

Initial Imperfection을 갖는 변단면 기둥의 거동 해석 Behavior of Tapered Columns with Initial Imperfection

이 병 구* 모 정 만**
Lee, Byoung Koo Mo, Jeong Man

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to investigate a more accurate behavior analysis of tapered column with initial imperfection. The nonlinear differential equations governing the deflected shapes of the tapered column with initial imperfection are derived by large deflection theory and solved numerically using the Runge-Kutta method and Regula-Falsi method.

Three kinds of cross-sectional shape with simply supported end constraint are considered in numerical examples. The load versus displacement curves including the left and right end rotations are presented in figures. The effect of cross-sectional shapes on deflected shape is analyzed, and the deflected shapes of column for several initial imperfections are shown in figure.

1. 서 론

기둥은 구조공학분야에서 가장 기본이 되는 구조단위로서 이에 대한 정, 동적거동에 관한 많은 연구⁽¹⁻⁵⁾가 이루어져 왔다. 이들 대부분의 연구들에서는 해석모형을 단순화하기 위하여 대상기둥이 완전직선(perfectly straight)상태라는 가정을 채택하고 있다. 그러나 실제 공학구조물에서 완전직선 부재는 존재할 수 없으며, 실제 부재에는 다소간의 초기변형(initial imperfection)이 존재하게 된다. 이와 같은 초기변형이 존재하는 기둥의 경우에는 직선기둥과는 달리 모든 축하중 단계에 대하여 일정처짐(definite deflection)이 발생하게 된다⁽⁶⁾.

초기변형이 존재하는 기둥의 안정해석은 미소처짐이론(small deflection theory)에 의해서도 해석할 수 있지만, 작용하중이 큰 경우나 초기변형이 비교적 큰 경우 정확한 안정해석을 위해서는 과대처짐이론(large deflection theory)에 의한 해석이 이루어져야 한다.

본 연구에서는 초기변형을 갖는 변단면 기둥에 축하중이 작용하는 경우 대상기둥의 처짐곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하프로서 대상기둥의 변형상태를 산출하고자 하는 데 연구목적이 있다. 본 연구에서 기둥은 선형탄성체, 기둥축은 비압축성(incompressibility)이며, 축하중은 단면도심에 작용하는 것으로 가정하였으며, 전단변형효과는 고려하지 않았다.

* 원광대학교 공과대학 토목환경공학과, 교수

** 원광대학교 대학원 박사과정

2. 단면변화

본 연구에서 기둥은 그림 1에 나타낸 바와 같이 단면의 제원이 직선적으로 변화하는 변단면을 채택하였다. 이 그림에서 l 은 기둥의 축길이, I_A , I_B 는 각각 기둥 좌단과 우단의 단면2차모멘트를 나타내고 있으며, 기둥축상 임의점 S 에서 단면2차모멘트 I 는 I_A 를 기준으로 정의하는 경우 다음 식과 같이 표시된다⁽⁷⁾.

$$I = I_A [1 + (k-1)S/l]^m \quad (1)$$

여기서,

$$k = d_B/d_A \quad (2)$$

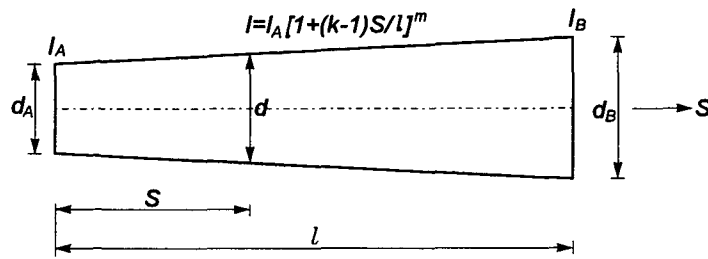


그림 1. 변단면 기둥

(1)식에서 k 는 (2)식에 나타낸 바와 같이 기둥의 우단과 좌단의 단면제원을 나타내는 d_B 와 d_A 의 비로서 이후 단면비(section ratio)로 표기한다. 또한 (1)식에서 m 은 기둥단면의 형상에 따라 결정되는 단면형상계수로서 본 연구의 수치해석예를 위하여 택한 단면형상별 단면형상계수는 다음과 같다⁽⁸⁾.

