한국전산구조공학회
1996년도 봄학술발표회 논문집

계면균열해석에 대한 경계요소법의 응용 (II) : 탄성-점탄성 문제

Application of Boundary Element Methods to Interface Crack Problems (II) : Elastic-Viscoelastic Problem

이 상순, 김 정규, 김 태형, 박 건우, 황 종근
Lee. S.S, Kim. J.G, Kim. T.H, Park. K.W and Hwang. J.K

ABSTRACT

The stress intensity factor for an interface crack in dissimilar elastic and viscoelastic materials is derived and the time-domain boundary element analysis is performed. Numerical results show that the proposed method is very useful for the analysis of the interface crack in elastic and viscoelastic bimaterials.

1. 서론

서로 다른 재료들로 구성된 복합재료의 공유면에 존재하는 계면균열에 대한 연구는 오래전 부터 진행되어 왔다 [1-11]. 이러한 연구들은 모두 탄성-탄성 복합재료의 거동에 집중되어 있다. 그러나 현재 사용되고 있는 다양한 종류의 복합재료를 고려해 볼때, 또는 여러가지 환경조건, 즉 상온 보다 높은 온도상태나 수분이 많은 조건하에서 복합재료가 공학구조체에 사용되었을때를 가정해 보면 탄성-점탄성 복합재료의 해석이 매우 중요하다고 볼 수 있다. 본 논문에서는 먼저 탄성-점탄성 복합재료의 계면균열의 거동을 나타내는 응력확대계수에 대한 식을 유도하였다. 다음에 경계요소법을 이용하여 균열선단에서의 응력을 계산하여 응력확대계수의 값을 구하였다. 자세한 해석은 Lee 와 Westmann [12] 이 제시한 시간영역 경계요소법을 이용하여 수행하였다.

2. 응력확대계수의 계산

그림 1은 탄성-점탄성 복합재료의 계면균열을 보여주고 있다. 탄성-점탄성 복합재료의 계면균열 선단 부근에서의 응력분포는 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여 구해지는데, 라플라스 변형공간에서 $\theta = 0$ 인 조건에서의 응력은 다음과 같이 표현될 수 있다 :

한국원자력연구소 원자로기계분야

$$\left[\bar{\sigma}_{yy}(r,\theta;s) + i\,\bar{\tau}_{xy}(r,\theta;s)\right]_{\theta=0} = \frac{\bar{K}_1(s) + i\,\bar{K}_2(s)}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left\{ i\beta(s)\ln\left(\frac{r}{d}\right)\right\} \qquad (1)$$

식 (1)에서,

$$\beta(s) = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\bar{\gamma}(s)\right]$$

$$\bar{\gamma}(s) = \left[\frac{\bar{\kappa}_I(s)\mu_{II} + s\bar{\mu}_I(s)}{\kappa_{II}\, s\bar{\mu}_I(s) + \mu_{II}}\right] \qquad (2)$$

$$\bar{\kappa}_I(s) = 3 - 4\,s\bar{\nu}_I(s) \quad \text{(평면 변형)}$$

$$= \frac{3 - s\bar{\nu}_I(s)}{1 + s\bar{\nu}_I(s)} \quad \text{(평면 응력)}$$

$$\kappa_{II} = 3 - 4\,\nu_{II} \quad \text{(평면 변형)}$$

$$= \frac{3 - \nu_{II}}{1 + \nu_{II}} \quad \text{(평면 응력)}$$

식 (1)에서 r은 균열 선단으로 부터의 거리를 나타내고, d 는 r을 정규화시키는 임의의 길이이다. $i = \sqrt{-1}$ 이고, K_I과 K_2는 복합응력확대계수 $K(= K_I + i\,K_2)$ 를 나타내며, 아래 첨자들은 각각의 영역을 나타낸다. 윗 식에서 $\bar{\sigma}_{yy}(s)$ 와 $\bar{\tau}_{xy}(s)$ 는 라플라스 변형된 점탄성 응력들을 가리키고, $\bar{K}_I(s)$ 와 $\bar{K}_2(s)$ 는 라플라스 변형된 응력확대계수들을 나타내며, s 는 변형변수이다. $\bar{\mu}_I(s)$ 와 $\bar{\nu}_I(s)$ 는 $\mu_I(t)$ 와 $\nu_I(t)$ 의 라플라스 변형을 나타낸다.

