

계면균열해석에 대한 경계요소법의 응용 (I) : 탄성-탄성 문제
Application of Boundary Element Methods to Interface Crack Problems (I) :
Elastic-Elastic Problem

이 상순, 김 정규, 김 태형, 박 건우, 황 중근
Lee. S.S, Kim. J.G, Kim. T.H, Park. K.W and Hwang. J.K

ABSTRACT

The stress intensity factor for an interface crack in dissimilar elastic-elastic bimetals is presented and the boundary element analysis is performed. It is shown that the proposed method produces the accurate and effective numerical results.

1. 서론

서로 다른 탄성체들로 구성된 복합재료는 고등공학구조체에 많이 사용되고 있다. 일반적으로 복합재료의 균열은 복합재료의 섬유 (fiber) 와 기지 (matrix) 사이의 공유면에 많이 발생하기 때문에, 그러한 공유면에 놓여 있는 균열에 대한 연구는 구조물의 안전과 수명을 예측하는데 매우 중요하다고 볼 수 있다.

공유면에 존재하는 계면균열은 오랫동안 많은 관심을 받아왔다 [1-6]. 여러가지 계면균열 문제에 대한 해들이 발표되었는데, 그들의 대부분은 단순한 형상과 경계조건을 갖는 것들 이었다. 보다 일반적인 형상과 하중조건을 갖는 문제를 해석하기 위해서 수치해석방법이 사용되고 있는데, 경계요소법은 계면균열 문제에 효과적으로 응용되어 왔다. Lee 와 Choi [7]는 종속영역법을 사용하여 계면균열 문제를 접근하였다. 그들은 균열 선단부근에서의 거동을 나타내기 위해서 표준 이차요소 (standard quadratic element) 를 사용하였는데, 그러한 경우에는 균열 선단부분을 모델링하는데 매우 많은 요소들이 필요하고 정확도도 떨어지는 단점이 있다. Blandford 등[8] 이 설명했던것 처럼, 균열 선단에서의 거동을 잘 나타내기 위해서는 특별한 요소가 사용되어야 한다. Yuuki 와 Cho [9]는 Hetenyi 기본해를 사용한 경계요소법을 이용하여 계면균열의 응력확대계수를 계산하였다. Tan 과 Gao [10], 그리고 Raveendra 와 Banerjee [11]는 균열 선단에 대해 이차 사분점 요소 (quadratic quarter-point element) 를 적용하여 매우 정확한 결과를 얻었다. Miyazaki 등 [12]은 경로적분법을 사용하여 응력확대계수를 계산하였다.

본 논문에서는 탄성-탄성 복합재료의 계면균열의 거동을 나타내는 응력확대계수에 대한 응력공식과 변위공식을 나타낸 후에, 경계요소법을 사용하여 균열선단에 위치한 특이요소에서 얻어진 응력과 변위를 이용하여 응력확대계수의 값을 계산하였다. 제시한 수치해석 결과는 탄성-탄성 계면균열문제의 해석에 대한 경계요소법의 정확성과 효율성을 보여준다.

2. 응력확대계수의 계산

그림 1은 탄성-탄성 복합재료의 계면균열을 보여주고 있다. 균열 선단 부근에서의 응력들은 다음과 같이 표현된다[5] :

$$[\sigma_y + \tau_{xy}]_{\theta=0} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left\{i \varepsilon \ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\} \quad (1)$$

식 (1)에서 r 는 균열 선단으로 부터의 거리를 나타내고, l 은 r 을 정규화시키는 임의의 길이이다. $i = \sqrt{-1}$ 이고, K_1 과 K_2 는 복합응력확대계수 $K (= K_1 + iK_2)$ 를 나타내며,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma) \\ \gamma &= \frac{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1}{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2} \\ \kappa_i &= 3 - 4\nu_i \quad (\text{평면변형}) \\ &= \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} \quad (\text{평면응력}) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

이다. μ 와 ν 는 전단응력과 포아손의 비를 가리키고, 아래 첨자들은 각각의 영역을 나타낸다.

