

수평곡선 격자형교의 자유진동해석
Free Vibration Analysis of Horizontally Curved Multi-Girder Bridges

윤 기용⁽¹⁾, 강 영종⁽²⁾

Yoon, Ki Yong Kang, Young Jong

ABSTRACT

In the present study, a numerical formulation procedure for free vibration analysis of thin-walled horizontally curved multi-girder bridges is presented. The presented finite element procedure consists of curved and straight beam elements including warping degree of freedom. The homogeneous solutions of curved beam equations were used for shape functions in numerical formulation to achieve good convergence. In the straight beam element, the third order hermite polynomials were used for shape functions. The Gupta method was used to solve the eigenvalue problem efficiently. The developed numerical procedure was applied to investigate the characteristics of free vibration of horizontally curved multi-girder bridges with varying subtended angle.

1. 서론

교량에서의 접속구간이나 고속도로의 인터체인지 등 교통량이 모이고 분산되는 곳에서 교통량의 원활한 흐름을 위하여 곡선교량에 대한 사회적 요구가 증가하고 있다.

격자형 곡선교는 연속교로 시공이 가능하므로 직선보를 사용한 곡선교량보다 장지간으로 효율적인 단면 사용과 하부구조의 수를 감소시켜 공기단축 및 공사비 절감효과를 창출 할 수 있고 장지간과 유선형에서 나오는 선형미는 구조물의 미적 수준을 향상시키는 데 효과적이다. 또한 상자형 주형을 갖는 곡선교는 주형의 높이가 상당히 커야하고, 유지관리가 어려우나 격자형 곡선교는 작은 형고로 제작할 수 있으므로 도심지역에 적합하고, 유지관리에 효과적이다. 그러나 격자형 곡선교는 초기곡률로 인하여 구조적 거동이 복잡하여 해석 및 설계가 어렵고 설계지침이 미흡하여 국내에서는 아직까지 실용화되지 못하고 있는 실정이다.

최근의 연구 동향을 살펴보면 곡선보 및 격자형 곡선교의 정적인 거동 및 좌굴 현상에 대한 연구는 상당히 진척되고 있으나 지진, 충격, 풍하중 등 동하중에 대한 거동에 대한 연구는 활발히 진행되어야 할 과제로 남아 있는 실정이다. 따라서 격자형 곡선교의 자유진동에 의한 동적특성에 대한 연구는 동적해석에 대한 연구와 격자형 곡선교의 실용화에 앞서 선행하여야 할 필수적인 과제이다.

본 연구에서는 최근 개발된 “강”과 “유”의 새로운 곡선보 이론에 따른 곡선보요소와 Warping 을 고려한 절점당 7 자유도를 갖는 직선보요소를 사용하여 강성행렬과 질량행렬을 구성하여 전체좌표계로 변환한 후 수평곡선 격자형교의 자유진동해석을 수행하는 유한요소 해석 프로그램을 작성하고, 기존의 연구 결과와 비교하여 타당성을 검증하고자 한다.

1) 고려대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

2) 고려대학교 토목환경공학과 조교수

격자형 곡선교는 선형범위내에서 곡률면내의 변위성분들 사이에서 서로 간섭(coupling)하며 거동하고 곡률면의 변위성분들도 서로 간섭하며 거동하는 반면 곡률면내의 변위성분들과 곡률면외의 변위성분들 사이에서는 서로 독립적으로 거동하므로 해석예제를 통하여 곡률면내의 자유진동과 곡률면외의 자유진동을 각각 비교, 검증하고 내부중심각의 변화에 따른 수평곡선 격자형교의 진동특성을 파악하고자 한다.

2. 유한요소의 정식화

2.1 7자유도 곡선보의 요소 강성행렬 및 질량행렬

곡선보 요소에 작용하는 절점력과 절점변위는 그림 1과 같다. 그림에서 보듯이 곡선보 요소에 작용하는 단면력은 축방향력, F_z , 두 방향의 전단력, V_x 와 V_y , 두 방향의 휨모멘트 M_x 와 M_y , 비틀림 모멘트, T_T 그리고 이 외에 warping에 관계된 Bimoment, Bi 가 있다.

