

## 래티스돔의 안정문제에 관한 연구 A Study on the Stability Problems of the Latticed Domes

한 상 을  
Han, Sang-Eul

---

### ABSTRACT

The primary objective of this paper is to grasp many characteristics of buckling behavior of latticed spherical domes under various conditions. The Arc-Length Method proposed by E.Riks is used for the computation and evaluation of geometrically nonlinear fundamental equilibrium paths and bifurcation points. And the direction of the path after the bifurcation point is decided by means of Hosono's concept. Three different nonlinear stiffness matrices of the Slope-Deflection Method are derived for the system with rigid nodes and results of the numerical analysis are examined in regard to geometrical parameters such as slenderness ratio, half-open angle, boundary conditions, and various loading types. But in case of analytical model 2 (rigid node), the post-buckling path could not be surveyed because of Newton-Raphson iteration process being diversified on the critical point since many eigenvalues become zero simultaneously.

---

### 1. 서론

일반적으로, 구조물의 좌굴특성을 규명하는 이론적수법으로서, 통상, 평형경로를 연속적으로 계산하여 각 단계에서의 변형성상을 검토해 가는 방법이 많이 이용되고 있다. 구조물의 평형경로를 구하는 주요한 목적은 구조물의 좌굴전 거동, 좌굴하중의 크기, 좌굴후의 거동 등에 관한 특성을 파악하는데 있다. 특히, 분기좌굴이 발생할 것으로 예상되는 구조물에 있어서는 초기 불완전성의 영향이 크기 때문에 분기후의 경로를 구하는 것은 중요한 의미를 갖는다. 현재, 많은 형태의 구조물중에서 래티스돔의 안정에 관한 연구가 널리 행해져 그 역학적 거동특성이 계속 규명(究明)되고 있지만, 정확한 좌굴경로 및 좌굴하중의 추정에 관한 연구는 많지 않으며, 좌굴특성 및 변형특성이 충분히 규명되었다고는 말할 수 없다. 특히, 래티스돔과 같은 셀형구조물은 그의 내력이 탄성좌굴에 의해 결정되는 경우가 많지만, 탄성 좌굴하중을 구형셀과 같이 closed form으로 표현하는 것은 불가능하며, 현재로서는 기하학

---

인하대학교 건축공학과 교수

적 비선형을 고려한 수치해석이 불가결한 상황이다. 따라서, 본 연구에서는 편접합 및 강접합 그리고, 스프링모델을 이용하여, 비교적 평평한 원형평면을 갖는 구형 래티스돔에 관하여 몇가지의 분포하중상태에 대한 수치해석을 행하고, 설계에 있어서 어느 형태의 분포하중이 주위를 요하는지 파악한다. 또한, 상현재의 세장비, 정부(頂部) 부재의 반개각(半開角)을 파라메타로 하여 해석을 행한다.

강접합 래티스돔의 좌굴해석에 있어서는 축력과 처짐의 상호작용을 고려하여 정식화한 3 종류의 기초방정식에 대한 결과에 대하여 비교, 고찰한다.

