

비압축성 점성유체에 관한 유선상류화 유한요소 해석  
Streamline Upwind FE Analysis  
for Incompressible Viscous Flow Problem

최 창근\*      유 원진\*\*      김 윤석\*\*\*  
Choi, Chang-Koon, Yu, Won-Jin, Kim, Yun-Seok

---

ABSTRACT

This paper deals with finite element analysis for incompressible viscous flow problem. By formulating the governing equation based on the streamline upwind concept, the wiggle phenomenon of fluid flow is minimized in spite of a few number of finite element used. The penalty function method which can reduce the number of independent variables is adopted for the purpose of computational efficiency and the selected reduced integral is carried out for the convection and pressure terms to reserve the stability of solution. In time-history analysis of fluid flow, the accuracy and reliability of an obtained solution are established by using the predictor-corrector method. Finally, correlation studies between analytical and experimental results are conducted with the objective to establish the validity of the proposed numerical approach.

---

1. 서론

현재 많은 유체역학적 문제를 실험적 기법에 의해 해결하고 있지만 컴퓨터의 비약적인 발전을 고려하여 볼때 장래에는 수치해석적 방법이 경쟁력을 획득할 수 있을 것이다. 최근 들어 활발해지고 있는 유체문제에 대한 유한요소법의 적용은 아직 유한차분법에 비해 해석시간이나 비용면에서 광범위하게 적용되고 있지 못하다. 본래 고체와 구조문제에 적용되는 수치해석 기법으로 개발되었던 유한요소법은 복잡한 기하형상을 가지는 문제에 적용성이 좋으며 풍부한 수학적 기초에 힘입어 유체역학 분야로 응용이 확대되고 있다.

- 
- \* 한국과학기술원 토목공학과 교수
  - \*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
  - \*\*\* 현대건설 기술연구소 연구원

비압축성 점성유체로는 일반 토목, 건축 구조물에서 가장 밀접하게 관련되어 있는 물, 또는 공기를 예로 들 수 있다. 비압축성 점성유체의 지배방정식을 정식화하여 구한 대수방정식에서 나타나는 대류항은 비대칭성과 비선형성을 동시에 지니고 있다. 이 결과로 대류가 지배하는 유체문제의 경우 안정된 해를 얻기 위해서는 매우 세분화된 메쉬를 필요로 하며 막대한 계산시간을 요구하게 된다. 유한차분법에서 많이 이용하는 상류화기법은 해의 진동, 또는 발산을 억제하기 위해 인공감쇠를 가하는 방법이며 본 연구에서는 유한요소에 이를 적용하는 방법을 제시하였다. 막대한 해석시간을 요구하는 유체해석을 효율적으로 하기 위하여 연속방정식에 Penalty 함수를 이용하여 모멘텀 방정식으로 포함시켜서 전체 행렬의 자유도를 감소시켰으며 시간적분법으로 predictor-corrector 방법을 채택함으로써 계산의 효율성을 도모하면서도 정확성을 상실하지 않도록 하였다.

## 2. 유한요소 정식화

### 2.1 가중적분법과 Galerkin 방법

완전한 N-S 방정식은 관성력, 압력, 점성력의 균형을 완전히 표현하고 있으며 이 경우에 유체역학에서 흥미 있는 대부분의 문제를 풀 수 있다. 그러나 이러한 형태는 매우 풀기 어려운 편미분 방정식이다. 비압축성 점성유체의 경우 연속방정식과 N-S 방정식은 아래와 같이 단순화된다.

$$\text{연속방정식} \quad u_{i,j} = 0 \quad (1)$$

$$\text{N-S 방정식} \quad \rho u_{i,t} + \rho u_j u_{i,j} + P_j - \tau_{ij} = 0 \quad (2)$$