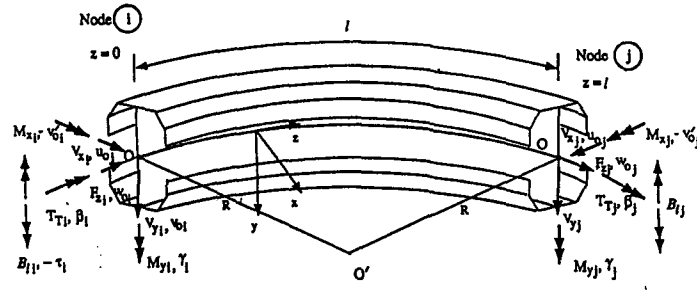


그림 1. 곡선보 요소의 절점변위 및 절점 단면력

전체 비틀림 모멘트 T_T 는 St. Venant 비틀림 모멘트 T_{sv} 와 warping 비틀림 모멘트 T_w 의 합으로 정의된다. 이 때 warping 비틀림 모멘트는 다음과 같이 정의된다.

$$T_T = Bi' \quad (식 1)$$

또한, 전단력과 비틀림 모멘트 및 단면력 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$V_x = -M'_y \quad (식 2.1)$$

$$V_y = M'_x + \frac{1}{R} T_T \quad (식 2.2)$$

곡선보 요소는 7개의 단면력 F_z , M_x , M_y , Bi , T_T , V_x , V_y 과 이에 해당하는 변위성분 w_0 , γ , $-v'_0$, τ , β , u_0 , v_0 를 갖는다. 여기서 γ 와 τ 는 다음과 같다.

$$\gamma = u'_0 + \frac{w_0}{R} \quad (식 3.1)$$

$$\tau = \beta' + \frac{v'_0}{R} \quad (식 3.2)$$

변위성분 중 변위성분 중 w_0 , u_0 , γ 는 면내 변위장을 구성하고, v_0 , v'_0 , τ , β 는 면외 변위장을 구성한다. 절점변위를 면내 변위성분과 면외 변위성분으로 나누어 변위 벡터와 하중 벡터를 구성하면 다음과 같다.

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d^{inT} & d^{outT} \end{bmatrix}^T = d_k, k = 1, 2, 3, \dots, \text{and } 14 \quad (식 4.1)$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f^{inT} & f^{outT} \end{bmatrix}^T = f_k, k = 1, 2, 3, \dots, \text{and } 14 \quad (식 4.2)$$

여기서, $\underline{d}^{in} = [w_{oi} \ u_{oi} \ \gamma_i \ w_{oj} \ u_{oj} \ \gamma_j]^T = d_k^{in}, k = 1, 2, \dots, \text{and } 6$

$$\underline{d}^{out} = [v_{oi} \ -v'_{oi} \ \beta_i \ -\tau_i \ v_{oj} \ -v'_{oj} \ \beta_j \ -\tau_j]^T = d_k^{out}, k = 7, 8, \dots, \text{and } 14$$

$$\underline{f}^{in} = [F_{zi} \ V_{xi} \ M_{yi} \ F_{zj} \ V_{xj} \ M_{yj}]^T = f_k, k = 1, 2, 3, 4, 5, \text{and } 6$$

$$\underline{f}^{out} = [V_{yi} \ M_{xi} \ T_{Ti} \ B_{li} \ V_{yj} \ M_{xj} \ T_{Tj} \ B_{lj}]^T = f_k^{out}, k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \text{and } 14$$

수평곡선보 요소의 면내 및 면외 거동에 관한 강성행렬 \underline{K}^{in} 및 \underline{K}^{out} 은 변형에너지의 1차 변분으로부터 다음과 같이 구한다.

