

EDI방법에 의한 유한요소모델의 J -적분값 산정

Evaluation of J -integrals by Finite Element Model Based on EDI Method

신성진* 홍종현** 우광성***
Shin, Sung-Jin Hong, Chong-Hyun Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

In this study, an equivalent domain integral (EDI) method is presented to estimate the crack-tip integral parameter, J -value, for two dimensional cracked elastic bodies which may quantify the severity of the crack-tip stress fields. The conventional J -integral method based on line integral has been converted to equivalent area or domain integrals by using the divergence theorem. It is noted that the EDI method is very attractive because all the quantities necessary for computation of the domain integrals are readily available in a finite element analysis. The details and its implementation are extended to both h -version finite element model with 8-node isoparametric element and p -version finite element model with high order hierarchic element using Legendre type shape functions. The variations with respect to the different path of domain integrals from the crack-tip front and the choice of S -function have been tested by several examples.

1. 서론

균열선단에서의 응력확대계수 K 나 변형에너지방출률(strain energy release rates) G 는 탄성체에서의 균열문제를 해석하기 위해 가장 선행적으로 결정되어야 하는 값들이며 균열선단의 응력장이나 변형률장의 강도를 나타내는 매개변수이다. 초기균열을 갖는 균열판에서 균열을 진전시키려는 균열발생력(crack driving force)과 이에 저항하려고 탄성체의 표면에서 유발되는 균열저항력(crack resistance)이 평형을 유지하면 균열은 발생되지 않는다. 그러나, 1940년대 Irwin[1]은 1920년대 Griffith의 에너지 평형이론[2]을 수정하여 균열발생력 G 가 균열저항력 R 보다 크게 될 경우는 균열전파(crack propagation)가 발생된다고 하였으며 균열발생력 G 는 변형에너지방출률이라 하고 균열저항력 R 은 $2\gamma_e$ 로 정의되며 γ_e 는 재료의 표면탄성에너지를 나타낸다. 그러므로, 많은 연구자들에 의해 G 값을 산정하기 위해 변형에너지방출률법(energy release rate method), 가상균열확장법(virtual crack extension method) 등이 제안되었다.

* 영남대학교 토목공학과 석사과정
** 영남대학교 토목공학과 박사과정
*** 영남대학교 토목공학과 부교수

한편, 선형탄성파괴역학(LEFM)에서는 균열선단 주위의 소성영역이 작다고 가정하는 소영역 항복(small scale yielding) 이론을 기준하는데 비해 연성재료의 경우는 균열선단을 중심으로 소성영역이 비교적 크게 위치한다. 이 경우는 대영역 항복(large scale yielding) 이론이 도입되며 탄소성 해석을 수행하여야 한다. 따라서, 선형탄성이론에 근거한 Irwin의 에너지방출률 G 는 정당화 될 수 없다. 그러므로, Rice[3]는 새로운 균열선단 매개변수인 J 를 제안하였다. 선형탄성의 경우는 J 는 G 와 같다.

J -적분법(J-integral method)은 적분경로에 대해 선적분을 수행하는 과정에서 수직방향벡터(normal vector)를 구하려면 가우스적분점을 따른 적분경로를 취해야 하는데 요소의 모서리에서의 적분경로에 대한 법선벡터를 정의하기가 어려우며, 본질적으로 법선벡터는 미분개념이 도입되는 관계로 민감한 값을 보이게 된다. 또한, 적분경로에 무관하게 J -적분값이 일정하다는 것이 Rice의 논문에서 증명되고 있지만 유한요소해석에서는 균열선단의 응력경사가 매우 크기 때문에 유한요소의 해가 정확하지 않으면 균열선단에 가까울수록 J -적분값은 불안정한 값을 보일 수 있게 된다. 그러므로, 두 개의 적분경로의 J -적분값을 적절한 보간함수를 사용하여 적분경로사이의 면적을 적분하는 개념으로 변환시키는 등가영역적분법(equivalent domain integral method; 이하, EDI method)이 균열 문제를 해석하는 새로운 수단으로 제안되고 있다.

