

일정체적 고정-자유 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동 Buckling Loads and Post-Buckling Behavior of Clamped-Free Columns with Constant Volume

이 병 구* 오 상 진** 모 정 만** 진 태 기***
Lee, Byoung Koo Oh, Sang Jin Mo, Jeong Man Jin, Tai Ki

ABSTRACT

Numerical methods are developed for solving the buckling loads and the elastica of clamped-free columns of circular cross-section with constant volume. The column model is based on the Timoshenko beam theory. The Runge-Kutta and Regula-Falsi methods, respectively, are used to solve the governing differential equations and to compute the eigenvalues. Extensive numerical results, including buckling loads, elastica of buckled shapes and effects of shear deformation, are presented in non-dimensional form for elastic columns whose radius of circular cross-section varies both linearly and parabolically with column length.

1. 서론

일정체적을 갖는 구조물의 정적, 동적해석은 구조공학자들의 주요한 관심사 중의 하나이다¹⁾. 이러한 연구들은 많은 문헌들²⁻¹⁰⁾에서 찾아 볼 수 있으며, 특히 문헌 [5-10]에서는 최대좌굴하중을 갖는 부재형상에 관한 연구가 이루어졌다. 이들 문헌에 대한 개략적인 연구동향을 살펴보면 다음과 같다.

Keller⁵⁾ 및 Tadjbakhsh와 Keller⁶⁾는 최강기둥의 단면형상에 관한 연구를, Keller와 Niordson⁷⁾은 최강기둥에 관한 연구를 하였다. 또한 Taylor⁸⁾는 에너지법에 의한 최강기둥을 산출하였다. Wilson, Holloway와 Biggers⁹⁾는 최강기둥의 안정영역에 관한 실험을 행하였으며, Masur¹⁰⁾는 여러개의 고유치를 갖는 구조물의 최적설계에 관하여 연구하였다.

이 논문은 일정체적을 갖는 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴거동을 해석하는데 연구목적이 있다. 대상기둥은 원형단면을 갖는 고정-자유 기둥에 국한하였으며, 원형단면의 반경변화는 직선식과 포물선식을 채택하였다. 이러한 대상기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 Timoshenko 보이론을 이용하여 유도하였으며, 이를 Runge-Kutta method를 이용하여 수치적분하고, 고유치인 좌굴하중과 자유단의 수평처짐을 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다.

이 연구에서 기둥은 선형탄성의 이상기둥이며, 축압축하중을 받는 기둥의 축은 비압축성으로 가정하였다. 또한 기둥의 후좌굴 거동 해석에서 하중의 방향은 항상 좌굴전 기둥의 축방향과 일치한다.

* 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 원광대학교 대학원

*** 원광대학교 산업대학원

2. 대상기둥

그림 1은 지간길이가 l 이고 원형단면을 갖는 변단면 기둥에서 단면의 반경변화를 직교좌표계 (s, r) 에 나타낸 그림이다. 이 그림에서 부재의 한쪽 단부인 $s=0$ 에서 반경은 a , 다른쪽 단부인 $s=l$ 에서 반경은 b , 부재축상 임의점 s 에서 반경은 r 로 표시되어 있다.

반경의 변화식 r 은 s 의 함수로 표시되는 모든 함수식이 가능하나 이 연구에서는 직선식 및 포물선식으로 채택하였다. 본 연구에서 대상기둥은 s 축을 기준으로 r 식을 회전시켰을 때 만들어지는 원형단면의 변단면 기둥이 되며, 이 기둥의 체적은 양단부의 반경 a, b 값에 무관하게 일정한 체적 V 를 갖는다.