시간영역에서의 응력확대계수의 크기는 윗 식으로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$K_o(t) = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\sqrt{\left[\sigma_{yy}(r,0;t)\right]^2 + \left[\tau_{xy}(r,0;t)\right]^2} \qquad (3)$$

응력확대계수의 크기는 식(3)을 이용하여, 균열 선단 부근에서의 응력들로 부터 직접 계산할 수 있다.

3. 경계요소법과 수치해석 결과

3.1 경계요소 공식화

2장에서 설명한 방법을 이용하여 경계요소법으로 계산한 응력확대계수의 정확성을 보이기 위하여, 크기가 $2a$ 인 계면균열을 갖는 무한평판에 $(\sigma_{yy})_\infty$ 가 작용하는 문제를 선택하였다 (그림 2-(a)). 그림 2-(a)에서 상판은 선형 점탄성 재료를 나타내고, 하판은 선형 탄성체를 가리킨다. 이 복합 무한 평판은 평면 변형상태에 있다고 가정한다.

그림2-(b)는 해석모델을 보여주고 있다. 어떠한 체력 (body forces) 도 존재하지 않

는다는 가정아래, 해석모델에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다 :

점탄성 평판에 대해서,

$$
\begin{aligned}
& c_{ij}^{v}(\mathbf{y})\, u_{j}^{v}(\mathbf{y},t) \\
& + \int_{S^{v}} \left[u_{j}^{v}(\mathbf{y}',t) T_{ij}^{v}(\mathbf{y},\mathbf{y}';0+) + \int_{0+}^{t} u_{j}^{v}(\mathbf{y}',t-t') \frac{\partial T_{ij}^{v}(\mathbf{y},\mathbf{y}';t')}{\partial t'} dt' \right] dS^{v}(\mathbf{y}') \\
& = \int_{S^{v}} \left[t_{j}^{v}(\mathbf{y}',t) U_{ij}^{v}(\mathbf{y},\mathbf{y}';0+) + \int_{0+}^{t} t_{j}^{v}(\mathbf{y}',t-t') \frac{\partial U_{ij}^{v}(\mathbf{y},\mathbf{y}';t')}{\partial t'} dt' \right] dS^{v}(\mathbf{y}')
\end{aligned}
\tag{4}
$$

탄성 평판에 대해서,

$$
\begin{aligned}
& c_{ij}^{e}(\mathbf{y})\, u_{j}^{e}(\mathbf{y},t) + \int_{S^{e}} u_{j}^{e}(\mathbf{y}',t)\, T_{ij}^{e}(\mathbf{y},\mathbf{y}')\, dS^{e}(\mathbf{y}') \\
& = \int_{S^{e}} t_{j}^{e}(\mathbf{y}',t)\, U_{ij}^{e}(\mathbf{y},\mathbf{y}')\, dS^{e}(\mathbf{y}')
\end{aligned}
\tag{5}
$$

이다. 식 (4)와 (5)에서 윗 첨자 'v' 와 'e'는 각각 점탄성 평판과 탄성 평판을 가리키고, u_i 와 t_i 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력 (traction) 을 나타내며, S 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. U_{ij} 와 T_{ij} 들은 기본해들이다.

일반적으로, 식 (4)와 (5)에 대한 정밀해를 구하는것은 불가능하기 때문에 수치적분이 사용되어야 한다. 이 논문에서는 변위와 표면력, 그리고 기하적 형상을 나타내기 위해서 이차 형상함수 (quadratic shape functions) 를 사용하였다. 자세한 계산과정은 참고 문헌 [12]에 설명되어 있다.