등가영역적분법은 Rice[3]가 제안한 균열선단에서의 응력과 변형을 상태를 정의하는 선적분(line integral)형태의 J -적분값을 Divergence theorem을 사용하여 면적분(domain integral) 형태로 전환시켜 구하는 방법으로 Atluri[4]는 J -적분값을 구하는데 소요되는 번거로움을 해소함과 동시에 유한요소해석 결과만을 그대로 사용함으로써 J -적분값을 쉽고 안정되게 구할 수 있으며, 그의 논문에서 해석결과의 정확도를 입증하였다. 또한, Raju[5]는 등가영역적분법을 혼합 모드 상태의 균열문제(mixed mode crack problem)의 해석에 적용하여 좋은 결과를 보여주고 있다.

본 논문에서는 Divergence Theorem을 사용하여 두 개의 적분경로가 형성하는 면적에 대해 J -적분을 수행하는 등가영역적분법의 정식화 과정을 소개하고, 이 방법을 사용한 8절점 등매개변수 요소를 사용한 h-version 유한요소해석과 계층적 요소를 사용한 p-version 유한요소해석을 통해 산정된 균열판의 응력확대계수를 기존의 J -적분법과 이론치와 비교하여 해의 정확도와 신뢰성을 보이고자 한다. 또한, 균열선단으로 부터의 적분경로에 따른 민감도 조사와 등가영역적분법을 사용시 도입되는 보간함수인 S-함수의 변화에 따른 해의 변화를 조사하고자 한다.

2. 등가영역 적분법

J -적분값은 그림1(a)에서와 같이 선적분 형태로 계산될 수 있으며 균열선단을 포함하여 두 균열 면에 위치한 초기 점과 끝점을 가지고 있는 선적분 경로를 고려하면 선형탄성범위내에서 J -적분값은 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

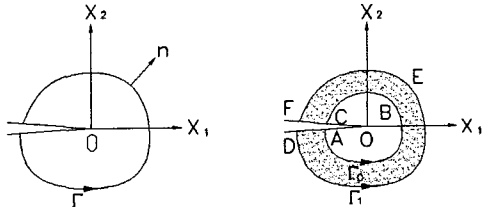
$$J_{x_k} = \int_{\Gamma} Q d\Gamma \quad \text{여기서 } k=1, 2 \quad Q = [W_{n_k} - \sigma_{ij} \frac{du_i}{dx_k} n_j] \quad (1)$$

식(1)에서 W 는 전체 변형에너지밀도로서 식(2)과 같이 정의된다.

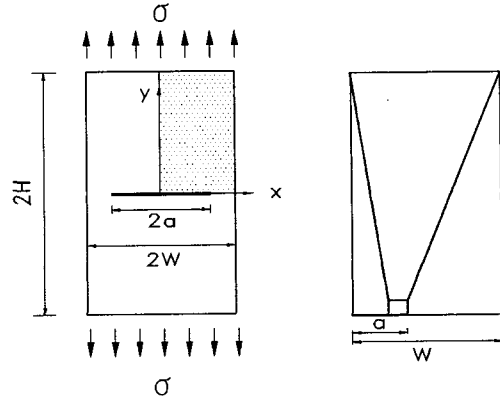
$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2)$$

식(1)과 (2)에서 σ_{ij} 는 응력텐서(stress tensor), ϵ_{ij} 은 전체변형율(total strain), n_j 는 적분경로 Γ 에 대해 j 번째 방향을 나타내는 법선벡터이다. i, j 및 k 는 2차원 문제에서는 1과 2의 값을 갖는다. x_1, x_2 는 각각 균열선과 법선 방향을 의미하고 있다.

적분값 J_{x_1} 과 J_{x_2} 는 2개의 독립된 적분값으로, x_1, x_2 각각 2방향에 대해 적분경로 Γ 에 발생하는 총변형에너지 값으로 나타낼 수 있다. J_{x_1} 은 일반적으로 J -적분이라고 정의하고 J_{x_2} 는 승적분(product integral)으로 정의한다.



(a) 직교좌표상에서 균열 면의 임의 적분경로 (b) 적분경로 Γ_0 와 Γ_1 사이의 영역
그림 1. J -적분값을 산정하기 위한 적분 경로



(a) 수치해석예제 (b) 1/4 p-version 유한요소모델

그림 2. K_1 모우드의 p-version 유한요소모델.

