

# 탄성 지반상에 놓인 3차원 골조구조물의 동적해석

## Dynamic Analysis of Space Frameworks on the Elastic soil

장 병순\*                      서 상근\*\*  
Chang, Byung Soon        Seo, Sang Geun

---

### ABSTRACT

When a load such as the mechanical load, the wind load, and the seismic load causing a vibration, acts on the body of the 3-D frameworks with slab, it is required to consider the dynamic behavior of elastic soil as well as that of 3-D structure in the structural analysis.

Thus, this study presents the analysis of dynamic behavior using finite element method that is formulated by using a model of the 3-D structure.

For the idealization of the actual structure closely into a geometric shape, plate is subdivided into 4-node plate element with the flexibility, beam-column is subdivided into 2-node beam element, and elastic soil is subdivided into 8-node brick element.

---

### 1. 서 론

구조물에 동적하중이 작용하면 구조물의 응답은 시간에 따라 변하고, 이 때 관성력이 평형역계에서 차지하는 비중이 크면 그 구조물은 동적거동을 고려하여 해석하여야 한다.

바닥판을 가지는 3차원 골조구조물에 기계하중, 풍하중, 지진과 같은 횡방향과 연직방향으로 변위를 발생시키는 동적하중이 바닥판의 임의부분이나 측면의 임의부분에 작용한다면, 이러한 동적 하중에 의한 바닥판을 가지는 골조구조물의 동적거동을 해석해야 할뿐만아니라, 지반과의 상호작용을 고려한 동적 거동을 해석하여 그 결과를 사용해서 설계할 필요가 있다.

구조물의 정·동적 해석에서 보다 정확한 해를 얻기 위해서는 구조물의 기하학적 형상이나 재료의 특성, 하중조건 등을 실제의 구조물에 이상적으로 근접시킬 수 있도록 모델링하여야 한다.

따라서, 본 연구에서는 위와 같은 동적 하중이 바닥판을 가지는 3차원 골조구조물에 작용할 때, 실제의 구조물에 근접한 기하학적 형상으로 이상화시키기 위해 유연성을 갖는 판요소, 보-기둥요소, 8-절점 6면체 지반요소를 가지는 3차원 구조물로 모델링하여 유한요소법으로 해석하였다.

본 연구의 목적은 탄성 지반상에 놓인 동적 하중을 받는 구조물의 상호작용계에 대한 동적 운동방정식의 정식화와 지반조건의 변화에 따른 구조물의 3차원 동적해석에 적용할 수 있는 프로그램의 개발이다.

---

\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 강사

## 2. 운동방정식의 정식화

구조물이 탄성거동을 한다고 가정하면 구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\} \quad \text{-----(2.1)}$$

여기서, [M] : 질량행렬    [C] : 감쇄행렬    [K] : 강도행렬    {F(t)} : 외력벡터  
 { $\ddot{y}$ } : 가속도벡터    { $\dot{y}$ } : 속도벡터    {y} : 변위벡터

본 논문에서는 감쇄효과를 무시하였고, 고유치해석을 위해 일반화된 Jacobi법을 이용하였으며, 동적 응답해석에는 모드중첩법을 이용하였다.

## 3. 보 · 기둥요소의 정식화

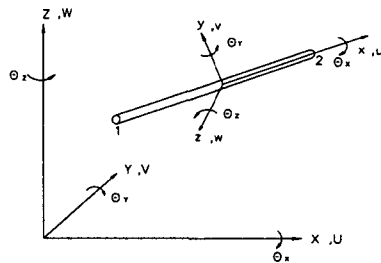


Fig. 3.1 Geometry of a three-dimensional framework element

보 · 기둥의 각 요소는 축방향변형, 두 주평면에 대한 회전 및 부재길이방향축에 대해 비틀을 받는다. 부재좌표에서 각 부재의 운동에너지( $T_e$ ), 변형률에너지( $U_e$ ) 및 가상일( $\delta W_e$ )는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx \\ U_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left\{ EI_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \\ \delta W_e &= \int_{-a}^{+a} p_x \delta u dx + \int_{-a}^{+a} (p_y \delta v + p_z \delta w) dx + \int_{-a}^{+a} m_x \delta \theta_x dx \end{aligned} \quad \text{-----(3.1)}$$