$$\delta \underline{U}^{in} = \int_V \tau_{ij}^{in} \delta \varepsilon_{ij}^{in} dV = \delta \underline{d}_i \underline{K}_{ij}^{in} \underline{d}_j, \quad \delta \underline{U}^{out} = \int_V \tau_{ij}^{out} \delta \varepsilon_{ij}^{out} dV = \delta \underline{d}_i \underline{K}_{ij}^{out} \underline{d}_j \quad (\text{식 } 5)$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij}^{in} = EA \int \{ & (N_{2i}' N_{2j}') - \frac{1}{R} (N_{1i} N_{2j}' + N_{2i}' N_{1j}) + \frac{1}{R^2} (N_{1i} N_{1j}) \} dz + EI_y \int \{ (N_{1i}'' N_{1j}'') \\ & + \frac{1}{R} (N_{1i}'' N_{2j}' + N_{2i}' N_{1j}'') + \frac{1}{R^2} (N_{2i}' N_{2j}') \} dz + \frac{EI_y}{R} \int \{ (N_{2i}' N_{1j}'' + N_{1i}'' N_{2j}') \\ & + \frac{1}{R} (2N_{2i}' N_{2j}' - N_{1i}'' N_{1j}'' - N_{1i}'' N_{1j}') \} dz + \frac{EI_y}{R} \int \{ \frac{1}{R^2} (N_{1i} N_{2j} + N_{2i}' N_{1j}') \} dz \end{aligned} \quad (\text{식 } 6.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij}^{out} = EI_x \int \{ & (N_{3i}'' N_{3j}'') - \frac{1}{R} (N_{4i} N_{3j}'' + N_{3i}'' N_{4j}) + \frac{1}{R^2} (N_{4i} N_{4j}') \} dz + EI_\omega \int \{ (N_{4i}'' N_{4j}'') \\ & + (N_{4i}'' N_{4j}') + \frac{1}{R} (N_{3i}'' N_{4j}' + N_{4i}'' N_{3j}') + \frac{1}{R^2} (N_{3i}'' N_{3j}') \} dz + \frac{EK_{xy\omega}}{R} \int \{ (N_{3i}'' N_{4j}' \\ & + N_{4i}'' N_{3j}') + \frac{1}{R} (2N_{3i}'' N_{3j}' - N_{4i}'' N_{4j}') - N_{4i}'' N_{4j}') - \frac{1}{R^2} (N_{4i} N_{3j}'' + N_{3i}'' N_{4j}') \} dz \\ & + GK_T \int \{ (N_{4i}' N_{4j}') + \frac{1}{R} (N_{3i}' N_{4j}' + N_{4i}' N_{3j}') + \frac{1}{R^2} (N_{3i}' N_{3j}') \} dz \end{aligned} \quad (\text{식 } 6.2)$$

여기서, N_{1j}, N_{2j}, N_{3j} , 그리고 N_{4j} 는 각각 j 번째 절점변위에 관련된 단면 기준점에서의 u_0, w_0, v_0 , 그리고 β 와 관련된 형상함수이다.

또한, 수평곡선보 요소의 면내 및 면외 거동에 관한 일관질량행렬 \underline{M}^{in} 및 \underline{M}^{out} 은 운동에너지의 1차 변분으로부터 다음과 같이 구한다.

$$\delta \underline{T}^{in} = \int_V \rho u_i^{in} \delta u_j^{in} dV = \delta \underline{d}_i \underline{M}_{ij}^{in} \underline{d}_j, \quad \delta \underline{T}^{out} = \int_V \rho u_i^{out} \delta u_j^{out} dV = \delta \underline{d}_i \underline{M}_{ij}^{out} \underline{d}_j \quad (\text{식 } 7)$$

$$\begin{aligned} M_{ij}^{in} = \rho A \int \{ & (N_{1i} N_{1j} + N_{2i} N_{2j}) \} dz + \rho \frac{I_y}{R} \int \{ (N_{2i} N_{1j}' + N_{1i}' N_{2j} + \frac{2}{R} N_{2i} N_{2j}') \} dz \\ & + \rho I_y \int \{ (N_{1i}' N_{1j}' + \frac{N_{1i}' N_{2j}' + N_{2i}' N_{1j}'}{R} + \frac{N_{2i}' N_{2j}'}{R^2}) \} dz \end{aligned} \quad (\text{식 } 8.1)$$