선적분 형태로 표현한 식(1)은 Divergence Theorem을 이용하여 면적분형태로 표현할 수 있으며 아래에 유도과정을 요약하였다. 먼저 그림1(b)에서 등고선 Γ_0 (OABCO)와 Γ_1 (ODEFO)은 면적 DEFBCBAD를 둘러싸고 있다는 것을 보여주고 있다. 적분경로 Γ_0 상의 선적분값에 단위크기 1을 곱하고 Γ_1 상의 선적분값에 0을 곱해서 전체 J -적분값 J_{x_1} 를 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$J_{x_1} = 1 \int_{\Gamma_0} Qd\Gamma - 0 \int_{\Gamma_1} Qd\Gamma \quad (3)$$

선적분을 면적분형태로 전환시키기 위해 식(3)을 식(4)과 같이 표현한 후 임의의 보간함수인 S-함수를 도입하여 식(5)과 같이 나타낸다.

$$J_{x_1} = 1 \int_{ABC} Qd\Gamma - 0 \int_{DEF} Qd\Gamma + 1 \int_{CO} Qd\Gamma + 1 \int_{OA} Qd\Gamma \quad (4)$$

$$J_{x_1} = \left[- \int_{CBA} QSd\Gamma - \int_{DEF} QSd\Gamma \right] + \int_{CO} Qd\Gamma + \int_{OA} Qd\Gamma \quad (5)$$

여기서 S-함수는 다음과 같은 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{cases} S(x_1, x_2) = 1 & \text{on } \Gamma_{ABC} \\ S(x_1, x_2) = 0 & \text{on } \Gamma_{DEF} \end{cases}$$

DEFBCBAD경로상의 적분값은 균열면 FC와 AD상의 선적분값을 빼고 더함으로써 다음과 같이 정의된다.[4,5]

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= - \int_{CBA} QSd\Gamma - \int_{DEF} QSd\Gamma - \int_{FC} QSd\Gamma + \int_{FC} QSd\Gamma - \int_{AD} QSd\Gamma + \int_{AD} QSd\Gamma + \int_{CO} Qd\Gamma + \int_{OA} Qd\Gamma \\ &= - \int_{DEFBCBAD} QSd\Gamma + \int_{FC} QSd\Gamma + \int_{AD} QSd\Gamma + \int_{CO} Qd\Gamma + \int_{OA} Qd\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

또는

$$J_{x_1} = - \int_{DEFBCBAD} QSd\Gamma + (J_{x_1})_{line} \quad (7)$$

식(7)에서 첫째 항은 균열선단을 제외한 폐합된 적분경로 DEFBCBAD상의 적분값이며 면적분 형태로 변환될 수 있다. 둘째 항은 균열 면에서의 선적분값으로 순수 인장모드 K_1 형식(crack opening mode)에서는 항상 0이 된다.

$$J_{x_1} = (J_{x_1})_{domain} + (J_{x_1})_{line} \quad (8)$$

한편, 선적분형태의 식(7)은 식(8)과 같이 Divergence Theorem을 이용하여 면적분형태로 전환시킨 후 식(9)과 식(10)과 같이 유한요소법을 적용할 수 있다.

$$-\int_{DEFCEBAD} Q S d\Gamma = -\int_{DEFCEBAD} \left[W_{n_i} - \sigma_{ij} \frac{du_i}{dx_i} n_j \right] S d\Gamma = -\int_A \left[\frac{d(W S)}{dx_k} - \frac{d \left(\sigma_{ij} \frac{du_i}{dx_k} S \right)}{dx_j} \right] dA \quad (9)$$

$$(J_{x_1})_{domain} = -\int_A \left[W \frac{dS}{dx_k} - \sigma_{ij} \frac{du_i}{dx_k} \frac{dS}{dx_j} \right] dA - \int_A \left[\frac{dW}{dx_i} - \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dx_k} \right] S dA \quad (10)$$

식(10)의 두 번째 항은 선형탄성과 파괴역학에서는 0으로 소거되며,

$$W = \frac{1}{2} [\sigma_{11} \epsilon_{11} + 2 \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{22} \epsilon_{22}] \quad \text{가 된다.}$$

그러므로 본 논문에서 이용되는 전체 적분 값은 식(11a-11b)과 같다.