$$\text{변화높이 구형단면} : m=3 \quad (3)$$

$$\text{변화폭 구형단면} : m=1 \quad (4)$$

$$\text{정방형단면/원형단면} : m=4 \quad (5)$$

3. 지배미분방정식

그림 2(a)는 축하중이 작용하지 않는 초기변형을 갖는 변단면 기둥의 기하학적 형상을 나타낸 것으로 본 연구에서는 이의 선형식을 다음 (6)식과 같이 포물선식으로 정의한다.

$$Y_S = \frac{4D}{l^2} S(l-S) \quad (6)$$

그림 2(a)와 (6)식에서 l 은 부재축길이, S 는 기둥좌단으로부터 기둥축상 임의점까지의 곡선길이이며, Y_S 는 S 위치에서 Y 좌표이다. 또한 D 는 $S=l/2$ 에서의 Y 좌표로서 초기변형의 최대값을 나타내며, H_0 는 초기변형으로 인한 기둥우단의 횡방향이동량으로 이는 결국 기둥지간길이의 감소량이다.

초기변형이 지간길이에 비해 매우 적다고 가정하면 초기곡률은 다음 (7)식과 같으며, 따라서 기둥축상 모든 점에서 일정한 값을 갖게 된다.

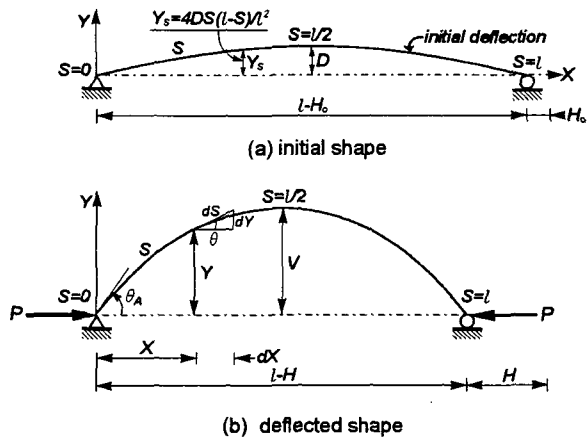


그림 2. 하중작용 전후의 초기변형을 갖는 변단면 기둥

$$K_s = -\frac{8D}{f} \quad (7)$$

그림 2(b)는 그림 2(a)의 초기변형을 갖는 변단면 기둥의 AB양단에 축하중 P 가 작용하는 경우 처짐곡선을 나타낸 것이다. 이 그림에서 θ_A 는 기둥좌단에서의 단면회전각으로 초기회전각을 포함하고 있으며, Y 는 기둥축상 임의점 S 위치에서 Y 좌표로서 초기변형 Y_s 를 포함하고 있다. 또한 V 는 $S=l/2$ 에서 Y 좌표로서 역시 초기변형의 최대값 D 를 포함하고 있으며, H 는 이동지점인 기둥우단의 수평방향변위로서 H_0 를 포함하고 있다.

그림 2(b)에서 (X, Y, θ) 사이의 S 에 대한 관계식은 다음 (8), (9)식과 같으며, S 위치에서 곡률 K 는 (10)식과 같다.

$$\frac{dX}{dS} = \cos \theta, \quad \frac{dY}{dS} = \sin \theta, \quad K = \frac{d\theta}{dS} \quad (8 \sim 10)$$

기둥축상 S 위치에서 휨모멘트 M 은 하중작용 전후의 곡률변화 $(K - K_s)$ 에 비례하므로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = -EI(K - K_s) \quad (11)$$

(11)식에서 E 는 기둥재료의 탄성계수이며, I 는 기둥축상 S 위치에서의 단면2차모멘트이다.