## 2. 비선형 수치해석법

### 2.1 호장증분법의 정식화

본 논문에서는 기하적 비선형문제의 수치해석법으로 호장증분법(Arc-Length Incremental Method)을 사용한다. 또한, 평형경로상에 분기좌굴이 일어나는 경우, 분기점 이후의 경로방향을 구하기 위하여 고유치에 의한 동차모드와 하중에 의한 특차모드를 이용한다. 본 논문에서 사용하고 있는 수치해석법의 특징을 기술하면 1) 증분 파라메타로 평형경로의 길이를 이용하는 호장증분법의 해법이기에 때문에 하중증분법이나 변위증분법에서는 수치계산이 불가능한 평형경로도 추정이 가능하다. 2) 증분계의 강성매트릭스가 비대칭이기 때문에 skyline법과 같은 대칭매트릭스의 이점을 살리는 경제적 해법이 불가능하다. 3) 각 증분단계에서 Newton-Raphson법에 의한 수렴계산을 여러번 반복하기 때문에 래티스돔과 같이 자유도수가 대단히 많은 구조물의 해석에 있어서는 경제적이지 못하며, 따라서 모드중첩법 등의 적용이 요구된다. 4) 분기점에서의 접선강성매트릭스의 계수(rank)가 <자유도-1>일때만 적용이 가능하며, 현재로서는 다중저감(multi-degeneration)의 경우 분기이후의 경로탐색이 불가능한 실정이다. 5) 분기해석에 자주 사용되는 섭동법(perturbation method)과 비교하면 정식화 및 프로그래밍이 대단히 용이하다. 6) 분기모드의 추정에 있어서 시행착오적으로 계산을 행하기 때문에 해석이 불안정하게 되기 쉽다.

호장증분법의 해법에 적용되는 알고리즘은 다음과 같다.

소문자의 아래첨자  $i$  : 증분 스텝수 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

소문자의 위첨자  $n$  : 수렴 스텝수 ( $m = 0, 1, 2, \dots, 1$ )

계의 증분방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K(D_{i-1})]\{d_i^0\} - P_i^0\{F\} = \{0\} \quad (2.1)$$

일반 호장증분방정식은 다음식으로 쓸 수 있다.

$$(|d_i^0|)^2 + (p_i^0)^2 = (a_i^0)^2 \quad (2.2)$$

식(2.1)과 식(2.2)를 연립하여 해를 구할 수 있지만, 식(2.2)는 증분에 관한 비선형방정식이므로 전 스텝의 계산결과를 이용하여 선형화한다.

$$\Psi_{i-1}^T \cdot d_i^0 + \mu_{i-1} \cdot p_i^0 = (a_i^0)^2 \quad (2.3)$$

여기에서,

$$\Psi_{i-1} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \sum_{m=0}^l d_{i-1}^m \quad (2.4)$$

$$\mu_{i-1} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \sum_{m=0}^l p_{i-1}^m \quad (2.5)$$

따라서, 식(2.1)과 식(2.3)으로 부터 각 스텝에서의 해를 구할 수 있다. 이 식을 매트릭스형태로 쓰면 호장중분단계에서의 기초식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K(D_{i-1}) & -F \\ \Psi_{i-1}^T & \mu_{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i^0 \\ p_i^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (a_i)^2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

다음, 수정 Newton-Raphson 수렴과정에서의 제 n스텝 수렴방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left[ K(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) \right] \{d_i^n\} - p_i^n \{F\} = \{B_i^{n-1}\} \quad (2.7)$$

여기에서,  $\{B_i^{n-1}\}$ 는 다음식으로 부터 얻어지는 불평형력이다.

$$\{B_i^{i-1}\} = \left( p_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m \right) \{F\} - \left[ N(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) \right] \left\{ D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m \right\} \quad (2.8)$$

식(2.7)에서 미지수의 개수가 방정식의 수보다 하나 많기 때문에, 이 방정식을 풀기 위하여 부대조건으로서 지정한 호의 길이  $a_i$ 를 일정하게 유지시킨다. 이 일정조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left( \left\| \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m + d_i^n \right\| \right)^2 + \left( \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m + p_i^n \right)^2 = (a_i)^2 \quad (2.9)$$

식(2.9)는 증분에 관한 비선형방정식이므로 선형화 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left( \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m \right)^T \cdot d_i^n + \left( \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m \right) \cdot p_i^n = 0 \quad (2.10)$$

호의 길이가 일정하다는 조건식인 식(2.9)를 증분방향과 수렴방향이 직교한다는 조건식으로 변환시킨것이 식(2.10)이다. 따라서, 수정 Newton-Raphson 수렴과정의 기초식을 매트릭스로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K(D_{i-1} + \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m) & -F \\ \left( \sum_{m=0}^{n-1} d_i^m \right) & \sum_{m=0}^{n-1} p_i^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i^n \\ p_i^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_i^{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