변단면 기둥의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 다음 (1)식과 같은 무차원양인 단면비 n 을 도입한다. 이때 $s=0$ 의 단부를 고정단으로, $s=l$ 의 단부를 자유단으로 하는 기둥에 적용시키기 위하여 n 값은 0~1사이의 값으로 제한한다.

$$n = b/a, \quad 0 < n \leq 1 \quad (1)$$

직교좌표계 (s, r) 에서 두점 $(0, a)$ 및 (l, na) 를 지나는 직선 및 포물선의 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\text{직선변단면} : r = a[(n-1)(s/l) + 1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (2)$$

$$\text{포물선변단면} : r = a[(n-1)(s/l)^2 + 1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (3)$$

위의 (2), (3)식에서 직선 변단면 및 포물선 변단면은 각각 직선 및 포물선으로 반경이 변화하는 기둥을 말하며, (3)식에서 포물선식은 $s=0$ 에서 꼭지점이 되는 포물선이다.

주어진 단면비 n 및 반경변화식 r 로 정의되는 변단면 기둥의 체적 V 는 (2), (3)식을 이용하면 다음과 같이 산출되고 이 체적 V 는 일정하다.

$$V = \pi \int_0^l r^2 ds = a(\pi a^2 l) \quad (4)$$

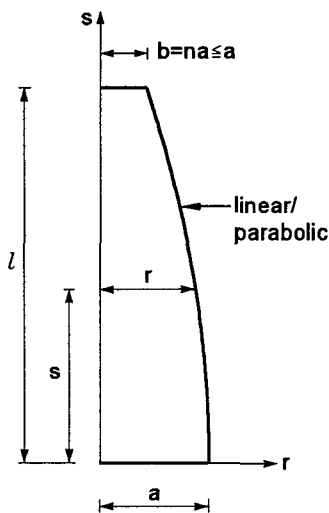


그림 1. 원형단면의 반경변화

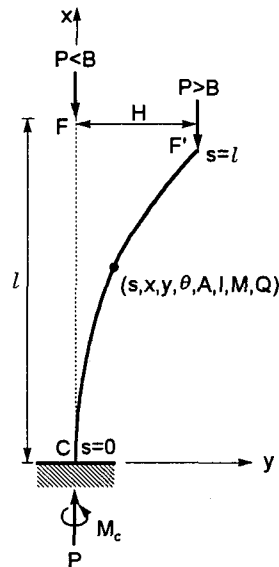


그림 2. 정확탄성곡선 및 변수

여기서,

$$\text{직선변단면} : \alpha = (n^2 + n + 1)/3 \quad (5)$$

$$\text{포물선변단면} : \alpha = (3n^2 + 4n + 8)/15 \quad (6)$$

또한 부재축상 임의점 s 에서 단면2차모멘트 $I = \pi r^4/4$ 은 다음과 같다.

$$\text{직선변단면} : I = \pi a^4/4[(n-1)(s/l) + 1]^4 \quad (7)$$

$$\text{포물선변단면} : I = \pi a^4/4[(n-1)(s/l)^2 + 1]^4 \quad (8)$$

3. 지배미분방정식

그림 2는 앞에서 정의된 바와 같이 일정체적 V 를 갖는 고정-자유인 변단면 기둥에 압축하중 P 가 작용하고 있는 형상을 나타낸 것이다. 이 기둥은 좌굴하중 B 보다 작은 하중 P 를 받으면 점선 CF와 같이 직선상태를 유지하나 B 보다 큰 하중을 받으면 좌굴하여 실선 CF'과 같은 정확탄성곡선을 이루게 된다.

후좌굴 기둥의 고정단($s=0$)으로부터 기둥의 중립축을 따라서 측정한 거리 s 에서 제변수는 $(s, x, y, \theta, I, M, Q)$ 이다. 여기서 (x, y) 는 정확탄성곡선을 정의해 주는 직교좌표계, θ 는 단면회전각, I 는 단면2차모멘트, M 은 휨모멘트, Q 는 전단력이다. 기둥의 축은 비압축성이므로 자유단에서 $s=l$ 이다. 기둥의 자유단에서 수평처짐은 H , 수직처짐은 V 로 표시되어 있다. 또한 고정단에는 수직반력 P 와 모멘트반력 $P \cdot H$ 가 작용한다.