$$\begin{aligned} M_{ij}^{out} = \rho A \int \{ & N_{3i} N_{3j} \} dz + \rho \frac{I_y}{R} \int \{ (N_{3i} N_{4j}' + N_{4i}' N_{3j}') \} dz + \rho I_y \int \{ N_{4i} N_{4j} \} dz \\ & + \rho I_x \int \{ (N_{4i} N_{4j}' + N_{3i}' N_{4j}') \} dz - \rho \frac{K_{xy\omega}}{R} \int \{ (N_{3i}' N_{4j}' + N_{4i}' N_{3j}') + \frac{2}{R} N_{3i}' N_{3j}') \} dz \\ & + \rho I_\omega \int \{ (N_{4i}' N_{4j}' + \frac{N_{4i}' N_{3j}' + N_{3i}' N_{4j}'}{R} + \frac{N_{3i}' N_{3j}'}{R^2}) \} dz \end{aligned} \quad (\text{식 } 8.2)$$

2.2 7 자유도 직선보의 요소 강성행렬 및 질량행렬

수평곡선 격자형교의 가로보는 그림 2 와 같이 warping 자유도를 포함하여 절점당 7 개, 즉 요소당 14 개의 자유도를 갖는 직선보 요소를 이용하였다. 직선보 요소에서는 u_0, v_0, w_0 , 그리고 β 의 4 개 변위성분들이 독립적이다. 축방향 변위성분인 w_0 는 선형의 형상함수를 사용하였으며, 나머지 변위성분들의 형상함수는 C^1 연속성을 갖는 3 차의 Hermitie 다항

식을 사용하여 직선보의 변위장과 절점변위의 관계를 유도하였다.

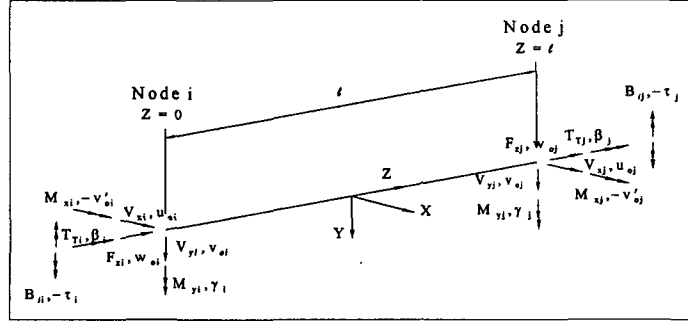


그림 2. 직선보 요소의 절점변위 및 절점 단면력

$$u_o = \underline{N}_u \underline{u}^u, \quad \underline{N}_u = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (\text{식 9.1})$$

$$v_o = \underline{N}_v \underline{u}^v, \quad \underline{N}_v = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix}, \quad (\text{식 9.2})$$

$$w_o = \underline{N}_w \underline{u}^w, \quad \underline{N}_w = [1-\xi \quad \xi] \quad (\text{식 9.3})$$

$$\beta = \underline{N}_\beta \underline{u}^{\beta u}, \quad \underline{N}_\beta = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix} \quad (\text{식 9.4})$$

여기서, $\xi = z/l$

직선보 요소의 강성행렬은 변분의 원리로 원리로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} EI_y \underline{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_x \underline{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EAK_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_\omega \underline{K}_d + GK_T \underline{K}_e \end{bmatrix} \quad (\text{식 10})$$

여기서, $\underline{K}_a = \int \underline{N}''^T \underline{N}''_u dz$, $\underline{K}_b = \int \underline{N}''^T \underline{N}''_v dz$, $\underline{K}_c = \int \underline{N}'^T \underline{N}'_w dz$,

$$\underline{K}_d = \int \underline{N}''^T \underline{N}''_\beta dz, \quad \underline{K}_e = \int \underline{N}'^T \underline{N}'_\beta dz$$