균열면들 사이의 상대변위는 다음과 같이 주어진다[5] :

$$[\Delta u_x + i \Delta u_y] = \frac{K_1 + iK_2}{2(1 + 2i\varepsilon) \cosh(\pi\varepsilon)} \left[\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right] \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \exp\left\{i \varepsilon \ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\} \quad (3)$$

여기에서,

$$\Delta u_j = u_j(r, \pi) - u_j(r, -\pi), \quad (j = x, y) \quad (4)$$

이다.

응력확대계수는 식 (1) 또는 (3)을 이용하여, 균열 선단부근에서의 응력이나 변위로 부터 계산할 수 있다. 이 논문에서는 식 (1) 과 (3)을 이용하여, 균열 선단부근의 응력 또는 상대변위로 부터 응력확대계수를 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} K &= |K| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sqrt{[\sigma_{yy}(r, 0)]^2 + [\tau_{xy}(r, 0)]^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$K = |K| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad (6)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(\pi \varepsilon)}{(c_1 + c_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sqrt{(1 + 4\varepsilon^2)(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)}$$

식 (6)에서,

$$c_1 = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \quad (6')$$

이다.

3. 경계요소법과 수치해석 결과

3.1 경계요소 공식화

2장에서 설명한 방법을 이용하여 경계요소법으로 계산한 응력확대계수의 정확성을 보이기 위하여, 크기가 $2a$ 인 계면균열을 갖는 무한평판에 (σ_{yy}) 가 작용하는 문제를 선택하였다 (그림 2). 이 문제에 대한 정밀해는 다음과 같이 주어진다 [3].

$$K^* = (\sigma_{yy})_{\infty} \sqrt{\pi a} \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad (7)$$

윗식의 ε 은 식(2)에서 설명되었다. 정밀해 (7)은 그림 2-(a)에 나타난 바와같이 무한평판의 각영역에서 다음과 같은 응력점프를 가정하여 계산한 식이다.

$$(\sigma_{xx})_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1 - \nu_1}{1 - \nu_2} (\sigma_{xx})_1 + \left[\frac{\nu_2}{1 - \nu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\nu_1}{1 - \nu_2} \right] (\sigma_{yy})_{\infty} \quad (8)$$

그림 2-(b)는 해석모델을 보여주고 있다. 여기에서 복합평판은 이차원 평면 변형을 상태에 있다고 가정한다. 어떠한 체력 (body forces)도 존재하지 않는다는 가정아래, 해석모델에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다.

윗 평판영역에 대해서,

$$c_{ij}^{(1)}(\mathbf{y}) u_j^{(1)}(\mathbf{y}) + \int_{S^{(1)}} u_j^{(1)}(\mathbf{y}') T_{ij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^{(1)}(\mathbf{y}') \quad (9)$$

$$= \int_{S^{(1)}} t_j^{(1)}(\mathbf{y}') U_{ij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^{(1)}(\mathbf{y}')$$

이고,

아랫 평판 영역에 대해서,

$$\begin{aligned}
& c_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}) u_j^{(2)}(\mathbf{y}) + \int_{S^{(1)}} u_j^{(2)}(\mathbf{y}') T_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^{(2)}(\mathbf{y}') \\
& = \int_{S^{(1)}} t_j^{(2)}(\mathbf{y}') U_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') dS^{(2)}(\mathbf{y}')
\end{aligned} \tag{10}$$

이다. 식 (9)와 (10)에서 윗 첨자 '(1)' 과 '(2)'는 각각 윗 평판과 아랫평판을 가리키고, u_i 와 t_i 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력(traction) 을 나타내며, S 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 와 $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 들은 탄성학에서 얻어진 켈빈(Kelvin) 문제의 기본해들이다.