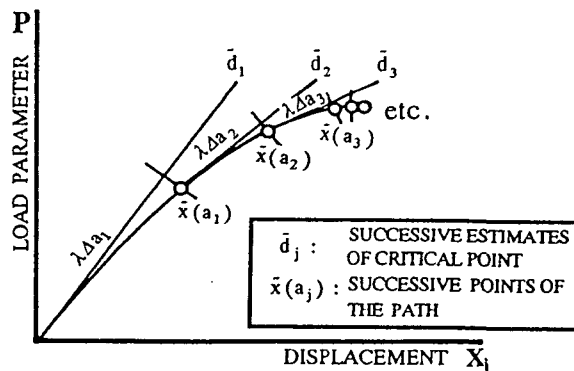


그림 2.1 호장중분법에 의한 평형경로의 추적

## 2.2 좌굴경로의 탐색

구조물에 하중이 점차 증가하여 임계점에 도달하면, 하중-변위곡선은 기본 경로로 부터 분기경로로 이동하게 된다. 이 과정에서 좌굴경로의 방향을 수치적으로 어떻게 정식화 할 것인가의 문제가 좌굴해석에서는 대단히 중요한 의미를 갖는다. 최소 고유치에 관계되는 동차모드(homogeneous modes)  $\{\alpha\}$ 와 하중에 관계하는 특해모드(particular modes)  $\{\beta\}$ 를 구하여  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ 의 선형결합 즉,  $c\{\alpha\} + p\{\beta\}$ 에 의해 분기경로의 방향이 얻어진다. 본 논문에서는  $c$  및  $p$ 에 추정 초기값을 부여하고, 수정 Newton-Raphson법을 이용하여 수립시킨다.