축방향변위, 회전변위 그리고 비틀변위는 분리해서 취급할 수 있다. 이 때 변위함수는

$$\begin{aligned} u &= [N_u(\xi)] \{u\}_e & w &= [N_w(\xi)] \{w\}_e \\ v &= [N_v(\xi)] \{v\}_e & \theta_x &= [N_\theta(\xi)] \{\theta_x\}_e \end{aligned} \quad \text{-----(3.2)}$$

(3.2)식을 (3.1)식에 대입하면 운동에너지와 변형률에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \{U\}_e^T [ \bar{m} ]_e \{U\}_e \\ U_e &= \frac{1}{2} \{U\}_e^T [ \bar{k} ]_e \{U\}_e \end{aligned} \quad \text{-----(3.3)}$$

여기서,  $\{U\}_e^T = [ u_1 \ v_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} ]$

그러므로 요소의 강성도행렬 [  $\bar{k}$  ] 와 질량행렬 [  $\bar{m}$  ] 는

$$[ \bar{k} ] = \int_V [ B ]^T [ D_b ] [ B ] dV \quad \text{-----(3.4)}$$

$$[ \bar{m} ] = \int_V \rho [ N ]^T [ D_b ] [ N ] dV \quad \text{-----(3.5)}$$

#### 4. 판요소의 정식화

본 연구에서는 지반-바닥판을 가지는 3차원 골조구조물 상호작용계의 거동을 해석하기 위해 지반요소를 8-절점 6면체요소, 보-기둥요소를 6자유도를 갖는 보요소로 사용하기 때문에 전체요소의 결합을 위해 면내력과 휨 모멘트를 받는 4-절점 평판요소를 도입한다.

판요소는 면내력을 받는 판과 휨을 받는 판을 각각 정의한 후 다시 조합한다.



(a) In-plane element

(b) Plate-bending element

Fig. 4.1 Geometry of a rectangular element  $\xi = \frac{x}{a}$  ,  $\eta = \frac{y}{b}$

##### 4.1. 면내력을 받는 판요소

면내력을 받는 판요소의 운동에너지와 변형률에너지의 표현은 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \rho h (u^2 + v^2) dA \quad \text{-----(4.1)}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} h(\epsilon)^T [ D ] (\epsilon) dA \quad \text{-----(4.2)}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{-----(4.3)}$$

그림 4.1 (a)에서 등매개변수요소는 형상보간함수와 변위보간함수가 동일하므로 요소내의 임의 점  $(\xi, \eta)$ 의 전체좌표계 x-y에의 변환은 다음과 같다.

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad \text{-----(4.4)}$$

$$[ m ]_e = \int_{A_e} \rho h [ N ]^T [ N ] dA \quad \text{-----(4.5)}$$

$$[ k ]_e = \int_{A_e} h [ B ]^T [ D ] [ B ] dA \quad \text{-----(4.6)}$$

여기서, h는 판의 두께이다.

##### 4.2. 휨을 받는 판요소

휨을 받는 판의 운동에너지와 변형률에너지의 표현은 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \quad \text{-----(4.7)}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{X\}^T [D] \{X\} dA \quad \text{-----(4.8)}$$

$$\{X\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{-----(4.9)}$$

그림 4.1 (b)는 4절점을 가지는 직사각형요소를 나타낸다. 휨만을 받는 판의 각 절점에서의 자유도는 3이다. 즉, 판의 면에 대한 수직변위  $w$ , 그리고 두 회전각인  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$  와  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$  이다.

$$w = [N(\xi, \eta)] \{w\}_e \quad \text{-----(4.10)}$$

(4.7)식 ~ (4.10)식에서

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{w}\}_e^T [m] \{\dot{w}\}_e \quad \text{-----(4.11)}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{w\}_e^T [k] \{w\}_e \quad \text{-----(4.12)}$$

$$\text{그러므로, } [m]_e = \int_A \rho h [N]^T [N] dA \quad \text{-----(4.13)}$$

$$[k]_e = \int_A \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA \quad \text{-----(4.14)}$$

## 5. 지반요소의 정식화

지반요소는 지반을 탄성거동을 한다고 가정한 8-절점 6면체요소를 사용하여 지반의 동적거동을 해석한다.