전단변효과를 고려하는 Timoshenko 보이론에 의한 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} + \frac{f}{GA} \frac{dQ}{ds}, \quad 0 \leq s \leq l \quad (9)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad 0 \leq s \leq l \quad (10)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l \quad (11)$$

위의 (9)식에서 E, G 는 탄성계수 및 전단탄성계수이고, A 는 단면적이다. 또한 f 는 전단계수이며 본 연구에서는 원형단면에 국한하였으므로 그 값은 다음과 같다.

$$f = 4/3 \quad (12)$$

후좌굴 기둥의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다. 먼저 고정단($s=0$)에서는 처짐 및 단면회전이 없어야 하므로 그 경계조건은 다음과 같다.

$$x = y = \theta = 0, \quad s = 0 \text{에서} \quad (13-15)$$

또한 자유단($s=l$)에서 휨모멘트 M 은 "0"이다.

$$M = 0, \quad s = l \text{에서} \quad (16)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\lambda = s/l, \quad \xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad h = H/l, \quad v = V/l \quad (17-21)$$

$$p = P l^2 / \pi^2 E I_e, \quad \Gamma = G/E, \quad x = 2l/a \quad (22-24)$$

위의 식들에서 $(\lambda, \xi, \eta, h, v)$ 는 (s, x, y, H, V) 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 하중이며 여기서 I_e 는 일정체적 V 를 지간길이가 l 인 원형단면을 갖는 등단면 기둥으로 만들었을 때의 단면2차모멘트로서 다음 식과 같다.

$$I_e = (V/2l)^2 / \pi \quad (25)$$

또한 Γ 는 탄성계수비이고, x 는 기둥의 고정단을 기준으로 한 세장비*이다.

정확탄성곡선상의 임의점 s 에서 M 및 Q 는 다음과 같다.

$$M = -PH + Py \quad (26)$$

$$Q = P \sin \theta \quad (27)$$

(27)식에서 dQ/ds 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dQ}{ds} = P \cos \theta \frac{d\theta}{ds} \quad (28)$$

(9)식에 (26), (28)식과 (7)식 또는 (8)식 및 $A = 2\sqrt{\pi i}$ 를 대입하고 무차원 변수 (17)-(24)식을 이용하면 (29)식을 얻을 수 있으며, (10), (11)식은 무차원 변수 (17)-(19)식을 이용하면 (30), (31)식과 같이 변환된다.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\pi^2 a^2 p (h - \eta)}{i} \left(1 - \frac{f}{\Gamma x^2} \frac{\pi^2 a^2 p \cos \theta}{i^{1/2}} \right)^{-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (29)$$

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (30)$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (31)$$

(29)식에서 i 는 다음과 같다.

$$\text{직선변단면} : i = [(n-1)\lambda + 1]^4 \quad (32)$$

$$\text{포물선변단면} : i = [(n-1)\lambda^2 + 1]^4 \quad (33)$$

또한 경계조건식 (13)-(16)식은 무차원 변수 (17)-(19)식과 (26)식을 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\xi = \eta = \theta = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (34-36)$$

$$p(h - \eta) = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (37)$$

* $x = l / (I_c / A_c)^{1/2}$ 에서 $I_c = \pi a^4 / 4$, $A_c = \pi a^2$ 을 적용하면 세장비는 (24)식과 같이 $x = 2l/a$ 가 된다.

4. 수치해석방법

이상에서 유도된 미분방정식과 경계조건을 이용하면, 주어진 기둥의 기하학적 형상 및 하중조건 즉, 변단면의 종류, n , $f=4/3$, Γ , κ , p 에 대한 정확탄성곡선을 얻을 수 있다. 유도된 지배미분방정식 (29)-(31)식은 초기치 문제이므로 $\lambda=0$ 에서의 경계조건 즉 (34)-(37)식의 $\xi=\eta=\theta=0$ 를 이용하여 수치적분할 수 있고 이 미분방정식에서 고유치인 h 값은 $\lambda=1$ 에서의 경계조건인 (37)식의 $p(h-\eta)=0$ 를 이용하여 찾을 수 있다. 이 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 고유치인 자유단의 수평처짐 h 는 Regula-Falsi method를 이용하여 찾았다.