위에서  $u$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\tau$ 는 각각 속도, 밀도, 압력, 응력을 나타내는 항이다. 비정상 유동의 문제를 푸는 방법은 안정성과 수렴성을 증가 시키기 위하여 다각적으로 모색되어 왔다. 비정상 유동을 수치해석하기 위하여 지배방정식을 속도와 압력을 기본변수로 하는 유한요소 정식화를 이용하였다. 이 정식화를 통하여 가장 직접적으로 비선형의 N-S 방정식을 풀도록 한다. 속도-압력 정식화는 정식화 과정이 쉽게 3차원으로 확장이 되고, 형상함수는 오로지 1차연속성만 가지면 되며, 압력, 속도, 속도경사, 응력경계 등이 직접적으로 행렬식에 들어간다. 우선 전통적인 Galerkin정식화 과정을 따라서 정식화를 시도하여 아래와 같은 방정식을 구성한다.

$$[M] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + [C(u_n, v_n)] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

비정상 속도항에 대한 M행렬은 요소질량 행렬이다. 압력의 변화율에 대해서 M 행렬이 0이므로 singular 한 문제가 발생한다. 만약 양해법을 이용하여 문제를 풀려고 하는 경우에는 질량의 lumping을 고려 해 볼수도 있지만 여기서 사용된 정식화에는 바로 응용할 수 없다. 왜냐하면 압력에 관한 항이 0이기 때문이다. 이점을 고려한 정식화가 penalty 방법이다.

C 행렬은 흐름이 정상류와 비정상류에서 모두 발생하는 대류항으로부터 파생된 비선형이고 동시에 비대칭인 행렬이다. C행렬은 이전의 반복계산에서 사용된  $u_n$ ,  $v_n$ 에 연관되어 있는 비선형 흐름에 대한 성질을 나타낸다. 비대칭성은 대류수송항의 본질적인 성격이다. 이와 비슷한 형태의 비대칭 행렬이 열전달 문제의 대류-확산 문제에서도 일어난다.

물리적으로 볼 때 C 행렬은 모멘텀의 대류라고 볼 수 있다. 반면 행렬 K는 선형 대칭 행렬로서 점성항에 관련되어 있으며 모멘텀의 확산을 표시한다.

한번 요소 행렬이 구성되고 전체 행렬로 조합되고 나면 경계조건이 적용되어지고 전체 행렬을 풀기 위해서 방대한 계산을 해야 한다. 정상류인 경우에는 질량 행렬을 없애고 반복계산에 의하여 비선형 대수방정식을 푼다. 비정상류인 경우에는 더욱 복잡하여 시간에 따른 해석 뿐만이 아니라 각각의 시간에 대하여 반복 계산이 필요하다. 이러한 정상류 또는 비정상류에 대한 계산량은 매우 막대하다.

본 논문에서 사용한 정식화를 따르면 속도항에 대한 형상함수를 가중함수로 이용한다. 따라서 상류화를 시키지 못하고 있으며 다시 말하면 인공적인 감쇠효과를 도입하지 못했다는 것이다. 즉 만약 충분히 요소가 분할되지 않는다면 해가 계속 진동하게 된다. 이러한 문제를 방지하기 위해서 상류화를 도입하게 된다. 이러한 방법을 Petrov-Galerkin 정식화라고 한다.

## 2.2 Penalty 함수 정식화

Penalty 함수 정식화에서는 압력을 penalty 인자를 이용하여 다음처럼 나타낸다.

$$P = -\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4)$$

여기서  $\lambda$ 는 항상 양수이고 이 조건을 도입하면서 비압축성이라는 조건은 파괴된다. 이러한 접근을 하게 된 동기는 비압축성인 고체에 대하여 매우 작은 양의 압축성을 고려하는 탄성해석 문제에 기인한다. 점성유체에서  $\lambda$ 는 매우 큰 수이며 유체의 비압축성은 근사적으로 획득되는 것이다. penalty 정식화의 가장 큰 이점은 유체흐름을 해석하는데 있어서 P가 소거된다는 것이다.