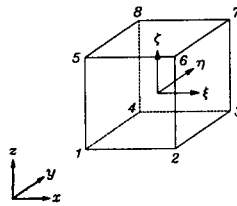


Fig. 5-1 8-Node Brick Element

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{u\}_e \quad \text{-----(5.1)}$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [m] \{\dot{u}\}_e \quad \text{-----(5.2)}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [k] \{u\}_e \quad \text{-----(5.3)}$$

$$\text{그러므로, } [m]_e = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad \text{-----(5.4)}$$

$$[k]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{-----}(5.5)$$

## 6. 전체 강성도 행렬과 전체 질량행렬의 조합

지반요소는 한 절점당 3개의 자유도를 가지고, 보요소는 한 절점당 6개의 자유도를 가지고, 판요소는 5개의 자유도를 가진다.

보요소에서의 절점하중벡터 및 변위벡터는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta_b &= \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi}\}^T \\ \delta_b^* &= \{\ddot{u}_i \ \ddot{v}_i \ \ddot{w}_i \ \ddot{\theta}_{xi}^* \ \ddot{\theta}_{yi}^* \ \ddot{\theta}_{zi}^*\}^T \quad \text{-----}(6.1) \\ F_b &= \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi}\}^T \end{aligned}$$

이고, 판요소에서의 절점하중벡터 및 변위벡터는 각각 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta_p &= \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}\}^T \\ \delta_p^* &= \{\ddot{u}_i \ \ddot{v}_i \ \ddot{w}_i \ \ddot{\theta}_{xi}^* \ \ddot{\theta}_{yi}^*\}^T \quad \text{-----}(6.2) \\ F_p &= \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi}\}^T \end{aligned}$$

지반요소에서의 절점하중벡터 및 변위벡터는 각각 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta_s &= \{u_i \ v_i \ w_i\}^T \\ \delta_s^* &= \{\ddot{u}_i \ \ddot{v}_i \ \ddot{w}_i\}^T \quad \text{-----}(6.3) \\ F_s &= \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi}\}^T \end{aligned}$$

전체강성도행렬과 전체질량행렬 조합의 편리함을 위해 변위에 대응하는 성분과 변위각에 대응하는 성분을 분리하여 다음과 같이 조합한다

$$\begin{bmatrix} [M_d] & & & & 0 \\ & [M_d] & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [M_r] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [K_d] & & & & 0 \\ & [K_d] & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [K_r] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_d \\ F_d \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} \quad \text{-----}(6.4)$$

[K<sub>d</sub>] : 변위에 대응하는 강성도 매트릭스,      [K<sub>r</sub>] : 변위각에 대응하는 강성도 매트릭스  
[M<sub>d</sub>] : 변위에 대응하는 질량 매트릭스,      [M<sub>r</sub>] : 변위각에 대응하는 질량 매트릭스

## 7. 수치해석 예

### 7.1 기초를 고정시켰을 때 Space Frameworks의 해석

#### 7.1.1 해석 모델

그림 7.1과 같은 구조물의 동적해석을 수행하기 위해 유한요소법으로 모델링한 3차원 골조구조물의 2층 슬래브 중앙에  $P(t) = 2,000 \cdot \sin(\Omega t)$ 의 하중을 z축 방향으로 재하하였다. 하중 재하시간은 2초이고 그 이후는 자유진동 상태이다.