일반적으로, 식 (9)와 (10)에 대한 정밀해를 구하는것은 불가능하기 때문에 수치적분이 사용되어야 한다. 이 논문에서는 변위와 표면력, 그리고 기하적 형상을 나타내기 위해서 이차 형상함수 (quadratic shape functions) 를 사용하였다. 응력확대계수는 균열 선단부근에서의 응력이나 변위로 부터 계산될 수 있다. 서론에서 설명한것 처럼, 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 특수 경계요소가 사용되어야 한다. 이 논문에서는, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소 (traction singular quarter-point element) 를 사용하였다. 이러한 경계요소에 대한 자세한 설명과 수치해석 결과들은 참고 문헌 [8], [10], [11] 들에 나타나 있다. 결과적인 방정식은 다음과 같은 행렬 방정식으로 쓸 수 있다. 즉,

윗 평판영역 에서는,

$$\left[\mathbf{H}^1 \mathbf{H}^{12} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^{12} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{G}^1 \mathbf{G}^{12} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^{12} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

이고 ,

아랫 평판영역 에서는,

$$\left[\mathbf{H}^2 \mathbf{H}^{21} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^{21} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{G}^2 \mathbf{G}^{21} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^2 \\ \mathbf{t}^{21} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

이다. 식 (11)과 (12)에서, 윗첨자 '1' 과 '2' 는 각각 윗 평판영역과 아랫 평판영역을 가리키고, '12' 와 '21' 는 두 영역의 공유면을 나타내며, \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 각각의 영역에서의 영향행렬들을 나타낸다.

두 영역의 공유면에서는 변위의 연속조건과 표면력의 평형조건이 만족되어야 하는데, 그와 같은 조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{21} &= \mathbf{u}^{12} \\
\mathbf{t}^{12} &= -\mathbf{t}^{21}
\end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)을 식 (11)과 (12)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 행렬 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^2 & 0 & G^{12} \\ 0 & H^{21} & H^2 & -G^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \\ u^2 \\ \epsilon^{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식 (14)에 경계조건들을 적용하여 계산하면, 경계면과 공유면에서의 변위와 표면력들을 얻을 수 있다.

3.2 수치해석 결과

수치해석에서 사용된 물성값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= 2, 10, 73 \\ \nu_1 &= 0.38 \\ \nu_2 &= 0.2 \end{aligned} \quad (15)$$

그림 2-(b)에서 $W = 19a$ 와 $H = 16a$ 로 가정되었고, $a = 0.5$ 에 대해서 36개의 이차 경계 요소가 사용되었다.

표 1은 경계요소해석에 의해 계산된 응력확대계수를 나타내고 있는데, 선택된 μ_2/μ_1 범위에서 경계요소해석의 결과는 정밀해와 비교하여 응력공식 (5)에 대해서는 1.6% 이하의 수치오차를 나타내고, 변위공식 (6)에 대해서는 1.5% 이하의 수치오차를 보이고 있다.

4. 결론

본 논문에서는 경계요소법을 사용하여, 탄성-탄성 복합재료의 계면균열을 해석하는 과정을 보여주었다. 균열선단에서의 거동을 정확히 나타내기 위해서 특수경계요소가 사용되었다. 즉, 균열선단에서의 변위를 나타내기 위하여 사분점 경계요소가 사용되었고, 균열선단에서의 응력을 나타내기 위하여 표면력 특이 사분점 경계요소가 사용되었다. 본 논문의 방법은 정확하고 효율적인 수치해석 결과를 나타내주고 있다.

참 고 문 헌

1. F. Erdogan, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks", J. Applied Mechanics, 32, 403-410 (1965).
2. A.H. England, "A Crack Between Dissimilar Media", J. Applied Mechanics, 32, 400-402 (1965).
3. J.R. Rice and G.C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", J. Applied Mechanics, 32, 418-422 (1965).
4. M. Comninou, "The Interface Crack", J. Applied Mechanics, 44, 631-636 (1977)