직선보 요소의 일관질량행렬 또한 변분의 원리로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{M} = \rho \begin{bmatrix} A\underline{M}_a + I_y \underline{M}_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A\underline{M}_b + I_x \underline{M}_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A\underline{M}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_x + I_y) \underline{M}_b + I_\omega \underline{M}_f \end{bmatrix} \quad (\text{식 11})$$

여기서, $\underline{M}_a = \int \underline{N}_u^T \underline{N}_u dz$, $\underline{M}_b = \int \underline{N}_v^T \underline{N}_v dz$, $\underline{M}_c = \int \underline{N}_w^T \underline{N}_w dz$,

$$\underline{M}_e = \int \underline{N}'_\beta^T \underline{N}'_\beta dz, \quad \underline{M}_f = \int \underline{N}_\beta^T \underline{N}_\beta dz$$

2.3 좌표변환 및 경사좌표계의 도입

곡선보 요소는 Curvilinear 좌표계를 사용하고, 직선보 요소는 직교좌표계를 사용하기 때문에 전체강성행렬과 전체질량행렬을 구성하기 위해서 전체좌표계인 직교좌표계로의 변환이 필요하다.

그림 3과 같이 국부좌표계와 전체좌표계에서 절점변위의 관계로부터 좌표변환행렬을 정의하면 다음과 같다.

표 1 단일 곡선보의 곡률평면의 자유진동

내부 중심각 (Deg)	곡률 반경 (in.)	본 연구 ω_1 (rad/sec)	Yoo & Fhrenbach		Culver		Shore & Chaudhuri	
			ω_1 (rad/sec)	차 이 (%)	ω_1 (rad/sec)	차 이 (%)	ω_1 (rad/sec)	차 이 (%)
10	1155.5	201.3	204.7	1.7	202.5	0.6	203.3	1.0
20	577.8	183.2	190.2	3.8	184.3	0.6	186.3	1.7
30	385.2	160.9	165.8	3.0	162.2	0.8	164.7	2.4
40	288.9	139.5	141.7	1.6	140.0	0.4	142.8	2.4
50	231.1	120.1	121.3	1.0	120.9	0.7	122.8	2.2
60	192.6	103.0	103.9	0.9	103.8	0.8	105.2	2.1
70	165.1	88.3	89.3	1.5	88.9	0.7	90.0	1.9
80	144.4	75.4	76.8	1.9	76.0	0.8	76.8	1.9
90	128.4	64.1	64.0	1.6	64.6	0.8	65.2	1.7

예제 2: 단일 곡선보의 곡률평면내 자유진동

곡선보의 곡률평면내 자유진동의 예제는 Chaudhuri 에 의해 자유진동해석이 수행된 바 있는 곡률반경 96in.(243.84cm), 내부중심각 97°의 원형아치 모델을 선택하였다. 양단의 경계는 핀에 의해 지지되어 있으며 단면제원 및 재료성질은 다음과 같다.

$$A = 6.31 \text{ in.}^2 (40.7 \text{ cm}^2), I_y = 15.51 \text{ in.}^4 (645.6 \text{ cm}^4), E = 30000 \text{ ksi} (207.0 \text{ GN/m}^2),$$

$$\nu = 0.3, \rho = 7.35 \times 10^{-7} \text{ k-sec}^2 / \text{in}^4$$

표 2 에서 보는 바와 같이 Chaudhuri 의 연구결과는 본 연구결과 및 ABAQUS 에 의한 해석치와 큰 차이를 보이고 있는 데 이는 연구결과와 발표시 단위의 착오가 있었던 것에 의한 것으로 판단된다

표 2 단일 곡선보의 곡률평면내 자유진동

Mode 수	본 연구		Chaudhuri	ABAQUS	
	ω (rad/sec)	Hz (cycle/sec)	ω (rad/sec)	ω (rad/sec)	Hz (cycle/sec)
1	396.98	63.18	61.88	396.66	63.13
2	931.22	148.21	149.18	929.90	148.00
3	1797.31	286.05	307.85	1796.10	285.86