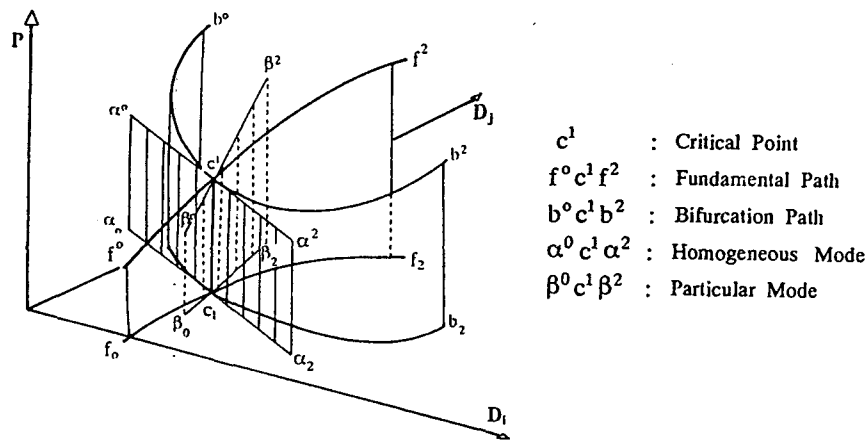


그림 2.2 대칭 분기좌굴시 분기경로의 방향

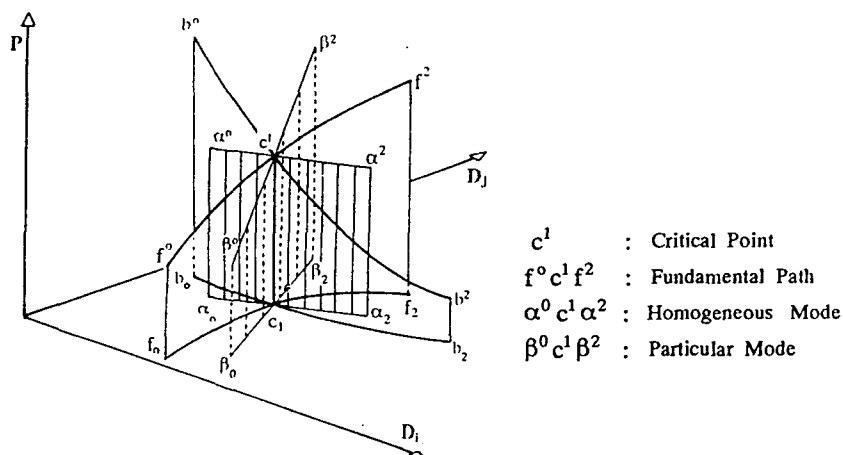


그림 2.3 비대칭 분기좌굴시 좌굴경로의 방향

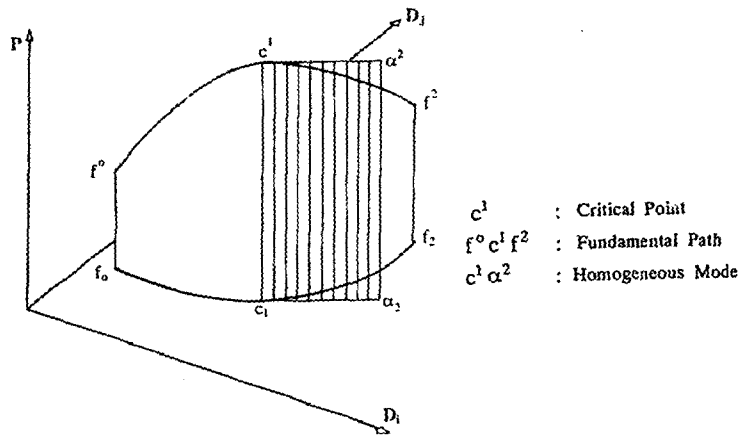


그림 2.4 극한좌굴시 좌굴경로의 방향

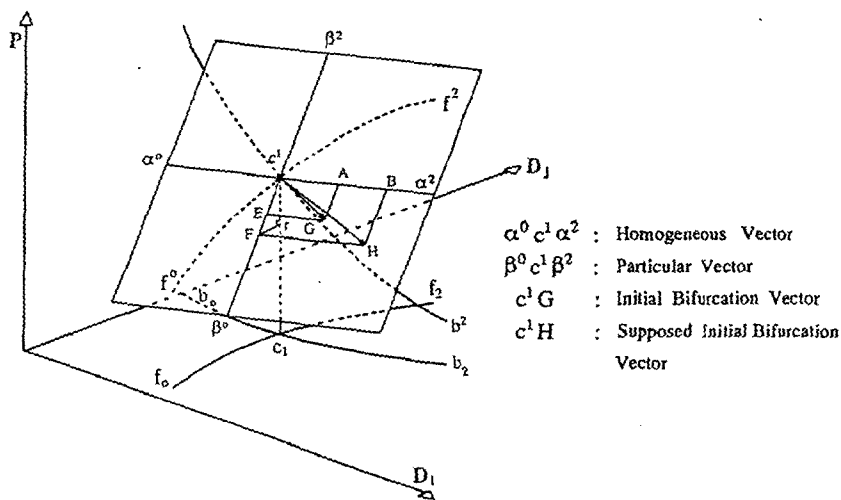


그림 2.5 초기 분기벡터의 가정

### 2.3 좌굴판정기준 및 특정부재의 선택방법

일반적으로, 비선형 좌굴해석을 위한 수치계산상에 있어서는 구조물의 접선강성매트릭스 행렬식이 0으로 되는 점을 좌굴점으로 간주한다. 그러나, 실제상으로는 고유치가 정확히 0이 되지 않기 때문에 본 논문에서는 다음과 같은 판정기준을 설정하였다.  $a_k$ 가 임계점인  $a^*$ 의 근방에 있다고 가정할때,  $a^*$ 에 대하여 Taylor전개를 하면 다음과 같다.