5. J.R. Rice, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks", *J. Applied Mechanics*, 55, 98-103 (1988).
6. M. Comninou, "An Overview of Interface Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 37, 197-208 (1990).
7. K.Y. Lee and H.J. Choi, "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 29, 461-472 (1988).
8. G.E. Blandford, A.R. Ingraffea and J. A. Liggett, "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using The Boundary Element Method", *Int. J. Numer. Methods Engr.*, 17, 387-404 (1981).
9. R. Yuuki and S.B. Cho, "Efficient Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials", *Engineering Fracture Mechanics*, 34, 179-188 (1989).
10. C.L. Tan and Y.L. Gao, "Treatment of Bimaterial Interface Crack Problems Using the Boundary Element Method", *Engineering Fracture Mechanics*, 36, 919-932 (1990).
11. S.T. Raveendra and P.K. Banerjee, "Computation of Stress Intensity Factor for Interfacial Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 40, 89-103 (1991).
12. N. Miyazaki, T. Ikeda, T. Soda and T. Munakata, "Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack Using Boundary Element Method-Application of Contour-Integral Method", *Engineering Fracture Mechanics*, 45, 599-610 (1993).

표 1. 경계요소법에 의해 계산된 응력확대계수 K

응력 공식 (5)		변위 공식 (6)	
μ_2/μ_1	수치 오차 (%)	μ_2/μ_1	수치 오차 (%)
2	< 1.0	2	< 1.5
10	< 1.0	10	< 1.5
73	< 1.6	73	< 1.5

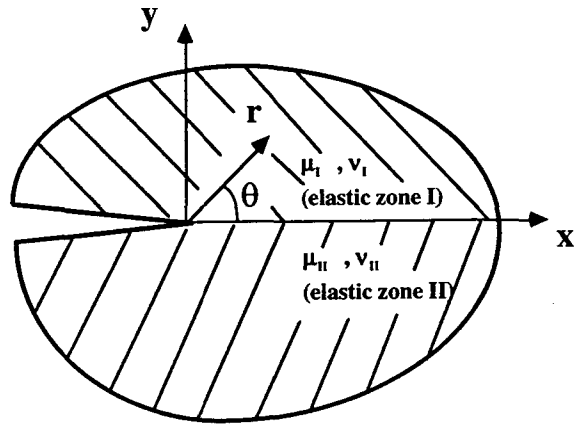


그림 1. 계면 균열 선단 부근

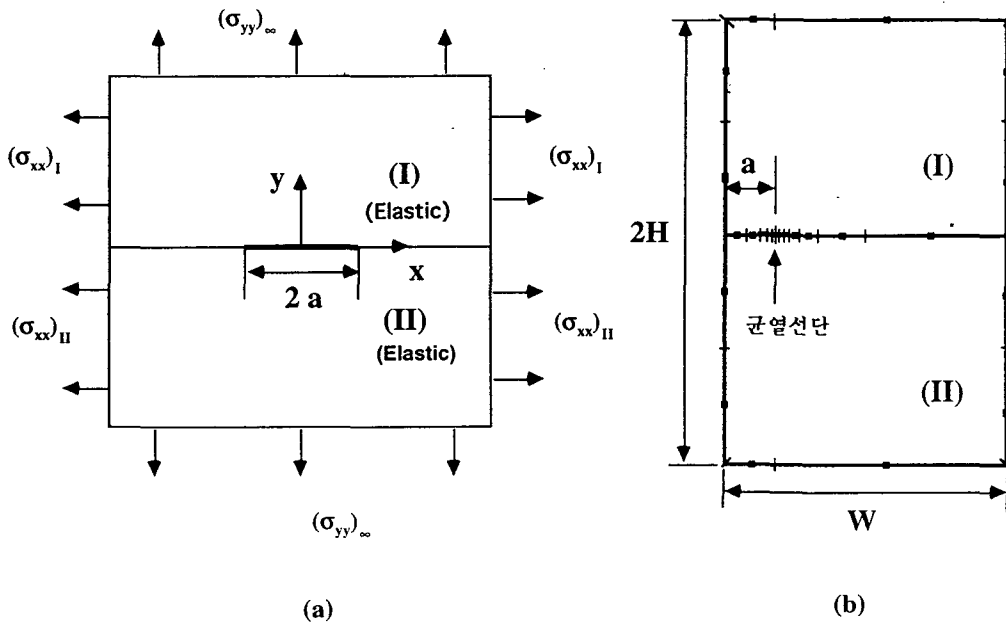


그림 2. 중앙 계면균열 해석모델