그림 2(b)에서 휨모멘트 M 과 축하중 P 사이의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dM}{dS} - P \sin \theta = 0 \quad (12)$$

(11)에 (7)식과 (10)식을 대입하면 다음 식과 같다.

$$M = -EI \left(\frac{d\theta}{dS} + \frac{8D}{f} \right) \quad (13)$$

(13)식으로부터 dM/dS 를 구하여 (12)에 대입하고 정리하면 다음 식과 같다.

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} + \frac{1}{I} \frac{dI}{dS} \left(\frac{d\theta}{dS} + \frac{8D}{f} \right) + \frac{P}{EI} \sin \theta = 0 \quad (14)$$

(1)식에서 dI/dS 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\frac{dI}{dS} = \frac{mI_A(k-1)}{I[1+(k-1)S/I]^{1-m}} \quad (15)$$

미분방정식을 무차원형으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$s = S/I, \quad x = X/I, \quad y = Y/I, \quad d = D/I \quad (16 \sim 19)$$

(14)식에 (1)식, (15)식을 대입하고 (16)식~(19)식의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 다음 (20)식을 유도할 수 있으며, (8)식과 (9)식은 (16)식~(18)식의 무차원 변수를 이용하면 (21), (22)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{m(k-1)}{[1+(k-1)s]} \left(\frac{d\theta}{ds} + 8d \right) - \frac{\pi^2 p \sin \theta}{[1+(k-1)s]^m} \quad (20)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (21)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (22)$$

(20)식에서 p 는 무차원 하중계수(load parameter)로서 그 내용은 (23)식과 같다.

$$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_A} \quad (23)$$

대상기둥의 $S=0$ (회전지점)에서 $X=Y=0$ 이므로 (16)식~(18)식의 무차원 변수를 이용하면 (24), (25)식의 경계조건식을 유도할 수 있으며, 휨모멘트 $M=0$ 이므로 (13)식, (16)식, (19)식을 이용하면 (26)식의 경계조건식을 유도할 수 있다.

$$x=0, \quad y=0, \quad \frac{d\theta}{ds} = -8d \quad (24 \sim 26)$$

또한 $S=l$ (이동지점)에서 $Y=M=0$ 이므로 다음 식과 같은 무차원 경계조건식을 유도할 수 있다.

$$y=0, \quad \frac{d\theta}{ds} = -8d \quad (27 \sim 28)$$

4. 수치해석방법

미분방정식 (20)식~(22)식을 수치적분하기 위해서는 (24)식~(26)식에서 유도된 경계조건식에 의한 초기치 이외에 $s=0$ 에서 단면회전각 θ_0 를 알아야 한다. θ_0 는 무차원 하중계수 p 에 대응되는 값을 갖게 된다. 따라서 θ_0 를 가정하여 수치적분한 결과가 $s=1$ (기둥우단)에서의 경계조건식 (27)식, (28)식을 만족하는 단면회전각 θ_0 를 찾는 경우 대상기둥의 과대처짐곡선이 산출된다. θ_0 를 가정하여 반복시행하는 과정에서 $s=1$ 에서 y 값의 부호가 바뀌면 무차원하중계수 p 에 대응되는 참 θ_0 값은 전단계에서 가정한 값과 현단계에서 가정한 값사이 존재하게 된다. 본 연구에서 참 θ_0 값을 찾기 위해서는 bracketing method인 Regula-Falsi method⁽⁹⁾를 이용하였으며, 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method⁽¹⁰⁾를 이용하였다. $s=1$ 에서 $y=0$ 가 되는 θ_0 값을 찾으면 이때의 $d\theta/ds=0$ 인지를 검토하였으며, 만족하는 경우 θ_0 값으로 확정하고 만족하지 않으면 다시 θ_0 값을 가정하여 위의 과정을 반복수행하였다. 이상의 과정에서 다음의 수렴기준식을 만족하는 θ_0 값을 참 θ_0 값으로 산

출하였다.

$$|y| \leq 1 \times 10^{-15}, \quad s=1 \text{에서} \quad (29.1)$$

$$|d\theta/ds + 8d| \leq 1 \times 10^{-12}, \quad s=1 \text{에서} \quad (29.2)$$

이상에서 설명한 바와 같이 무차원 하중계수 p 에 대응되는 $s=0$ 에서의 단면회전각 θ_A 를 찾으면 미분방정식의 수치적분결과로 (x,y,θ) 가 정의되므로 대상기둥의 과대처짐곡선을 얻을 수 있다.