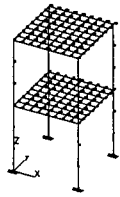


Fig. 7.1 3D frameworks with floor

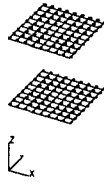


Fig. 7.2 floor

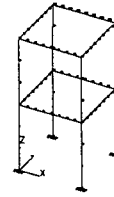


Fig. 7.3 3-D frameworks

7.1.2 해석 결과

표 1. 각 모드별 고유진동수

모드	본 프로그램	Algor Super SAP	오차(%)
	진동수(Hertz)	진동수(Hertz)	
1	5.35	5.14	4.09
2	5.35	5.14	4.09
3	7.53	7.25	3.86
4	15.56	15.21	2.30
5	15.56	15.21	2.30
6	21.30	20.72	2.80
7	22.63	22.49	0.62
8	28.12	27.41	2.59
9	38.01	37.49	1.39
10	38.01	37.49	1.39

표 2. 하중 작용점에서의 정적 해석시 변위값

		본 프로그램	Algor Super SAP
수직 변위 (cm)	하중이 슬래브의 중앙에서 재하될 경우	0.151	0.131
	하중이 슬래브의 편심되어 재하될 경우	0.118	0.100

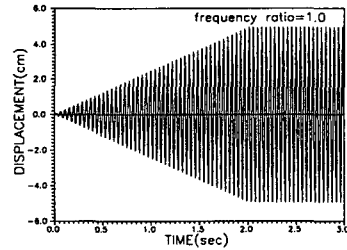
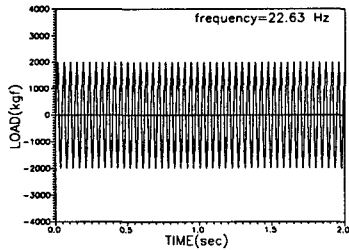


Fig 7.4 Load type and Displacement at the center-point of slab (z-axis)

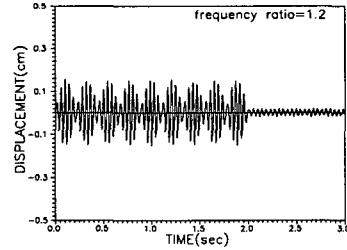
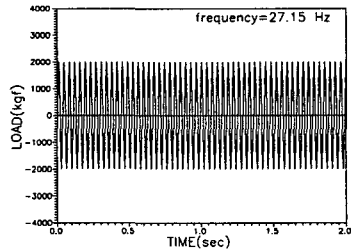
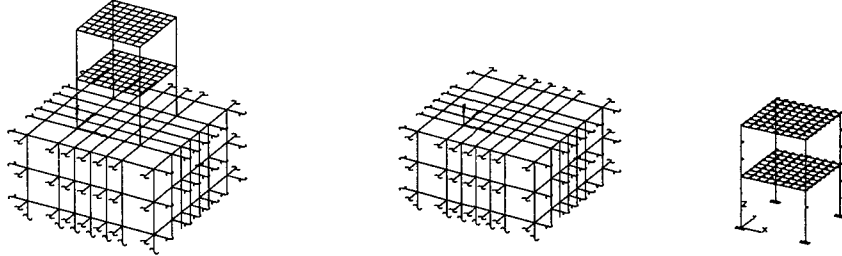


Fig 7.5 Load type and Displacement at the center-point of slab (z-axis)

## 7.2 지반-3차원 골조 구조물 상호작용계의 해석

### 7.2.1 해석 모델



(a) Soil - 3-D Frameworks with floor      (b) Soil      (c) 3-D Frameworks with floor

Fig. 7.6 Modelling for Soil - 3-D Frameworks with floor

### 7.2.2 해석 결과

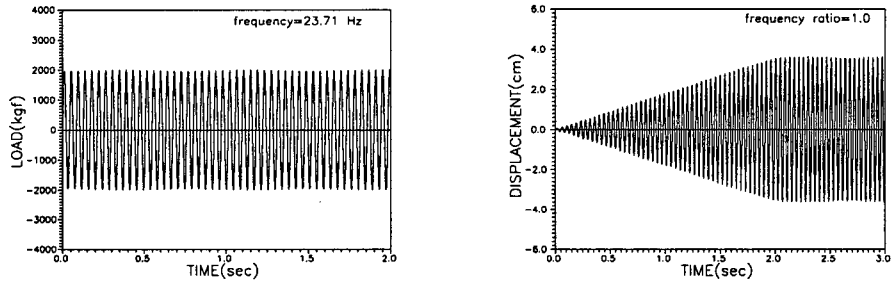


Fig 7.7 Load type and Displacement at the center-point of slab (z-axis)