$$\omega(a^*) = \omega(a_k) + da_k \cdot \dot{\omega}(a_k) = 0 \quad (2.12)$$

위 식에서

$$da_k = -\omega(a_k) / \dot{\omega}(a_k) \quad (2.13)$$

$$\approx -\omega(a_k) \cdot da_{k-1} / \{\omega(a_k) - \omega(a_{k-1})\} \quad (2.14)$$

$a_k \rightarrow a^*$ 면  $da_k \rightarrow 0$ 가 되므로 다음식으로 좌굴점을 판단한다.

$$da_k < \varepsilon \cdot da_1 \quad (2.15)$$

또한,  $\omega(a_k) \approx \omega(a_{k-1})$ 의 경우에는  $da_k \rightarrow \infty$ 가 되므로 증분파라메타의 제한치도 설정하지 않으면 않된다. 또한, 래티스들의 해석에서 좌굴에 가장 영향을 미치는 부재를 판단하여 이 부재를 보강함으로써 국부좌굴을 방지할 수 있으며, 이의 판단지표로 부재의 변형도에너지 밀도함수를 부재의 강성매트릭스를 이용하여 다음식으로 계산한다.

$$E^{(n)} = \frac{1}{2A^{(n)} l^{(n)}} \{ \mathbf{u}^{(n)} \}^T [ \mathbf{k}_c^{(n)} ] \{ \mathbf{u}^{(n)} \} \quad (2.16)$$

여기에서,

$[ \mathbf{k}_c^{(n)} ]$  : 좌굴시 n번째 부재의 강성매트릭스

$\{ \mathbf{u}^{(n)} \}$  : n번째 부재단의 좌굴모드

$A^{(n)}$  : n번째 부재의 단면적

$l^{(n)}$  : n번째 부재의 부재길이

### 3. 부재, 접합부의 모델화 및 기초 방정식

#### 3.1 기본가정

- 1) 부재는 축대칭 원형단면을 갖는다.
- 2) 변형전 중립축에 수직이고, 평면이었던 단면은 변형후에도 수직이고, 평면을 갖는다.
- 3) 축에 대한 비틀림변형은 고려하지 않는다.
- 4) 면의 2방향의 힘은 서로 독립이다.
- 5) 접합부는 핀접합, 강접합, 강역(剛域)+회전스프링으로 모델링한다.

#### 3.2 부재의 기초방정식

##### 1) 좌굴처짐각법 1(SDM1)

변형후 부재의 전포텐셜에너지를 구하여 강성매트릭스를 유도하는 과정에서 축방향 변위는 x의 1차식, y, z방향 변위는 x의 3차식으로 가정한다.

##### 2) 좌굴처짐각법 2(SDM2)

좌굴처짐각법 1에서 절점회전각은 2차이상의 항이 무시될 만큼 미소하다고 가정한다.

##### 3) 좌굴처짐각법 3(SDM3)

처짐이 미소하다고 가정, 모멘트에 관한 미분방정식으로 부터 유도된다.

##### 4) 강역+회전스프링모델

강역과 부재사이에 있는 접합회전스프링의 주축은 부재의 주축과 일치하는 것으로 가정하며, 기초식의 유도에 필요한 재단모멘트는 SDM2를 사용하였다. 이 식을 이용한 이유는 식의 유도가 대단히 간편하고, 회전각의 2차항 이상을 고려한 SDM1의 결과와 차이가 대단히

미소하기 때문이다.