기둥의 과대처짐곡선에서 지간중앙의 수직변위 V , 우단 이동지점의 수평변위 H 를 기둥의 지간 길이 l 에 대하여 정규화하면 다음 식들과 같으며, 이들 값은 각각 $s=1/2$ 에서의 y 및 $s=1$ 에서의 x 값이다.

$$v = V/l = y_{s=1/2} \quad (30.1)$$

$$h = H/l = x_{s=1} \quad (30.2)$$

5. 수치해석에 및 고찰

그림 3 (a)~(c)는 $k=1$ 즉 등단면 기둥인 경우 $d=0.00, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06$ 에 대한 하중-변위곡선을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 $d=0.00$ 인 경우 즉 완전직선기둥(perfectly straight column)인 경우에는 Euler좌굴하중인 $p=1$ (▲표)에서 v, θ_A, θ_B, h 가 발생하기 시작함을 알 수 있다. 그림 3(a)~(c)에서 일반적으로 d 가 큰 경우가 작은 경우에 비해 v, θ_A, θ_B, h 가 큼을 알 수 있다. 그림 3(b)는 하중 변화에 따른 θ_A, θ_B 의 변화를 나타낸 것으로 예견된 바(대상기둥이 대칭구조이므로 좌, 우단에서의 단면회전각은 동일)와 같이 종축에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

그림 3(a)에서 ○, ●, □, ■표로 표시된 것은 미소처짐이론에 의한 해석결과⁽¹¹⁾로서 작용하중 p 가 Euler좌굴하중인 $p=1$ 에 접근함에 따라 무한처짐(infinite deflection)이 발생함을 나타내고 있다. 이 그림에서 미소처짐이론에 의한 해석결과는 하중이 작거나 d 가 작은 경우에는 과대처짐이론에 의한 해석결과와 매우 근접하지만, 하중이 Euler좌굴하중에 접근하는 경우나 d 가 큰 경우에는 미소처짐이론에 의한 결과와 과대처짐이론에 의한 결과사이에는 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

그림 4~그림 6은 $k=2$ 인 변화높이 구형단면, 변화폭 구형단면, 정방형단면/원형단면 기둥에서 $d=0.00, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06$ 에 대한 하중-변위곡선을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 $d=0.00$ 인 경우