기둥 자유단의 수평처짐 H 가 발생하는 순간의 하중 P 가 좌굴하중 B 가 된다. 따라서 미분방정식 (29)식에서 h 가 매우 작을 때의 p 값을 근사적인 무차원 좌굴하중 b 로 생각할 수 있다. 따라서 (29)식에 $p=b$ 를 대입하고 정리하면 (38)식과 같으며 이 (38)식에서 h 값은 이미 결정된 매우 작은 값이다.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\pi^2 \alpha^2 b (h - \eta)}{i} \left(1 - \frac{f}{\Gamma \kappa^2} \frac{\pi^2 \alpha^2 b \cos \theta}{i^{1/2}} \right)^{-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (38)$$

여기서,

$$b = B I^2 / \pi^2 E I_e \quad (39)$$

이제 무차원 좌굴하중 b 는 (38), (30), (31)식의 미분방정식과 경계조건 (34)-(37)식을 이용하면 구할 수 있다. 수치해석방법은 정확탄성곡선 문제와 동일하고 (38)식의 미분방정식에서 고유치는 b 가 된다.

5. 수치해석 예 및 고찰

실제의 수치적용예를 실행하기 전에 수렴해석을 실시하여 b 를 산정하기 위한 h 를 산정하여야 한다. 표 1은 h 값을 변화시키면서 b 값을 산출한 수렴해석 결과이다. 이 표에서 알 수 있듯이 h 를 1×10^{-4} 이하가 되도록 하면 유효숫자 5자리 정도의 수렴된 b 값을 얻을 수 있다. 이 연구에서는 수렴해의 정도를 강화하기 위하여 $h=1 \times 10^{-8}$ 에서의 하중을 b 로 계산하였다.

미분방정식 (29)식 또는 (38)식에서 볼 수 있듯이 전단변형효과는 Γ 와 κ 로 구성되어 있으므로 이들 요소들이 b 에 미치는 영향을 분석하였다. 먼저 탄성계수비 Γ 가 b 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 Γ 의 변화에 따른 b 값을 표 2에 나타내었다. 이 표로부터 Γ 는 b 를 증가시키는 요인이지만 그 영향력은 매우 작은 것을 알 수 있다.

표 1. b 와 h 사이의 수렴해석

h	무차원 좌굴하중, b	
	직선변단면, n=0.5, $\Gamma=0.37, \kappa=50$	포물선변단면, n=0.7, $\Gamma=0.37, \kappa=150$
1×10^{-1}	0.30729	0.30832
1×10^{-2}	0.30557	0.30717
1×10^{-3}	0.30556	0.30715
1×10^{-4}	0.30555	0.30715
1×10^{-5}	0.30555	0.30715
1×10^{-8}	0.30555	0.30715

* 원형단면이므로 $f=4/3$ 임.

표 2. Γ 가 b 에 미치는 영향

Γ	무차원 좌굴하중, b	
	직선변단면 $n=0.5, \kappa=50$	포물선변단면 $n=0.7, \kappa=150$
0.35	0.30551	0.30715
0.36	0.30553	0.30715
0.37	0.30555	0.30715
0.38	0.30558	0.30716
0.39	0.30560	0.30716
0.40	0.30562	0.30716
무시	0.30638	0.30727

표 3. κ 가 b 에 미치는 영향($\Gamma=0.37$)

κ	무차원 좌굴하중, b	
	직선변단면, $n=0.5$	포물선변단면, $n=0.7$
10	0.28676	0.28372
30	0.30409	0.30446
50	0.30555	0.30625
100	0.30618	0.30701
150	0.30629	0.30715
200	0.30633	0.30720
∞	0.30638	0.30727

세장비 x 가 b 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 x 의 변화에 따른 b 값을 표 3에 나타내었다. 이 표에서 x 는 b 를 증가시키는 요인이며 세장비 x 가 작은 경우 그 영향력이 비교적 큰 것을 알 수 있다. $x=10$ 일 때 b 값은 $x=\infty$ 의 b 값과 비교하여 약 6-8%의 비교적 큰 차이로 감소하였음을 알 수 있다. $x=\infty$ 이면 전단변형을 무시하는 경우이므로 $x < 30$ 인 경우에는 전단변형효과를 고려하여 좌굴하중을 산정하는 것이 구조설계상 안전측에 든다.

