 오차는 커지며, 이는 일반적으로 섭동법이 보여주는 일반적인 경향이다. 따라서 제안된 방법은 계 인자의 불확정성의 크기가 크지 않을 경우에만 유효한 것으로 판단된다.

## 6. 결론

본 논문에서는 두가지 형태의 불확정성을 모두 고려한 선형계의 응답해석의 정식화에 대한 하나의 방법을 제안하고, 해석과정을 비교 검토하였다. 제안된 방법은 비교적 익숙한 개념이 사용되고, 기진력에 대한 특별한 제한이 없다는 장점이 있다. 반면에 응답의 표준편차 결과에서 보는 바와 같이 PFEM에 비해서는 정확성이 우수하다고 하더라도 개선의 여지는 상당한 것으로 생각되며, 섭동 개념을 사용하는 관계로 불확정 성분이 크지 않아야 한다는 제한이 존재한다.

## 7. 참고 문헌

- [1] Caughey, T. K. & Dienes, J. K., "The Behavior of Linear Systems with Random Parametric Excitation", *J. of Math. & Phys.*, 1962, vol.41
- [2] Chen, P.-C. & Soroka, W. W., "Impulse Response of a Dynamic System with Statistical Properties", *J. of Sound & Vib.*, 1973, vol.31
- [3] Chen, P.-C. & Soroka, W. W., "Multi-Degree Dynamic Response of a System with Statistical Properties", *J. of Sound & Vib.*, 1974, vol.37
- [4] Wong, F. S., "Stochastic Finite Element Analysis of a Vibrating String", *J. of Sound & Vib.*, 1984, vol.96
- [5] Wong, F. S., "Finite Element/Difference Methods in Random Vibration", *Comp. & Struct.*, 1986, vol.23
- [6] Shinozuka, M. & Dasgupta, G., "Stochastic Finite Element Methods in Dynamics", *Proc. 3rd Conf. on Dynamic Response of Structures, Los Angeles*, 1986
- [7] Jensen, H. & Iwan, W. D., "Response of Systems with Uncertain Parameters to Stochastic Excitation", *ASCE, J. of Eng. Mech.*, 1992, vol.118
- [8] 남 성현 & 김 호룡, "확률적 동적계의 응답 예측에 관한 연구", *한국 소음진동 공학회, '94 추계 학술대회 논문집*
- [9] Liu, W. K., Belytschko, T. & Mani, A., "Probabilistic Finite Element for Nonlinear Structural Dynamics", *Comp. Meth. in Appl. Mech. & Eng.*, 1986, vol.56
- [10] Hasselman, T. K. & Hart, G. C., "Modal Analysis of Random Structural Systems", *ASCE, J. of Eng. Mech.*, 1972

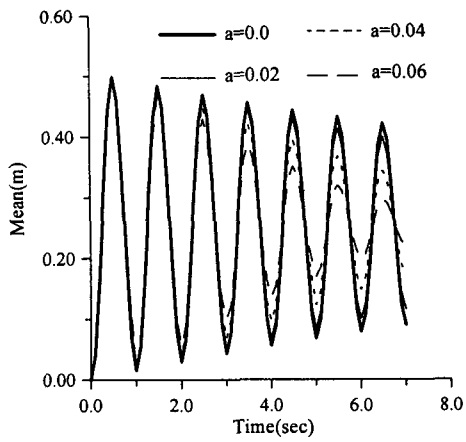


Figure 5.1 Simulation results of mean displacements for the various coefficients of variation

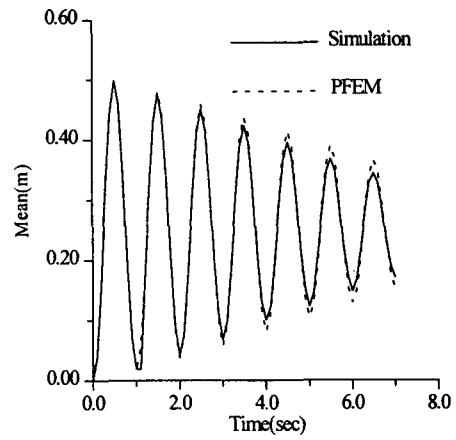


Figure 5.2 Comparison of results of mean displacements for simulation and PFEM( $a=0.04$ )

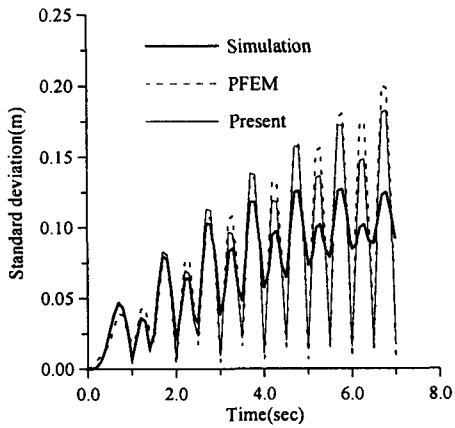


Figure 5.3 The standard deviations of displacements for deterministic excitation and  $a=0.04$

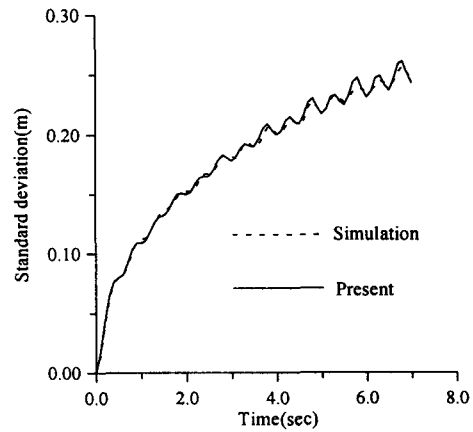


Figure 5.4 The standard deviations of displacements for stochastic excitation and  $a=0.02$

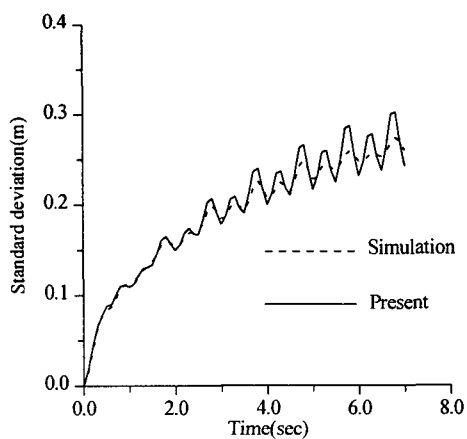


Figure 5.5 The standard deviations of displacements for stochastic excitation and  $a=0.04$

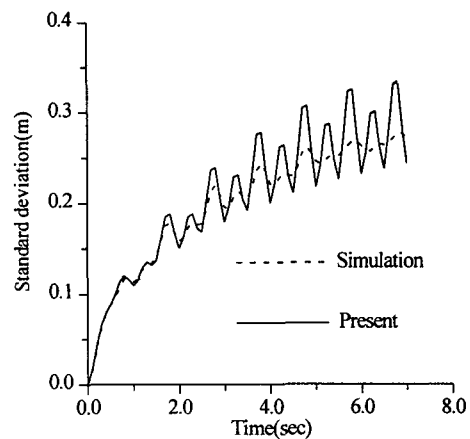


Figure 5.6 The standard deviations of displacements for stochastic excitation and  $a=0.06$