응력확대계수는 균열 선단부근에서의 응력으로 부터 계산될 수 있다. 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 특수 경계요소가 사용되어야 한다. 이 논문에서는, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소 (traction singular quarter-point element) 를 사용하였다. 이러한 경계요소에 대한 자세한 설명과 수치해석 결과들은 참고 문헌 [9] 와 [10]에 나타나 있다.

결과적인 방정식은 다음과 같은 행렬 방정식으로 쓸 수 있다. 즉,

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{1} & \mathbf{H}^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^{21} & \mathbf{H}^{2} & -\mathbf{G}^{21} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{1} \\ \mathbf{u}^{12} \\ \mathbf{u}^{2} \\ \mathbf{t}^{21} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathbf{G}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{2} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \mathbf{t}^{1} \\ \mathbf{t}^{2} \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}
\tag{6}
$$

식 (6)에서, 윗 첨자 '1' 과 '2' 는 각각 점탄성 영역과 탄성 영역을 가리키고,

'12' 와 '21' 는 두 영역의 공유면을 나타내며, H 와 G 는 각각의 영역에서의 영향 행렬들을 나타내고, **R**은 점탄성체의 이력에 의한 영향을 가리킨다. 외부 경계조건을 식 (6)에 적용하여 풀면, 경계면과 공유면에서의 응력과 변위를 구하게 된다.

3.2 수치해석 결과

이 논문에서는, 점탄성체의 모델로써 체적계수는 탄성거동을, 전단계수는 표준 선형고체거동을 한다고 가정하였다. 즉,

$$k_I(t) = k_o$$
$$\mu_I(t) = g_o + g_1 \exp\left(-\frac{t}{t^*}\right) \tag{7}$$

식 (7)에서 아랫 첨자 'I' 는 점탄성체를 가리킨다. 수치해석에서 사용한 물성 값들은 다음과 같다.

$$\frac{\mu_I(\infty)}{\mu_I(0)} = 0.6, \quad \frac{k_o}{\mu_I(0)} = 4$$
$$\frac{\mu_{II}}{\mu_I(0)} = 2, 10, 73, \quad \nu_{II} = 0.2 \tag{8}$$
$$t^* = 2$$

식 (8)에서 아랫첨자 'II' 는 탄성체를 가리키고, μ 와 ν 는 각각 전단계수와 포아손의비를 나타낸다.

그림 2-(b)에서 W = 19a 와 H = 16a 로 가정하였는데, 여기에서 a 는 균열길이를 나타낸다. a = 0.5에 대해 36개의 이차 경계요소가 사용되었다. 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 특수 경계요소가 사용되어야 한다. 이 논문에서는, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소 (traction singular quarter-point element) 를 사용하였다. 응력확대계수의 크기는 식 (3)로 부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_o(t) = \sqrt{2\pi L}\sqrt{\left[t_1^A(t)\right]^2 + \left[t_2^A(t)\right]^2} \tag{9}$$

식 (9)에서 t^A_i 는 경계요소법에 의해 계산된 균열 선단에서의 표면력을 나타내고, L 은 균열 선단에 있는 경계요소의 길이를 가리킨다.

표 1 과 2 는 식 (9)를 이용하여, 시간 $t/t^* = 0$ 와 $t/t^* = 20$ 에서 계산하여 정규화된 응력확대계수의 크기 $K_o(t)/K^*$ 를 나타내고 있는데, 여기에서 $K^* = (\sigma_{yy})_\infty\sqrt{\pi a}$ 이다. 비교의 목적을 위하여, 그림 2-(b)에서 윗 평판 영역 I에 대해 점탄성 재료 대신 전단계수가 각각 $\mu(0)$ 와 $\mu(\infty)$ 인 탄성체로 구성되어 있다고 가정하고, 아랫 평판 영역 II 는 원래의 탄성 평판이 변함없이 유지된다고 가정한다. 초기 시간 $t/t^* = 0$ 에서 경계요소법에 의한 수치해석결과는 각각의 전단계수 $\mu(0)$ (윗 평판)와 μ_{II}(아랫 평판) 로 구성된 탄성-탄성 평판의 결과와 같아야 한다. 또, 시간이 매우 커질때, 경계요소법에 의한 수치해석