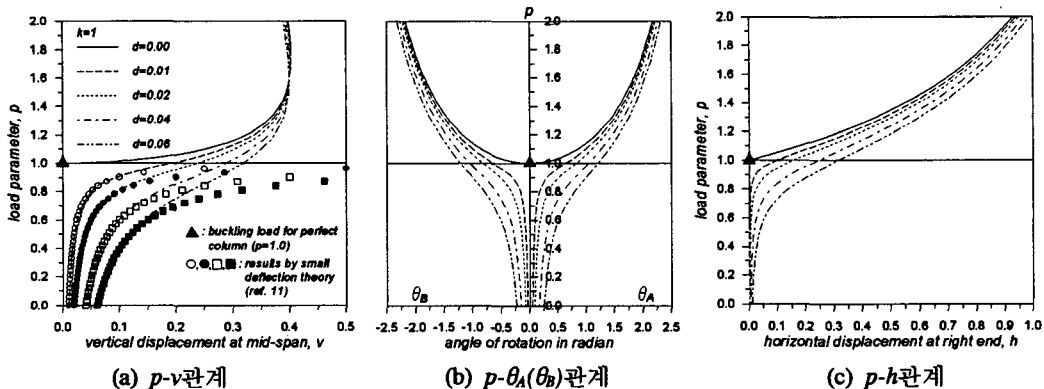


그림 3. $k=1$ 인 경우 하중-변위곡선

우 ▲표로 표시된 하중에서 변위가 발생함을 알 수 있다. 따라서 이때의 하중이 각각의 대상 기둥이 완전직선인 경우 Euler좌굴하중을 의미하게 된다. 또한 이 그림들에서도 그림 3의 등단면 기둥에서 고찰한 바와 같이 대부분의 하중단계에서 d 가 큰 경우가 작은 경우에 비해 일반적으로 변형이 큼을 알 수 있다. 그림 4(b), 그림 5(b), 그림 6(b)에서 θ_A 가 θ_B 보다 더 큼을 알 수 있는데 이는