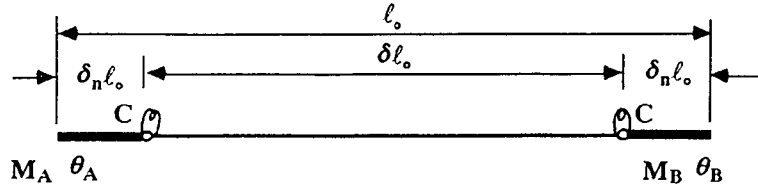


그림 2.6 양단 강역과 회전스프링으로 모델링된 부재형상

#### 4. 래티스돔의 비선형 수치해석 결과

##### 4.1 해석모델1(parallel lamera dome)

이 모델의 접합부는 편이며, 단층래티스돔의 전체좌굴에 대한 탄성좌굴하중을 라이즈 / 스펀비와 하중모드를 파라메타로 하여 검토하여 검토하였다. 평면은 원형, 분할평면은 수평으로 한다.

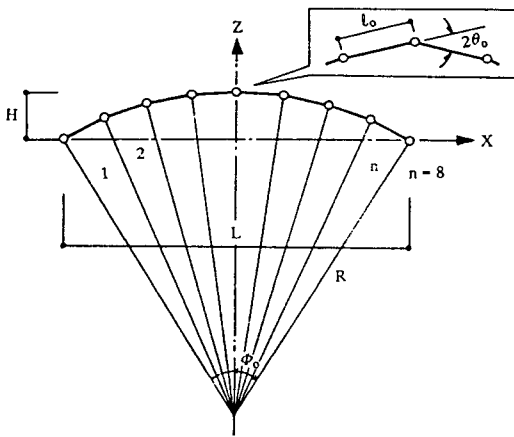


그림 4.1 해석모델1의 단면형상

표 4.1 해석모델1의 제원

돔의 형식		원형
분할수		4
라이즈 / 스펀비		0.05~0.25
스팬	cm	2000
부재단면적	cm	11.2(D=8.91 cm, t=0.42cm)
접합부모델		편접합
하중	t/node	등분포연직하중
지지조건		전주 편지지

표 4.2 라이즈 / 스펀 비에 따른 래티스돔의 좌굴하중 비교

라이즈 / 스펀 비	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	
$EA\theta_0^3(t)$	0.36	2.86	9.09	20.2	36.6	
좌굴하중 (t/node)	HANGAI	0.63	4.92	15.7	34.9	61.2
	본해석결과	0.62	4.91	16.7	39.4	73.6

해석모델1의 접선강성매트릭스의 고유치의 변화를 조사해 보면, 극한점 및 극한점근처의 경로에서 그림 4.2의 숫자로 표시한 것과 같이 몇개의 고유치부호가 부(負)로 바뀔 수 있으며, 이 현상으로 부터 좌굴후의 여러곳에서 다분기좌굴이 일어날 가능성이 높으며, 분기 경로의 방향을 결정하는 것이 대단히 곤란할 것으로 사료된다.