Penalty 정식화를 하여 압력을 소거시킨 후 정상류 흐름에 대해 고려하면 다음 식과 같다.

$$[[C]+[K]+\lambda[L]] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix} \quad (5)$$

비압축성인 경우  $\lambda$ 는 무한대의 값을 가지게 된다. 따라서 위 식에서 [C]와 [K]는 유한한 양이므로 다음식처럼 되게 된다.

$$\lambda[L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix} \quad (6)$$

만약 [L]이 특이행렬(singular)이 아니라면 그때 흐름은 [L]에만 의존하는 해를 구하게 된다. 따라서 풀리는 문제를 만들기 위해서는 [L] 행렬을 특이행렬로 만들기 위한 특별한 취급이 필요하다. 만약 [L] 행렬을 다른 것과 동일하게 평가한다면 거의 대부분 비특이행렬을 만들게 된다. [L]행렬을 특이행렬로 만드는 방법은 대개 감차적분을 하는 것이다. 예를 들어 일반적으로 많이 사용되는 4절점 요소의 경우에는 대개 2x2 적분을 수행한다. 이때 [L] 행렬에 대하여 1점 적분을 하게 되면 위식의 해는 유용한 해를 얻을 수 있다. 4절점 요소에서 [L]행렬에 대하여 감차적분을 하는 것은 penalty 정식화에서 매우 유용하고 많이 사용되는 것이다. Hughes 등은 요소와 적분 차수와의 관계에 대하여 정리를 하였는데 4절점 요소의 경우 속도는 2점 적분을 하고 압력은 1점적분을 하도록 제안하였다.

수치실험에 의하면  $\lambda$ 는 다음 식에 따라서 결정되어진다.

$$\lambda = c \max\{\mu, \mu \text{Re}\} \quad (7)$$

여기서  $c$ 는 컴퓨터의 단어길이에 의존하는 값이고  $\mu$ 는 점성계수,  $\text{Re}$ 는 Reynolds 수이다. 64 bits 컴퓨터의 경우  $c$ 는  $10^7$ 정도로 선택된다.

많은 정상 또는 비정상 흐름에 관하여 penalty 정식화가 이루어져 왔다. 그리고 그 방법은 N-S 방정식을 푸는데 있어서 매우 효과적임이 입증되었다. 이러한 접근의 본질적인 이점은 프로그램이 쉽고, 요구되는 기억용량이 작아지며, 풀어야 할 방정식이 더 작은 개수라는 것이다. 또한 한번 속도가 계산이 되고 나면 압력 역시 쉽게 계산이 되어진다.

Penalty 함수를 이용하여 정식화를 한 후에 구해지는 요소방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \{N\} [N] d\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho \left( u_n \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] + v_n \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) d\Omega \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial N}{\partial x_b} \right) \left[ \frac{\partial N}{\partial x_a} \right] d\Omega \quad (11)$$

### 2.3 대류항에 관한 상류화

대류수송항이 포함되는 방정식에 대한 초기의 유한요소 정식화에서는 대류항이 비대칭이고 비선형이다. 또한 실제로 해를 구하여보면 절점간에 진동현상이 발생하게 되는 것을 볼 수 있다. 이러한 Wiggle은 대류가 지배적인 물리현상에서 자주 나타난다. 이러한 진동을 제거하는 유일한 방법은 오로지 유한요소를 극단적으로 세분화하여 대류가 더이상 요소 내부의 거동에서 지배적이지 않게 하여야 한다는 것이다. 그러나 메쉬를 세분화하는 것은 많은 계산 시간을 요하게 되며 따라서 메쉬 세분화 과정 없이 진동을 억제하는 방법이 필요하게 되었다.