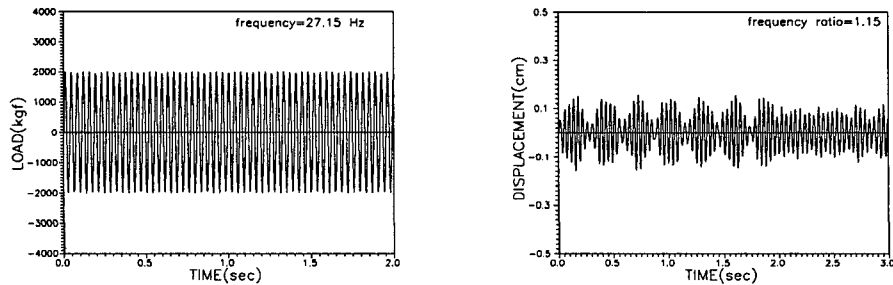


Fig 7.8 Load type and Displacement at the center-point of slab (z-axis)

## 8. 결론

본 연구에서 탄성지반상에 놓여있는 3차원 구조물의 동적해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였고, 이 개발된 프로그램을 사용하여 기초가 고정이고 슬래브를 가지는 3차원 골조구조물의 정·동적 해석결과를 Algor Super SAP과 비교하여 검증한 바 만족할만한 결과를 얻었다.

또한, 지반과의 상호작용계를 고려한 3차원 구조물의 동적해석결과를 Algor Super SAP의 해

석결과와 비교한 바, 비교적 만족할만한 결과를 얻었을 수 있었다.

기초를 고정시켰을 때 골조구조물의 동적해석 결과와 지반-골조구조물 상호작용계의 동적해석의 결과를 비교하면, 각각의 고유진동수의 변화에 따라서 같은 하중진동수일지라도 다른 변위를 보여주고 있다.

즉, 전자의 경우가 후자의 경우보다 상부슬래브의 연직변위가 더 크게 나타났다. 이는 기초가 고정일 경우는 상부슬래브의 동적 거동이 활발히 진행되는 반면 지반의 동적거동을 고려할 경우는 상부구조의 강성에 비해 지반의 강성이 적으므로 상부구조의 운동에너지를 일부 흡수함으로써 발생한 결과로 판단된다.

## 9. 참고문헌

- (1) Mario Paz, "Structural Dynamics Theory and Computation", Third Edition Van Nostrand Reinhold Company.
- (2) Maurice Petyt, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, 1990
- (3) William Weaver & Paul R. Johnston, "Structural Dynamics by Finite Elements", Prentice-Hall, Inc, 1987
- (4) O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element Method-Third Edition", McGraw-Hill, 1977
- (5) I.M.Smith and D.V.Griffiths, "Programming the finite element method", Second Edition, Wiley, 1988
- (6) KLAUS-JURGEN BATHE, "Finite Element Procedure in Engineering Analysis", Prentice Hall, 1982
- (7) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959
- (8) E.Hinton and D.R.J.Owen, "Finite element software for plates and shells", Pineridge Press, 1984
- (9) M.S.Cheung, "A Simplified Finite Element Solution for the Plates on Elastic Foundation", Comp. & Struc. Vol.8, pp139-145, 1978
- (10) T.Y.Yang, "Flexible Plate Finite Element on Elastic Foundation", J. of the Struc. Div., pp2083-2101, 1970
- (11) D.Frederick, "Thick rectangular plates on an elastic foundation", ASCE 122, 1069-1085, 1957
- (12) Phillip L. Gould, "Analysis of Shells and Plates", Springer-Verlag New York Inc., 1988
- (13) Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J.Applied Mechanics, 1945
- (14) Ray W.Clough Joseph Penzien, "Dynamics of Structures", Second Edition, McGraw-Hill, Inc., 1993
- (15) Hou-Cheng Huang, "Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989