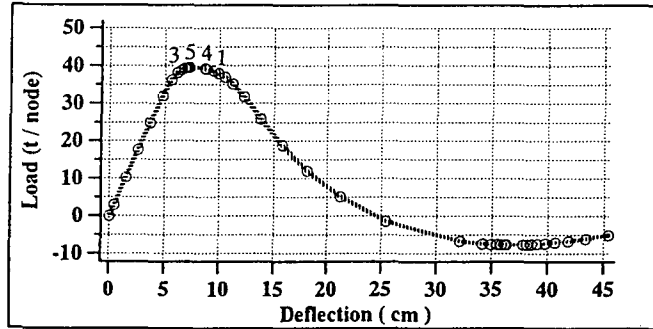


그림 4.2 해석모델1 정점의 비선형 탄성좌굴거동

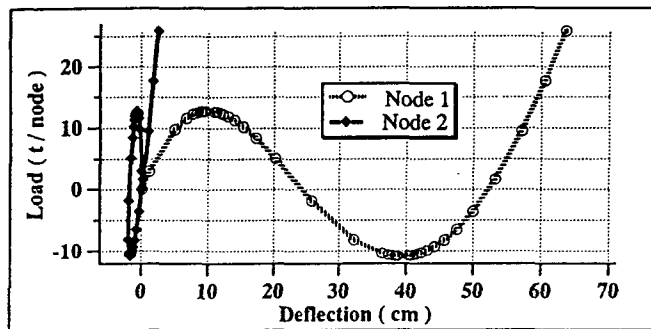


그림 4.3 정점 집중하중시 비선형 탄성좌굴거동

#### 4.2 해석모델2(hexagonal dome)

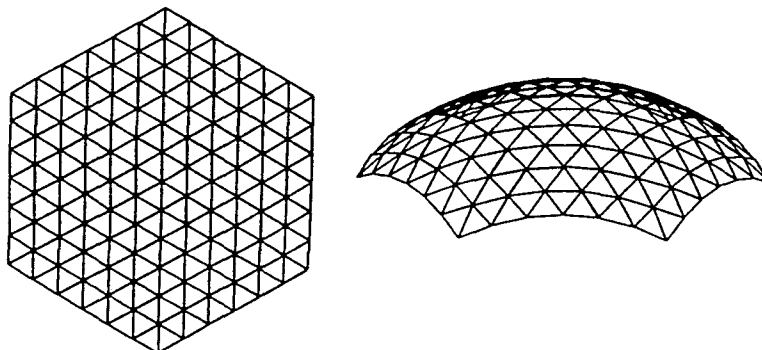


그림 4.4 해석모델2의 형상과 경계조건



해석모델2는 거의 동일한 삼각형그리드를 갖고, 대단히 편편한 정육각형 평면의 단층래티스돔으로 각절점은 곡률반경 R의 곡면상에 있다. 또한, 분할면은 연직이며, 각부재의 길이는 거의 동일하다.

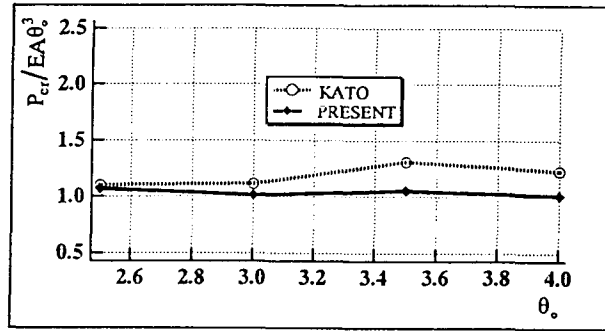


그림 4.5 정점부재의 반개각  $\theta_0$ 와 좌굴하중의 무차원화 좌표  $\eta$ 의 관계

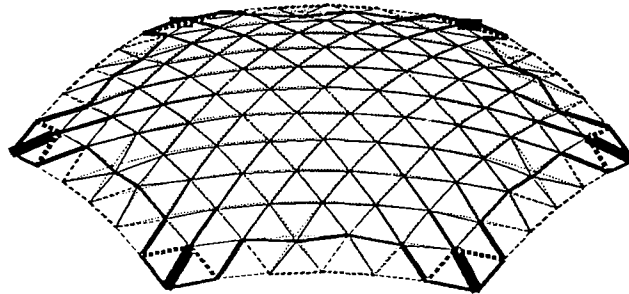


그림 4.6 좌굴모드 및 변형도에너지밀도의 분포

그림 4.5에서 보는 바와 같이 좌굴하중에 관한 본 해석결과가 Kato의 결과보다 약간 작게 나타나고 있다. 이것은 본 해석모델이 돔전체에 대하여 행해진 반면, Kato의 돔의 1/2부분만을 해석한 결과라고 사료된다. 전 해석모델에 걸쳐 편접합의 경우에는 수치계산시 모두 수렴하고 있으며, 비선형수치해석시 본 해석법을 충분히 적용할 수 있을 것으로 사료된다.