결과는 각각의 전단계수 $\mu(\infty)$ (윗 평판)와 μ_{II}(아랫 평판) 로 구성된 탄성-탄성 평판의 결과에 수렴해야 한다. 이 논문에서 사용된 μ_{II}/μ_{I} 값들의 범위에서, 식 (9)를 이용하여, 시간 $t/t^* = 0$ 와 $t/t^* = 20$에서 계산하여 정규화된 응력확대계수의 크기는 정밀해와 비교했을때, 오차의 크기가 $1.6\,\%$ 이하였다.

4. 결론

본 논문에서는, 시간영역 경계요소법을 사용하여 탄성-점탄성 복합재료의 계면 균열을 해석하는 과정을 제시하였다. 먼저, 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여, 관련 탄성해로 부터 응력확대계수를 유도하였다. 응력확대계수의 크기는 균열 선단 부근에서의 응력들로 부터 직접 계산할 수 있다. 균열 선단에서의 응력을 계산하기 위해서 시간영역 경계요소법을 사용하였는데, 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서 특수 경계요소가 사용되었다. 즉, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소를 사용하였다. 수치해석의 결과는 본 논문에서 제시한 방법의 정확성과 응용가능성을 보여주고 있다.

참 고 문 헌

1. M.L. Williams, " The Stress Around A Fault of Crack in Dissimilar Media," Bull. Seismol. Soc. Am., 49 (1959) 199-204.
2. J.R. Rice and G.C. Sih, " Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media," J. Applied Mechanics, 32(1965) 418-422.
3. F. Erdogan," Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks," J. Applied Mechanics, 32 (1965) 403-410.
4. A.H. England, " A Crack Between Dissimilar Media," J. Applied Mechanics, 32(1965) 400-402.
5. M. Comninou, " The Interface Crack," J. Applied Mechanics, 44(1977) 631-636.
6. J.R. Rice," Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," J. Applied Mechanics, 55(1988) 98-103.
7. M. Comninou, " An Overview of Interface Cracks," Engineering Fracture Mechanics, 37(1990) 197-208.
8. R. Yuuki and S.B. Cho," Efficient Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials," Engineering Fracture Mechanics, 34 (1989) 179-188.
9. C.L. Tan and Y.L. Gao," Treatment of Bimaterial Interface Crack Problems Using the Boundary Element Method," Engineering Fracture Mechanics, 36 (1990) 919-932.
10. S.T. Raveendra and P.K. Banerjee, " Computation of Stress Intensity Factor for Interfacial Cracks," Engineering Fracture Mechanics, 40(1991) 89-103.
11. N. Miyazaki, T. Ikeda, T. Soda and T. Munakata, " Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack Using Boundary Element Method-Application of Contour-Integral Method" , Engineering Fracture Mechanics, 45(1993) 599-610.

12. S.S.Lee and R.A. Westmann, "Application of High-Order Quadrature Rules to Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity," Int. J. Numerical Methods in Engineering, 38(1995) 607-629.