$$(J_{x_1})_{domain} = \int \left(W \frac{\partial S}{\partial x_1} - \left[(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \frac{\partial S}{\partial x_1} + (\sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \frac{\partial S}{\partial x_2} \right] \right) dA \quad (11a)$$

$$(J_{x_2})_{domain} = \int \left(W \frac{\partial S}{\partial x_2} - \left[(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) \frac{\partial S}{\partial x_2} + (\sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) \frac{\partial S}{\partial x_1} \right] \right) dA \quad (11b)$$

3. 유한요소모델

3.1 h-version 유한요소모델

본 논문에서 사용한 h-version 유한요소모델은 그림 3과 같이 5개의 모델을 사용하였는데 각 모델들은 Serendipity 형상함수를 사용한 8절점 등매개변수요소(isoparametric element)를 사용하였으며 균열선단에서 별도의 특별요소를 사용하지는 않았다. 해석모델은 균열길이가 2a, 균열판의 폭이 2W, 그리고 균열판의 높이는 2H인 중앙균열판(centrally cracked panels)을 2축 대칭상태이므로 1/4만 모델링 하였으며 H/W는 2로 고정하였다. 요소의 개수는 각각 20개, 40개, 58개, 80개 및 104개의 요소로 분할하여 유한요소해의 수렴성을 분석하였다. 그림 3에 표시된 D1에서 D4는 영역적분을 수행할 때의 적분경로를 나타낸다.

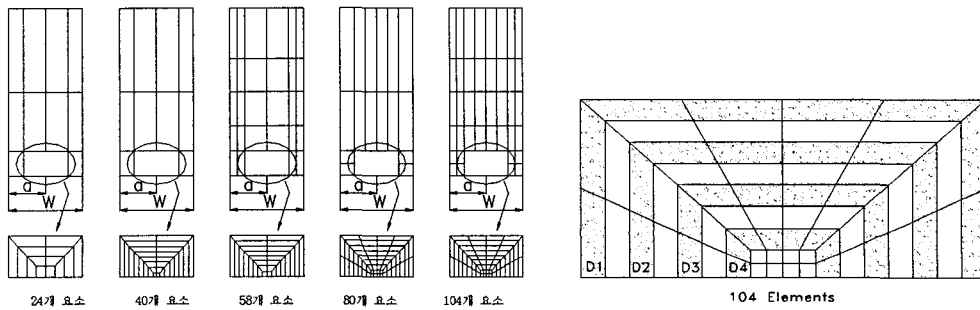


그림 3. 등매개변수요소를 사용한 h-version 유한요소의 체분설계(1/4모델)

3.2 p-version 유한요소모델

p-version 유한요소모델은 기하학적 형상을 정의할 수 있는 최소한의 요소로 국한시키고 p의 차수를 1차에서 8차까지 증가시켜 해의 수렴성을 조사하였으며 그림 2과 같이 모델링하였다. p-version 유한요소법의 특징으로는 고차다항식에 근거한 형상함수를 사용한다는 것인데 본 논문에서는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomial)을 사용한 형상함수가 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 의 정규영역에서 정의되었다. 이 형상함수는 3개의 그룹으로 나눌 수 있는데 제1그룹은 사변의 꼭지점에서 정의되는 p=1인 선형 형상함수로 기본 모드(basic mode)라 하며 형상함수가 1차일 때의 등매개변수요소의 형상함수와 일치한다. 제2그룹은 형상함수의 차수 p가 2이상일 때 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드로 절점의 좌표 값을 갖지 않고 그림 4와 같이 단지

기본 모우드에 추가되면서 임의의 변위장을 정의하게 된다. 그러나, 좌표를 정의할 때는 기본 모우드만이 사용되는 반면에 변위장을 표현하는 경우 모든 절점의 형상함수가 사용되는 까닭에 저매개변수요소(subparametric element)라 한다. 주변 모우드의 형상함수는 식(12)와 같이 정의된다.[6,7]

$$\{P_i(\xi) \mid i \geq 2, \xi \in [-1, 1], P_i(-1) = P_i(1) = 0\} \quad (12)$$

여기서, $P_i(\xi)$ 는 적분형 르장드르 함수로 식(13)과 같다.

$$P_i(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(t) dt \quad (13)$$

한편, $L_{i-1}(t)$ 는 Rodrigue에 의해 식(14)과 같이 나타낼 수 있다.