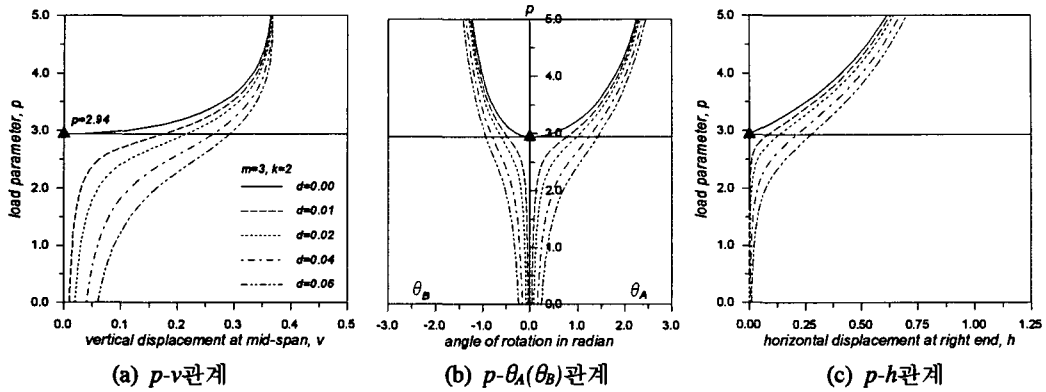


그림 4. $m=3, k=2$ 인 경우 하중-변위곡선

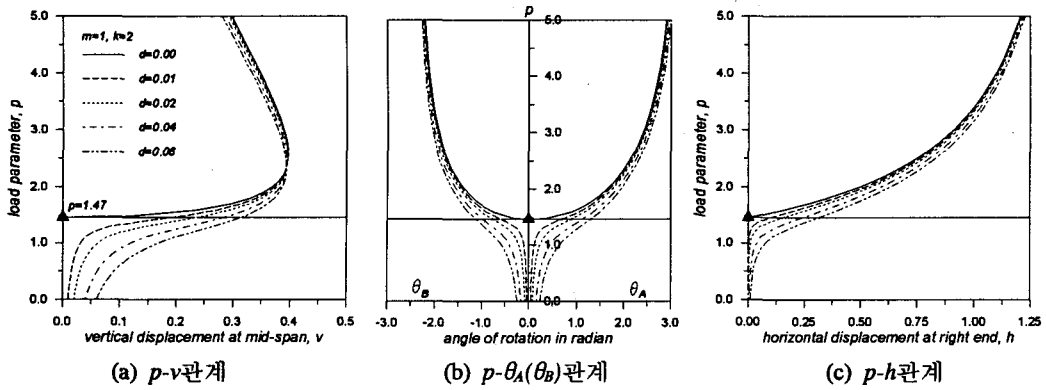


그림 5. $m=1, k=2$ 인 경우 하중-변위곡선

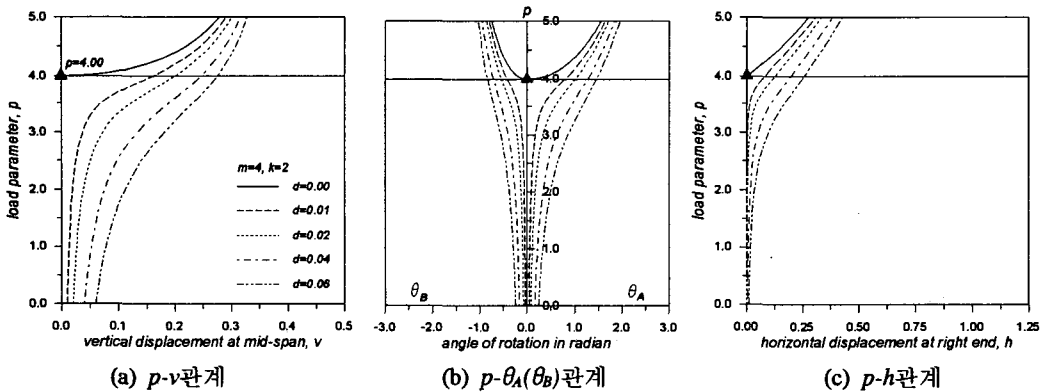


그림 6. $m=4, k=2$ 인 경우 하중-변위곡선

기둥우단의 단면제원이 좌단에 비해 두배가 커서 회전에 대한 저항능력이 더 크기 때문이다. 그림 4~그림 6을 비교하면 동일하중인 경우 $m=1 > m=3 > m=4$ 의 순으로 변형이 더 큼을 알 수 있다.

그림 7과 그림 8은 $I_B/I_A (=k^m)$ 가 3으로 일정한 $m=3(k=1.442)$, $m=1(k=3.000)$, $m=4(k=1.316)$ 인 변단면 기둥이 $d=0.001, 0.02$ 인 경우에 대한 하중-변위곡선을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 I_B/I_A 가 일정한 경우 대부분의 대응하중에 대하여 $m=4 > m=3 > m=1$ 의 순으로 변형이 더 큼을 알 수 있다.

그림 9는 $m=3, k=1.442$ 이고, $d=0.001, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06$ 인 변단면 기둥에 $p=2$ 가 작용하는 경우 과대처짐곡선을 나타낸 것이다.

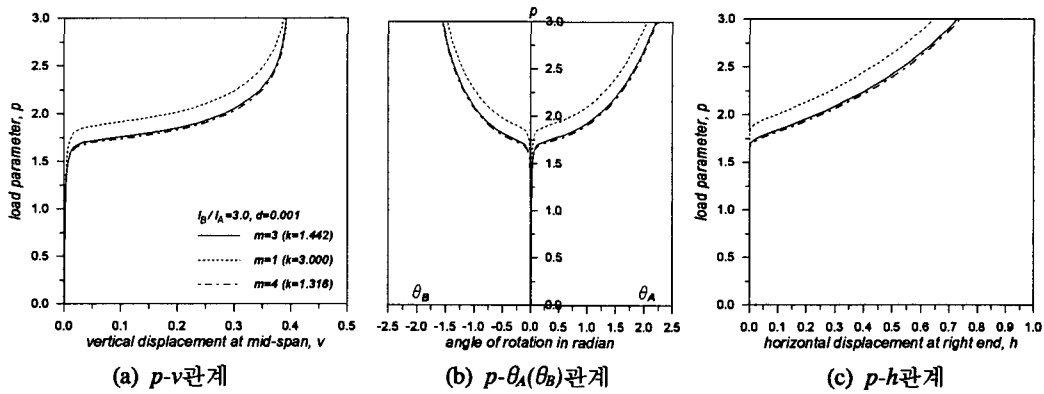


그림 7. 단면형상별 하중-변위곡선($d=0.001$)