표 1. 탄성-점탄성 복합 무한평판의 계면균열 문제에 대해 시간 $t/t^* = 0$ 에서 계산하여 정규화된 응력확대계수의 크기

Elastic Solution for $\mu_{II}/\mu_{I}(0)$		BEM Results (K_σ/K^*) at $t/t^* = 0$	% Diff.
$\mu_{II}/\mu_{I}(0)$	$(K_\sigma/K^*)_{elastic}$		
2	1.000059	0.9965	< 1
10	1.00077	1.0057	< 1
73	1.00163	1.0175	< 1.6

표 2. 탄성-점탄성 복합 무한평판의 계면균열 문제에 대해 시간 $t/t^* = 20$ 에서 계산하여 정규화된 응력확대계수의 크기

Elastic Solution for $\mu_{II}/\mu_{I}(\infty)$		BEM Results (K_σ/K^*) at $t/t^* = 20$	% Diff.
$\mu_{II}/\mu_{I}(\infty)$	$(K_\sigma/K^*)_{elastic}$		
3.33	1.00035	0.995	< 1
16.67	1.00001	0.9998	< 1
121.0	1.00010	1.00507	< 1

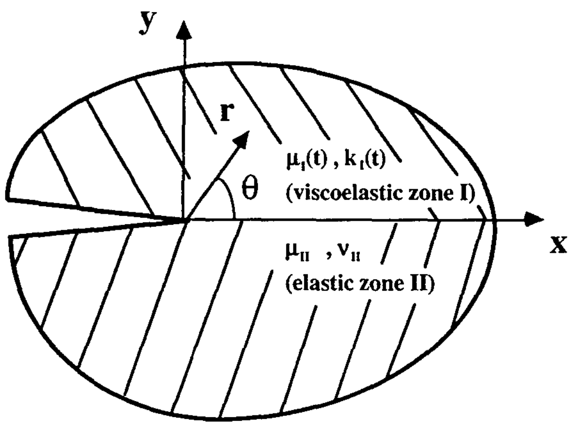
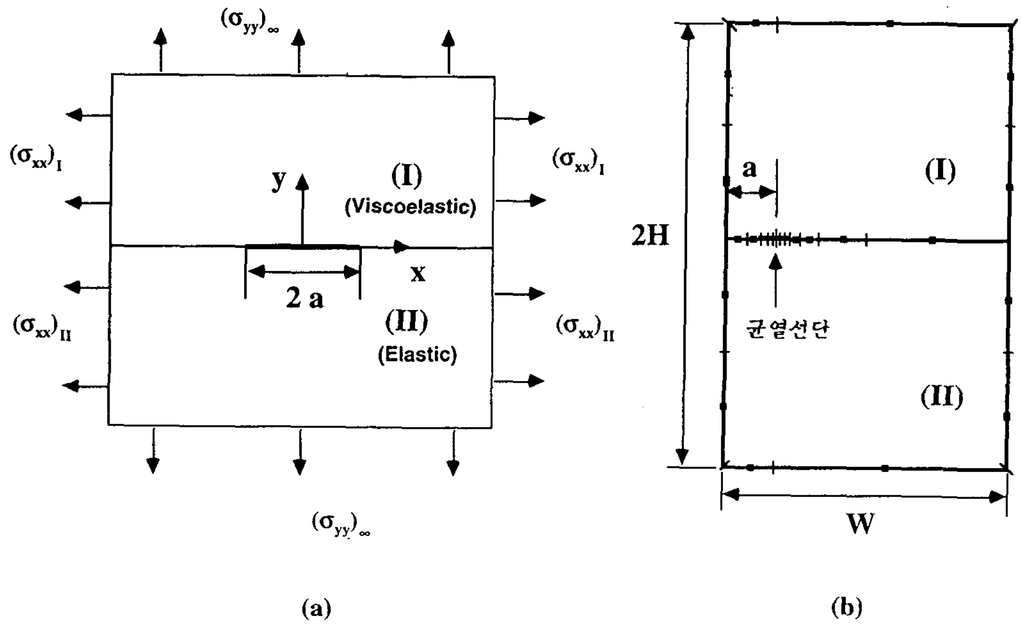


그림 1. 계면 균열 선단 부근



(a) (b)

그림 2. 중앙 계면균열 해석모델