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (14)$$

제3그룹은 내부 모우드(internal mode)라 하며 유한요소 수가 수렴될 수 있는 조건중 하나인 완전성(completeness)을 만족시켜 주기 위한 모우드로 $i + j = p$ 라고 했을 때 p가 4차 이상부터 발생하게 되며 식(15)과 같이 나타내어 요소의 변에서는 모두 0이 됨을 만족시켜 준다.

$$N_i = P_i(\xi) \cdot P_j(\eta) \quad \text{for } i, j \geq 2 \quad (15)$$

그림 4는 형상함수의 차수가 7차인 적분형 르장드르 함수의 형상을 보이고 있으며 제 1, 제 2 및 제 3그룹의 형상함수군을 나타내며, 제 3그룹의 내부 모우드는 불룩한 형상을 나타내므로 거품 모우드(bubble mode)라고도 한다.

차수	적분형 르장드르 형상함수				비고
7					제1그룹
					제2그룹
					제3그룹

그림 4. 각 그룹별 적분형 르장드르 형상함수

4. 수치해석 예제

수치해석 예제로는 인장력을 받는 중앙균열판을 대상으로 K_I -모우드(crack opening mode)에 대해서만 해석하였다. h-version 유한요소법과 p-version 유한요소법에 기초한 등가영역적분법을 이용한 해석결과와 기존의 이론식들에 의한 결과를 비교 검증하였으며 또한, 균열선단으로부터 그림 3과 같이 적분경로를 D1에서 D4까지 선택했을 때 J-적분값의 민감도와 등가영역적분법에 사용되는 보간함수인 S-함수를 그림 7과 같이 3가지 모델로 가정했을 때 이 값이 J-적분값에 미치는 영향을 조사하였다.

4.1 해석결과의 비교분석

그림 5에서는 유한요소법에 기초한 등가영역적분법의 자유도의 증가에 따른 해의 수렴성을 도시하였다. 그림 5에서 알 수 있듯이 p-version 유한요소법에 의해 계산된 무차원 응력확대계수인 보정계수(correction factor; K_1/K_0)는 p-level의 증가에 따라 매우 빠른 수렴성을 보여주고 있으며 Fedderson[8]의 값에 접근해 나아가고 있음을 알 수 있다. 차수 p가 8차일 때의 p-version 유한요소해석의 결과를 기준으로 Fedderson의 값과는 2%의 상대오차, Irwin[9]의 결과와는 3%의 상대오차가 있음을 알 수 있다.

한편 h-version 유한요소법의 결과와 상대비교해 보면 p-version의 결과는 4개의 요소에 p의 차수가 5차, 자유도가 128에서 수렴하고 있으며 h-version의 결과는 58개의 요소에 자유도가 422에서 수렴하고 있어 p-version 유한요소법의 결과가 수렴속도면에서 훨씬 빠르다는 것을 알 수 있다.

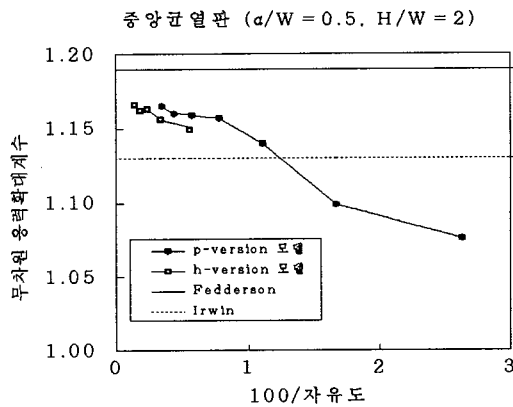


그림 5. EDI법에 의한 자유도 증가에 따른 무차원응력확대계수의 수렴성

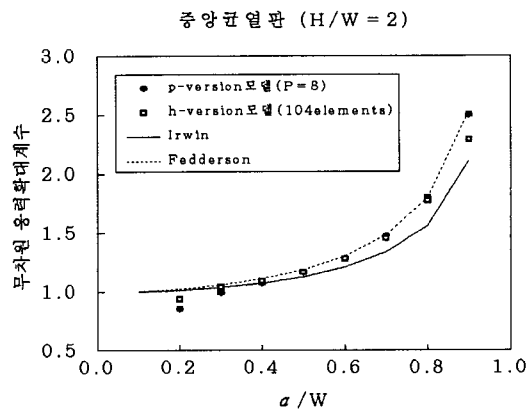


그림 6. EDI법에 의한 균열진전에 따른 무차원응력확대계수

그림 6에서는 균열의 진전에 따른 무차원응력확대계수값을 비교하여 도시하였는데 제안된 등가영역적분법의 정확도를 알 수 있다. 그림 6에서 보는 바와 같이 p-version 유한요소모델은 전반적으로 Fedderson[8]의 연구결과와 1%의 이내의 상대오차가 있음을 보여주고 h-version 유한요소법도 2%이내의 상대오차를 보여주고 있다.