Galerkin 유한요소 정식화는 중앙차분법으로 알려져 있다. 사실상 해의 진동현상이 중앙차분법의 해를 구하는데 있어서 많은 문제점으로 발생하고 있다. 그러나 진동에 자유로운 해는 대류항에 상류화 (upwind)를 사용하여 제거될 수 있다. 상류화 방법에 의하여 해는 어느 정도 정확도가 줄어들게 되므로 상류화 방법과 중앙차분법을 적절히 혼합하여 사용함으로써 최적의 해를 구할 수 있다. 상류화 알고리즘을 포함하는 요소를 발생시키는 방법으로 대류항에 변형된 적분규칙을 적용할 수 있다.

$$\tilde{\xi} = \coth \alpha_{\xi} - 1/\alpha_{\xi}, \tilde{\eta} = \coth \alpha_{\eta} - 1/\alpha_{\eta} \quad (12)$$

$$\alpha_{\xi} = u_{\xi} h_{\xi} / 2k, \alpha_{\eta} = u_{\eta} h_{\eta} / 2k \quad (13)$$

$$u_{\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{u}, u_{\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{u} \quad (14)$$

위에서  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, e_{\xi}, e_{\eta}, h_{\xi}, h_{\eta}$ 는 각각 적분점, 요소중양에서의 방향벡터, 요소의 크기를 나타낸다.

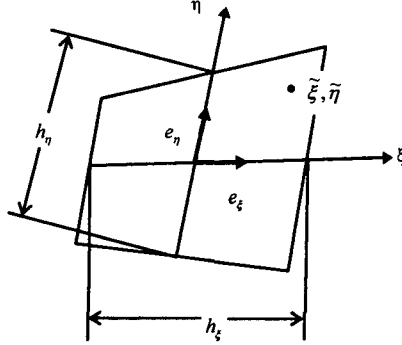


그림 1. 4절점 요소의 기하학적 형상

이 때 대류항은 다음과 같은 식으로 계산된다.

$$\int_{\Omega} N_j u_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} d\Omega = N_j(\tilde{\xi}) u_i(\mathbf{O}) \sum C_i \frac{\partial N_i}{\partial x_i}(\tilde{\xi}) j(\mathbf{O}) W \quad (15)$$

$\mathbf{O}$ 는 요소의 중앙점,  $W$ 는 1점 적분의 경우 4,  $j$ 는 요소의 중앙에서 얻어진 jacobian의 determinant이다.

#### 2.4 Transient Algorithm : Predictor-Corrector

유체의 기본 방정식을 유한요소를 사용하여 시간이력 계산을 하고자 하는 경우 대류항에 포함된 비선형항을 고려하여 풀어야 한다. 이 문제를 근사적으로 풀기 위하여 시간이력 해석 방법이 필요하다. 본 논문에서 채택한 Predictor - Corrector 방법을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{K}) \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma \Delta t [\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{C}(\mathbf{v}_{n+1}^{(i)})] \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^0 = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = (\mathbf{v}_{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}) / (\gamma \Delta t)$$

이 방법을 이용하게 되면 강성행렬  $\mathbf{K}$ 는 묵시적(Implicit)으로 취급되고 반면에 대류행렬  $\mathbf{C}$ 는 명시적(explicit)으로 취급된다. 대류항  $\mathbf{C}$ 에 대한 안정조건은 아직 명확하게 규정되어 있지는 않지만 유한차분법에서 사용되던 방법을 유한요소법에 이용하여 Courant 상수로서 시간간격을 제한함으로써 얻어진다.

$$\Delta t \leq 1 / \left( \left| \frac{u_{\xi}}{h_{\xi}} \right| + \left| \frac{u_{\eta}}{h_{\eta}} \right| \right) \quad (17)$$

### 3. 예제 해석

#### 3.1 Backward Facing Step

2차원의 backward facing step을 흐르는 흐름은 수치해석결과의 표준적인 검증예제로 많이 선택된다. 이 예제에 대한 형상과 경계조건은 그림 2와 같다. 이 흐름문제에서 Re수는 800으로 설정되었다. 그림 3에서 속도 벡터와 압력등분포선을 나타내었다. 이 문제에서 관찰하는 현상은 두개의 재순환영역이 올바르게 발달하는가의 여부이다. 속도벡터를 보면  $x=6$ 인 위치까지 하단부의 역류가 발생하고 있으며 상층부에서 약  $x=5$ 정도에서 역류가 발달을 시작하고 있다. 압력 등분포선 역시 기존의 해석결과를 잘 따르고 있다.