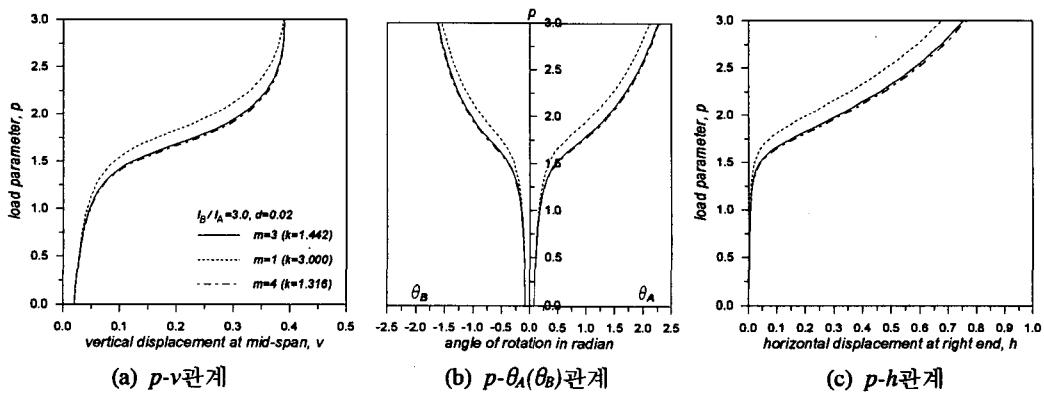


그림 8. 단면형상별 하중-변위곡선($d=0.02$)

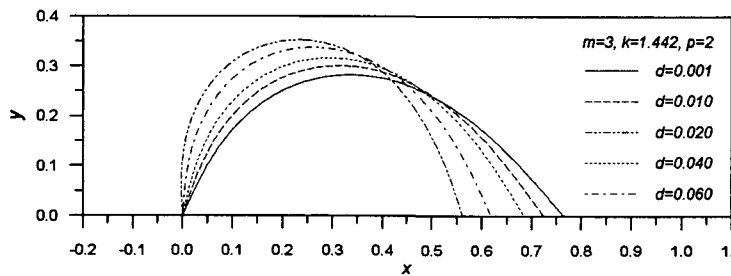


그림 9. d 에 따른 과대처짐곡선의 예

6. 결 론

본 연구는 초기변형을 갖는 변단면 기둥의 거동해석에 관한 연구이다. 이 논문에서는 초기변형을 갖는 선형 변단면 기둥의 과대처짐곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 유도된 지배방정식은 Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 이용하여 수치해석하였다. 수치해석예로서는 단순지지된 선형 변단면(변화높이 구형단면, 변화폭 구형단면, 정방형단면/원형단면) 기둥을 택하였다. 수치해석결과로서 초기처짐의 크기에 따른 하중-변위(시간중양의 수직변위, 기둥좌, 우단의 단면회전각, 기둥우단의 수평변위)곡선을 작성하였으며, 단면형상이 처짐곡선의 특성에 미치는 영향을 고찰하였다.

참 고 문 헌

1. G.E. Sliter and A.P. Borezi, "Elastica Supported at Midpoint by a Spring", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, No. EM2, 1964, pp.1-15.
2. 유철수, 손성원, "일정변단면 장주의 임계좌굴하중의 결정", 대한토목학회 논문집, 제4권 제1호, 1984, pp.98-101.
3. T. Sakiyama, "A Method of Analysing the Elastic Buckling of Tapered Columns", *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 1, 1986, pp.119-120.
4. X. Zhao, T.R. Tauchert and W.Y. Wu, "Postbuckling Response of Elastically Supported Columns", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 26, No. 5, 1991, pp.585-594.
5. 이병구,오상진,모정만,김현상, "변단면 기둥의 자유진동 및 최소임계하중 해석", 한국소음진동 공학회 논문집, 제2권 제3호, 1992, pp.203-211.
6. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
7. A.K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 11, No. 1, 1985, pp.19-36.
8. 이병구,오상진,모정만, "단순지지 변단면 기둥의 임계하중 및 후좌굴 거동", 대한토목학회 논문집, 제11권 제4호, 1991, pp.17-26.
9. B. Carnahan, H.A. Luther and J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, 1969.
10. A.W. Al-Khafaji and J.R.Tooley, *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, 1986.
11. W.F. Chen and T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns (I)*, McGraw-Hill, 1976.