예제 3: 중심내각의 변화에 따른 수평곡선 격자형교의 자유진동해석

수평곡선 격자형교의 자유진동 특성에 대하여 살펴보기 위하여 지간길이가 1200in.이고, 2 개의 주형(주형간격 106in)과 13 개의 가로보(가로보 간격 100in.)를 갖는 격자형 직선교와 중심내각이 0.1°에서 90°인 수평곡선 격자형교의 자유진동해석을 하였다. 사용한 단면의 제원은 다음과 같다.

주 형 : $A = 66.309 \text{ in.}^2, I_x = 34086 \text{ in.}^4, I_y = 714.94 \text{ in.}^4, I_{\omega} = 474960 \text{ in.}^6, K_T = 37.043 \text{ in.}^4$
 가로보 : $A = 48.164 \text{ in.}^2, I_x = 12969 \text{ in.}^4, I_y = 414.16 \text{ in.}^4, I_{\omega} = 137420 \text{ in.}^6, K_T = 24.404 \text{ in.}^4$
 $E = 29000 \text{ ksi}, \nu = 0.3, \rho = 7.35 \times 10^{-7} \text{ k-sec}^2 / \text{in}^4$

표 3 중심내각의 변화에 따른 수평곡선 격자형교의 자유진동 (rad/sec)

	V	L	T		VT	
			진동수	O/I**	진동수	O/I
직선보	26.19	23.15	33.10	-1.0	-	-
0.1°	-	23.36	51.95	-10.61	29.34	0.099
1°	-	23.05	51.61	-10.25	29.75	0.103
10°	-	25.68	49.08	-5.23	34.48	0.210
20°	-	34.97	48.98	-1.73	38.34	0.654
30°	-	46.16	54.00	-0.858	38.13	1.323
40°	-	48.55*	61.66	-0.671	35.95	1.677
50°	-	47.86*	70.24	-0.614	33.16	1.799
60°	-	46.99*	79.20	-0.583	29.81	1.838
70°	-	45.93*	-	-	25.71	1.821
80°	-	44.14*	-	-	21.11	1.821
90°	-	30.23*	-	-	18.07	1.767

* In plane arch action, ** O/I: 외측주형과 내측주형의 처짐비

4. 결론

곡선보 이론에 따른 곡선보요소와 절점당 7 자유도의 직선보요소의 강성과 질량행렬을 구성하고 수평곡선 격자형교의 자유진동해석을 수행하였다. 단일 곡선보의 면내와 면외 진동해석을 통하여 타 연구결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 내부중심각의 변화에 따른 자유진동해석을 통해 수평곡선 격자형교의 진동특성을 살펴보았으며, 경계조건 및 주형과 가로보의 연결조건 등의 다양한 변수에 대한 보다 광범위한 연구가 필요하다. 본 연구 결과는 수평곡선 격자형교의 동적해석에 폭넓게 응용될 수 있을 것이다.

5. 참고문헌

- Y.J.Kang and Chai H. Yoo "Thin-Walled Curved Beams I : Formulation of Nonlinear Equations", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.120, No. 10, Oct., 1994, pp2072-2101
 Y.J.Kang and Chai H. Yoo "Thin-Walled Curved Beams II : Analytical Solutions for Buckling of Arches", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.120, No. 10, Oct., 1994, pp2102-2215
 Chai H.Yoo, J.P.Fehrenbach "Natural Frequencies of Curved Girders", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.107, No. 2, April, 1981, pp339-354
 M.Sekulovic "Geometrically Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members", Proceeding of the Invited Papers for the International Conference 'Steel Structures:Recent Research Advances and Their Applications to Design', Yugoslavia, Oct., 1986, pp219-243
 S.K.Chaudhuri and S.Shore, "Thin-Walled Curved Beam Finite Element", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.103, No.EM5, Oct., 1977, pp921-937