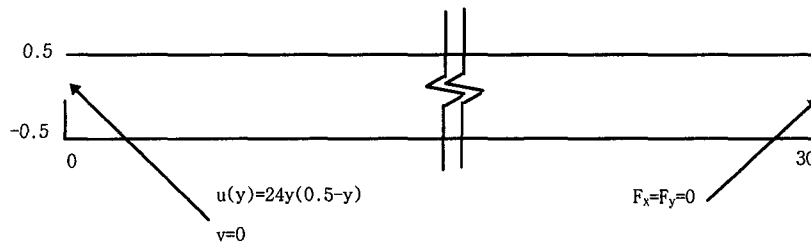


그림 2. Backward Facing Step Flow의 개요도

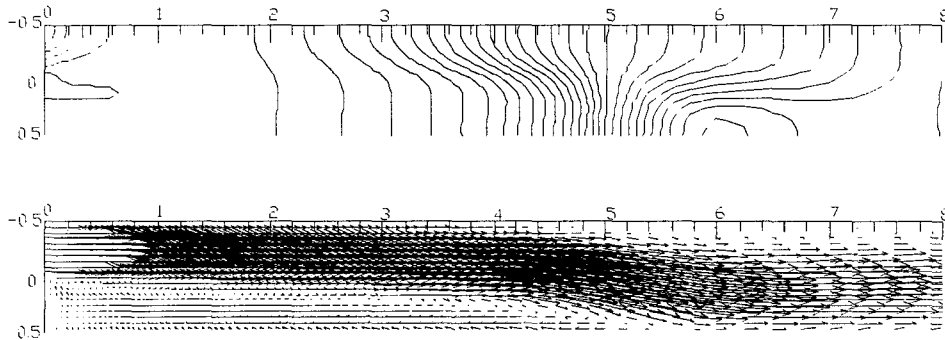


그림 3. 압력등분포선과 속도 벡터

#### 3-2 원형실린더 주변을 흐르는 유체

실린더 주변을 흐르는 Re수가 100인 유체에 대한 해석을 수행하였다. 이 경우에 Vortex shedding이 일어나기에 충분하고 경계층 유동의 박리등은 발생하지 않는다. 유한요소망은 그림 4와 같으며 왼쪽부분에서 들어오는 속도는  $u=1, v=0$ 이고 영역의 상부와 하부에서는  $v=0, t_1=0$ 이다. 흐름이 나가는 오른쪽 부분에서  $t_1=t_2=0$ 이다. 이 문제에서 관찰한 사항은 항력계수  $C_d$ 의 값이 1.2에 근접한가의 여부와 와류방출이 발생하는 양상 및 와류방출 주파수이다. 해석결과  $C_d$ 는 1.402였으며 와류방출은 3초에 한번씩 위 아래에서 교대로 발생하였다. 와류방출시 속도벡터와 압력등분포선을 그림 5에 제시하였으며 기존 결과와 잘 일치하였다.