4.2 적분경로에 따른 무차원응력확대계수

그림 3에서 24개 요소에서 104개 요소까지 모델링한 h-version 유한요소법의 해석결과를 표1에서 나타내었는데 적분경로에 따른 무차원응력확대계수값을 보이고 있다. 무차원응력확대계수의 최대상대오차는 적분경로 D1과 D4에서 1.3%정도 보이고 있으며, 이 결과에서 알 수 있듯이 등가영역적분법에 의한 무차원응력확대계수 값은 적분경로에 별 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다.

4.3 S-Function에 따른 해의 민감성

등가영역적분법의 영역적분시에 사용되는 S-함수는 3가지 모델로 비교하였다. TypeI 을 선형일차함수로 TypeII와 TypeIII을 선형이차함수로 모델링하여 산출한 무차원응력확대계수값은 h-version 유한요소법의 경우 0.1%에도 미치지 못하며 p-version 유한요소법의 경우 2.5% 정도의 상대오차를 보여 S-함수를 간단한 선형일차 함수로 정의하여도 무방하다는 것을 알 수 있다.

표1. 적분경로에 따른 무차원응력확대계수 (a/W=0.5, H/W=2)

유한요소법	자유도	적분 경로	무차원 응력확대 계수값	평균값	이론값
h-version 유한요소법	186 (24요소)	D1	1.151	1.155	Irwin (1.128)
		D2	1.156		
		D3	1.159		
	298 (40요소)	D1	1.149	1.156	Dixon (1.154)
		D2	1.153		
		D3	1.159		
		D4	1.164		
	422 (58요소)	D1	1.156	1.163	Fedderson (1.189)
		D2	1.160		
		D3	1.165		
		D4	1.170		
	550 (80요소)	D1	1.154	1.162	
		D2	1.158		
		D3	1.164		
		D4	1.170		
	710 (104요소)	D1	1.158	1.165	
		D2	1.162		
		D3	1.167		
D4		1.174			
p-version 유한요소법	128 (P=5)	D1	1.157	1.157	
	290 (P=8)	D1	1.165	1.165	

표2. 중앙균열판에서 무차원응력확대계수값 비교 (a/W=0.5)

S-Function	적분 경로	Type I	Type II	Type III	이론값
h-version 유한요소법 104 elements	D1	1.158	1.159	1.158	Irwin (1.128)
	D2	1.162	1.164	1.162	
	D3	1.167	1.169	1.167	
	D4	1.174	1.174	1.174	Dixon (1.154)
	평균값	1.165	1.167	1.165	Brown (1.182)
p-version 유한요소법 P=8	D1	1.165	1.177	1.148	Fedderson (1.189)