그림 3은 b 와 n 사이의 관계($\Gamma=0.37, \kappa=50$)를 나타낸 것이다. 이 그림에서 n 값이 증가함에 따라 b 값이 증가하다가 극치를 보인 후에 감소함을 알 수 있다. 이 그림에서 □로 표시된 가장 높은 점들의 b, n 값이 최강기둥의 좌굴하중 및 단면비가 된다. 선형변단면(점선)의 경우에는 최강기둥은 $n=0.58, b=0.310$ 에서, 포물선변단면(실선)의 경우에는 $n=0.51, b=0.324$ 에서 발생한다. 포물선변단면의 $b-n$ 곡선이 선형변단면의 $b-n$ 곡선보다 항상 윗쪽에 있어 포물선변단면이 직선변단면보다 더 큰 좌굴하중을 보이고 있다. 두 곡선의 차이는 $0.1 < n < 0.6$ 범위에서 크게 나타나고 있어 이 범위에서는 포물선변단면으로 기둥을 설계하는 것이 유리하다고 생각된다. 또한 최강기둥의 경우에 포물선변단면이 직선변단면에 비하여 약 5%가 더 큰 것을 알 수 있다.

그림 4는 포물선변단면에서 $\Gamma=0.37, \kappa=50$ 인 경우 $n=0.51$ (최강기둥)과 $n=0.7$ 인 두 기둥의 평형 경로를 나타낸 것이다. 이 그림에서 p 와 변위사이의 관계를 당연히 비선형성을 보임을 알 수 있다.

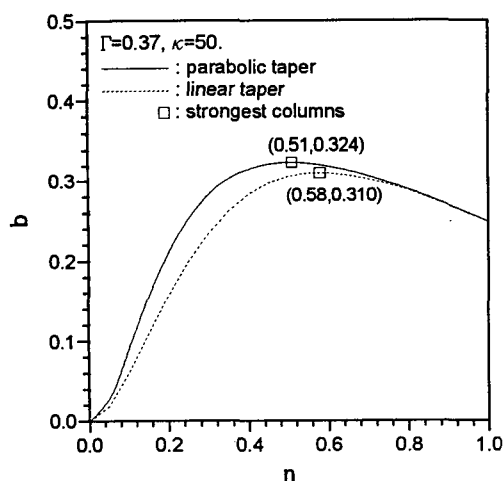


그림 3. $b-n$ 곡선

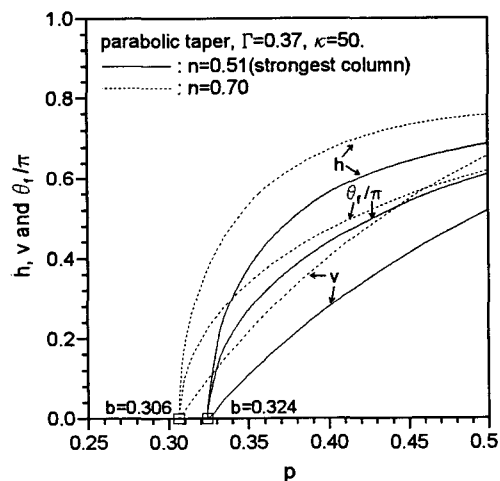


그림 4. 평형경로

며, 최강기둥($n=0.51$)의 평형경로가 $n=0.7$ 인 경우에 비해 항상 아래쪽에 존재하고 있어 최강기둥의 하중에 대한 저항능력이 더 크음을 알 수 있다. 이 그림에서 □로 표시된 점의 p 값이 해당기둥의 좌굴하중이며 최강기둥($n=0.51$)의 경우는 그림 3에 나타낸 바와 같이 $b=0.324$ 를 나타내고 있다. 한편 h-p곡선의 경우 좌굴직후에 경사가 매우 급하여 일단 좌굴이 발생하면 매우 큰 수평방향치짐이 발생함을 알 수 있다.