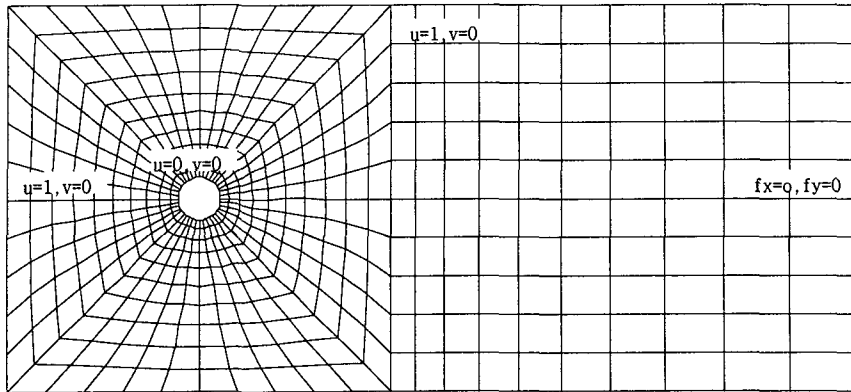


그림 4. 실린더 주변의 유동장 개요도

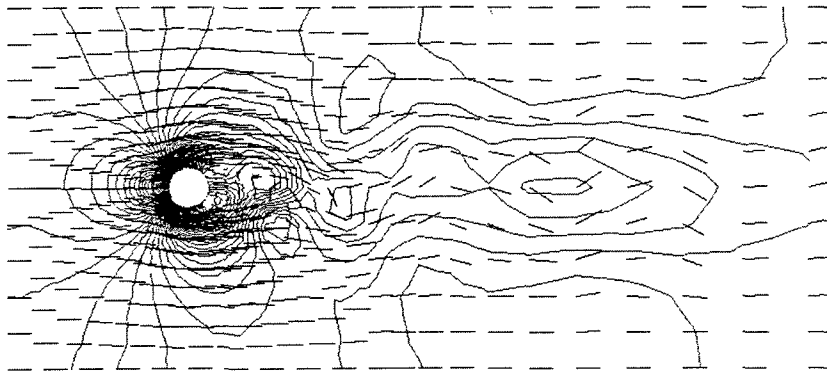


그림 5. 실린더 주변의 유동

#### 4. 결론

본 연구에서는 토목, 건축 구조물에 중요한 물과 공기를 대변하는 비압축성 점성유체를 유한요소법으로 해석하였다. 상류화 알고리즘을 도입하여 해의 안정성을 증대시켰으며 penalty 함수의 도입으로 자유도의 갯수를 줄이고 비선형 문제에 적합한 시간 적분방법을 선택하여 해석시간을 감소시켰다. 와류의 방출을 성공적으로 묘사하여 고체와 유체경계면에서 발생하는 시간에 따른하중변화를 계산할 수 있다.

#### 참고문헌

1. K.H. Huebner, E.A. Thornton, T.G. Byrom, "The finite element method for engineers", Willey Interscience, 1995.
2. J.N. Reddy, D.K. Garting, "The finite element methods in heat transfer and fluid dynamics", CRC Press, 1994.
3. T.J.R. Huges, "The finite element method", Prentice-Hall, 1987.
4. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, "The finite element method", McGraw-Hill, 1989.

5. 최영순, “전산유체 역학의 기초와 응용”, 한미출판사, 1991.
6. 일본기계학회, “전산유체역학”, 대영사, 1988.
7. T.J. R. Huges, W.K. Liu, A. Brooks, “Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty formulation”, *J. of Comp. Physics*, 30, 1-60, 1979
8. P.A.B. de Sampaio, P.R.M Lyra, K. Morgan, N.P. Weatherill, “Petrov-Gaerkin solutions of the incompressible Navior-Stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing”, *CMAME*, 106, 143-178, 1993.
9. A.N. Brookes, Thomas J.R. Huges, “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navior-Stokes equations”, *CMAME*, 32, 199-259, 1982.
10. J.N. Reddy, “On penalty function methods in the finite element analysis of flow problems”, *Int'l J. for Num. Methods in Fluids*, 2, 151-171, 1982.
11. Y.Yoshida, T.Nomura, “A transient solution method for incompressible Navior-Stokes equations”, *Int'l J. for Num. Methods in Fluids*, 5, 873-890, 1985.
12. G. Ren, T. Utnes, “A finite element solution of the time-dependent incompressible Navior-Stoke equations using a modified velocity correction methods”, *Int'l J. for Num. Methods in Fluids*, 17, 349-364, 1993.