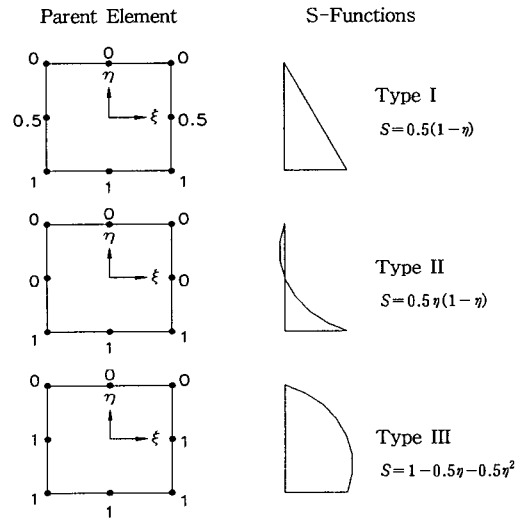


그림 7. 영역적분에 이용된 S-함수의 종류

5. 결론

본 논문에서는 균열판 해석을 위하여 각각 p-version 유한요소법과 h-version 유한요소법에 기초를 둔 등가영역적분법에 대한 연구를 수행하였다. 제안된 유한요소모델을 이용한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 무차원응력확대계수값의 비교 - 유한요소법에 근거한 등가영역적분법은 기존의 발표된 응력확대계수에 관한 여러 이론식에 의한 값과 아주 근접한 결과치를 보여주었고, 특히 p-version 유한요소모델의 무차원 응력확대계수값은 차수 p가 5일 때부터 거의 일정한 값을 보이고 있으며 Fedderson의 값과 2%이내의 상대오차를, Irwin과는 3%이내의 결과를 보여주고 있으며 형상함수의 차수를 8차로 고정시키고 균열의 길이를 점차 증가시켰을 때의 무차원 응력확대계수값은 Fedderson값과 1%의 상대오차를 Irwin값과는 3%의 상대오차로 높은 정확도를 보여주었다.

한편 h-version 유한요소법의 경우 Fedderson의 값과는 2%이내의 상대오차를, Irwin과는 5%이내의 상대오차를 나타내어 등가영역적분법에 의한 유한요소모델의 정확성을 보여주고 있

다.

- (2) **적분경로에 따른 수치안정성** - J 적분법을 유한요소법에 응용할 경우 적분경로에 따른 해의 민감성이 있다는 단점에 비하여 표1에서 알 수 있듯이 등가영역적분법에 의한 무차원응력확대 계수값은 적분경로에 별 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다.
- (3) **S-함수의 비교** - 선적분(line integral)을 면적분(area integral)형태로 전환시 도입되는 S-Function의 몇 가지 Type들이 제시되었으며, S-Function이 간단한 선형일차함수로 정의되어도 정확한 결과를 나타내는 것을 알 수 있었다.
- (4) **h-version 유한요소법과의 비교** - p-version 유한요소법의 경우 해석모델의 형상을 나타낼 수 있는 최소한의 요소 4개와 자유도가 116일 때 수렴하고 있으며 h-version 유한요소법의 경우 58개 요소에 422자유도일 때 부터 해에 수렴하고 있어 p-version 유한요소법이 수렴속도의 신속, 해의 정확도 등의 이유로 균열문제와 같은 응력특이를 보이는 문제에서 더욱 유리한 방법임을 알 수 있다.

이상의 결과에서 볼 때 p-version 유한요소법에 기초한 등가영역적분법을 사용한 유한요소모델은 최소한의 요소수로도 해의 높은 정확성과 신뢰성을 보여주고 있어 균열전단의 적분계수값의 산정에 적합한 모델로 판단되며 향후 탄소성파괴역학(EPFM)문제의 해석에 있어 가장 유리한 조건을 갖추고 있음을 보여주고 있다.

6. 참고문헌

1. Irwin, G.R., "Fracture Dynamics", *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, pp.147-166 (1948)
2. A. A. Griffith, "The Phenomenon of Rupture and Flaw in Solids", *Phil. Trans.*, Royal Society of London, Vol.A-221, pp.163-198 (1921)
3. J. R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *ASME J. of Appl. Mech.* 35, pp.376-386 (1968)
4. G. P. Nikishkov, S. N. Atluri, "An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermal mechanical fracture", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 26, No 6, pp.851-867 (1987)
5. I. S. Raju and K. N. Shivakumar, "An Equivalent Domain Integral Method in the Two-Dimensional Analysis of Mixed Mode Crack Problems"; *Eng. Fract. Mech.*, Vol.37, pp.707-725 (1990)
6. K. S. Woo, "A Robustness of Hierarchic Element Formulated by Integrals of Legendre Polynomials," *Computers & Structures*, Vol.49, No.3, pp.421-426 (1993)
7. K. S. Woo, C. G. Lee, " p -Version Finite Element Approximations of Stress Intensity Factors for Cracked Plates Including Shear Deformation", *Int. J. Eng. Fract. Mech.*, Vol.52, No.3, pp.493-502 (1995)
8. Feddersen, C.E., "Evaluation and Prediction of the Residual Strength of Center Cracked Tension Panels", *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, ASTM STP 486, pp.50-78 (1971)
9. H. Tada, P. Paris and G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris Production Inc. (1985)