### 4.3 해석모델3(hexagonal dome)

본 해석모델은 해석모델2와 동일형태로 분할수  $n=3$ , 부재 반개각  $\theta_0=2,3,4,5$  그리고,  $\lambda=100$ 인 정육각형평면을 갖는 강접합 래티스돔이다. 또한, 본 논문에서는 균등한 절점연직하중이 작용하는 경우의 탄성좌굴하중을 좌굴처짐각법 1, 2, 3을 이용하여 산정하였다.

세계의 강성매트릭스를 사용한 결과를 비교하여 보면, 큰 차이는 보이지 않고 있으나,  $\xi=0\sim4$ 에서 SDM1과 SDM2, SDM3사이에는 약 20%,  $\xi=4\sim8$ 에는 SDM1, SDM2와 SDM3 사이에 약 20%의 차가 발생하였다. 결론적으로 실용적인 면에서 보면, 최소의 좌굴하중을 나타내는 SDM3가 유효하다고 생각된다.

표 4.3 좌굴침각법에 의한 좌굴하중과 고전좌굴치의 비교

좌굴하중 (t/node)		$\lambda=30$	$\lambda=50$	$\lambda=70$	$\lambda=100$	$\lambda=150$	$\lambda=200$
$\theta_0=2$	고전좌굴치	14.47			4.34		2.17
	SDM1	9.05			3.84		1.19
	SDM2	8.81			3.19		1.30
	SDM3	8.79			2.96		1.05
$\theta_0=4$	고전좌굴치	57.88	34.73	24.80	17.36	11.58	8.68
	SDM1	52.79	30.08*	19.19	10.94	5.08	2.72
	SDM2	46.40	27.40*	19.24	10.72	4.86	2.72
	SDM3	46.05	26.50	16.91	8.84	3.96	2.25
$\theta_0=6$	고전좌굴치	130.22			39.07		19.53
	SDM1	123.6*			16.91		4.29
	SDM2	113.1*			16.38		4.29
	SDM3	110.3*			13.48		3.35

4.4 해석모델4(강역+회전스프링으로 구성된 부재모델)

해석의 내용은 우선 접합부강역의 길이/절점간 거리  $\delta_n=0$ 으로 하고, 정부(頂部)부재의 세장비가 50, 100, 200인 경우에 대하여 접합부 무차원화스프링정수  $\kappa$ 를 0.01~1000까지 변화시키면서, 좌굴하중을 조사하였다. 또한 정부부재의 세장비를 100으로 고정하고  $\kappa=0.01\sim 1000$ ,  $\delta_n=0.025, 0.05, 0.075, 0.10$ 으로 하여 좌굴하중을 조사하였다.

표 4.4 정부부재의 세장비와 접합부 무차원화 스프링정수에 의한 돔의 좌굴하중

$\lambda_0 \backslash \kappa$	핀접합	0.01	0.1	1.0	10.0	100.0	1000.0	강접합
50	11.6	11.9	12.7	15.3	23.3*	26.0*	26.3*	26.4*
100	11.6	12.16	8.59	9.62	10.3	10.13	10.4	10.26
200	11.16	12.08	14.33	11.19	2.70	2.73	2.73	2.83

5.결론

현재, 다양한 형태의 래티스 돔에 관한 정확한 좌굴거동을 거시적으로 파악하는 해석방법 및 수치계산결과가 요구되는 상황에서, 해석 알고리즘 및 좌굴판정기준을 명확히 하였다. 또한, 몇개의 해석모델을 통하여 타 연구자와의 계산결과를 비교, 본 해석법의 타당성을 입증하였으며, 근사해법인 모-드중첩법의 개발을 위한 비교기준 데이터의 확보에 의미가 있다.

참고문헌

1. Riks, E. : An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, 1979, pp. 529 - 551
2. 細野 透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その1) 座屈点に於ける増分解の性質, 日本建築學會論文報告集, 第242号, 1976.4, pp.41 -49.