그림 5, 6은 직선변단면에서 $p=0.307$ 일 때 전단변형을 무시한 경우와 고려한 경우($\Gamma=0.37, \kappa=50$)에 대한 정확탄성곡선과 무차원 휨모멘트를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 전단변형효과를 고려하면 더 큰 치짐과 휨모멘트가 발생함을 알 수 있어 전단변형효과를 고려하는 것이 구조설계상 안전측에 있음을 알 수 있다.

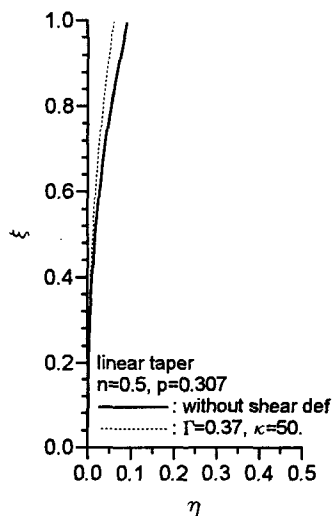


그림 5. 정확탄성곡선의 예

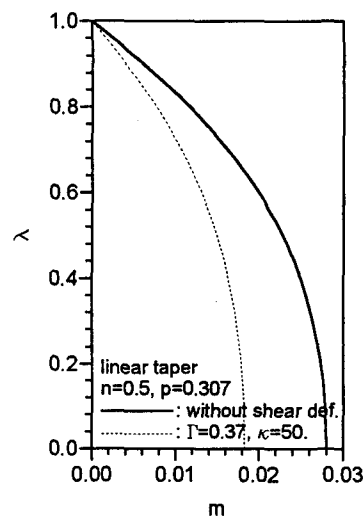


그림 6. 후좌굴기둥의 무차원 휨모멘트

6. 결론

이 논문은 일정체적을 갖는 고정-자유 변단면 기둥의 좌굴하중 및 후좌굴 거동에 관한 연구이다. 전단변형효과를 고려한 일정체적의 원형단면을 갖는 변단면 기둥의 후좌굴 거동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 원형단면의 반경변화식으로는 직선식과 포물선식을 택하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 좌굴하중과 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 산출하였다. 수치해석 결과로 전단변형이 좌굴하중 및 후좌굴 거동에 미치는 영향을 분석하였다.

참 고 문 헌

1. Haftka R.T., Gürdal Z. and Kamat M.P., Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher, 1990.
2. Niordson F.I., "On the Optimal Design of a Vibrating Beam", Q. Appl. Math., Vol.23, 1965.
3. Kamat, M.P. and Simites, G.J., "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method", Int. J. Solids Struct., Vol.9, 1975, pp.51-62.
4. Kamat, M.P. and Simites, G.J., "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam

- Frequencies", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.9, 1975, pp.51-62.
5. Keller, J.B., "The Shape of the Strongest Column", *Archiv. Rat. Mech. and Anal.*, Vol.5, 1960, pp.275-285.
 6. Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B. "Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues" *J. Appl. Mech.*, Vol.29, 1962, pp.159-164.
 7. Keller, J.B. and Niordson, F.I., "The Tallest Column", *J. Math. and Mech.*, Vol.16, 1966, pp.433-446.
 8. Taylor, J.E., "The Strongest Column-An Energy Approach", *J. Appl. Mech.*, Vol.34, 1967, pp.486-487.
 9. Wilson, J.F., Holloway, D.M. and Biggers S.B., "Stability Experiments on the Strongest Columns and Circular Arches", *Experimental Mechanics*, 1971, pp.1-6.
 10. Masur, E.F., "Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints", *Int. J. Solids Struct.* Vol.20, 1984, pp.211-231.