

초기불완전성을 고려한 단층래티스돔의 좌굴특성

The Buckling Characteristics of Single-Layer Latticed Domes with Initial Imperfection

권택진* 한상울** 이동우*** 주동현****
Kwun, Taek Jin Han, Sang Eul Lee, Dong Woo Joo, Dong Hyun

ABSTRACT

Many studies showed that small imperfections can also have a considerable influence on the behaviour of structures. Especially, in Single-Layer Latticed Domes, initial imperfection occurred by human error and construction error is very important to the buckling load.

The definition of imperfection is that a node of structure shifts from perfect condition. For example, in the case of truss structures, imperfections are represented by shifting the location of nodal points relative to the position in which they would be for a perfect structure.

This paper uses Arc-length Method in nonlinear iteration analysis, choosing star dome, in which many studies have been accomplished, as a model. The results of analysis show that initial imperfection can reduce the buckling load of structures.

1. 序 論

래티스구조물은 대공간 구조물에 널리 이용되고 있는 구조형식의 하나이다. 이 구조물은 기하학적 조형미가 우수하고 경량이면서도 강성이 높다는 장점을 가지고 있다. 또한 최근에는 프리페브(Prefab.)와 모듈화에 의한 공장생산이 가능하게 됨으로써 精度가 높은 각 부품을 다량으로 제작할 수 있게 되어 숙련공이 아니더라도 쉽게 조립할 수 있게 되었으며, 공기의 단축도 가능하게 되어 경제성이 우수한 구조시스템으로 인식되고 있다. 그러나 이러한 복잡한 구조물을 제작하거나 시공할때 부재길이의 오차나 시공오차가 발생할 수도 있다.

래티스돔에서의 불안정 현상의 원인은 주로 挫屈이다. 이러한 래티스돔의 불안정 현상은 局部挫屈과 全體挫屈, 즉 개개부재의 不安定과 전체구조물의 不安定이 있다. 그러나 국부좌굴을 전체좌굴과 명확히 독립적으로 분류할 수 없다.

최근에 彈性安定性에서 初期의 기하학적 不完全이나 荷重配列의 不完全, 래티스형상에 따른 문제, 재료성질의 不完全 등의 문제가 대두되고 있으며, 구조물에 약간의 不完全이라도 존재하는 경우 구조물의 舉動이 큰 영향을 받게 된다는 것은 오늘날 잘 알려져 있다. 挫屈理論에서 不完全(Imperfection)이라는 것은, 이론적으로 가정된 이상적인 상태에서의 변형을 말한다. 이러한 不完全의 종류로는 크게 기하학적 不完全, 하중계

* 성균관대학교 교수
** 인하대학교 조교수

*** (주)청구 기술연구소 팀장
**** (주)청구 기술연구소 연구원

의 不完全, 경계조건의 不完全, 재료적 不完全 등의 4가지가 있다.

기하학적 不完全의 종류로는 두가지가 있다. 즉, 部材의 不完全과 節點의 不完全이 있다. 부재의 不完全은 트리스 요소가 初期에 曲率을 가지거나 판이 曲率을 가지는 경우를 말하며, 절점의 不完全은 완전한 구조물과 비교해서 볼때 실제의 구조물이 가지는 기하학적 離脫(deviation)을 말한다. 예를 들어 트리스 구조물의 경우에 절점의 不完全은 완전한 구조물에서 節點의 위치가 이동한 것을 나타낸다.

특히 單層래티스돔(Single-Layer Latticed Dome)은 初期不完全에 매우 민감하다. 완전한 모델로 계산한 臨界荷重은 실제 구조물의 臨界荷重보다 훨씬 크다. 따라서, 單層래티스돔의 座屈荷重을 정확하게 평가하기 위해서는 반드시 初期不完全을 고려해야 한다. 지금까지 불안전에 대한 연구에서 單層래티스돔에 影響을 미치는 不完全중에서 가장 중요한 不完全은 幾何學的 不完全인 것으로 알려져 있다.

本 論文에서는 幾何學的 不完全중에서 節點의 不完全을 고려하고자 한다. 따라서, 기하학적인 불안전성을 높이에 대한 비율로 나타내어 세가지로 나누어서 그에 따른 영향을 고려하며, 하중이 모든 절점에 작용할때와 하나의 절점에 작용할때의 영향도 고려하고자 한다.

2. 래티스돔의 挫屈에 대한 分類

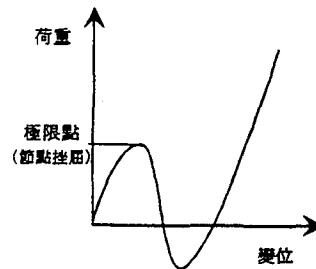
2.1 挫屈모드에 의한 分類

일반적으로 挫屈현상을 광범위하게 解析하여 구조물의 불안정 현상을 해석하면, 挫屈모드에 따른 래티스돔의 挫屈현상의 분류로서 모드의 형상이 연속체 셀의 挫屈과 비슷한 모드를 나타내는 全體挫屈, 구성부재가 節點사이에서 휘어지는 個別部材挫屈, 집중적인 荷重으로 소수의 節點이 국부적으로 돔의 面外방향으로 이동하는 局部挫屈(節點挫屈)이 있다.

全體挫屈이란 變位가 큰 挫屈모드가 구조물 전반에 걸쳐 넓게 보이는 挫屈현상을 말한다. 全體挫屈은 개별부재가 휨모멘트를 받지 않고 또한 변형도 작을때 구조물 전체가 갑자기 變位하는 현상이기 때문에 매우 偏平한 돔일 경우에는 전체재하에 의해 전체적인 변형이 진행되고 荷重이 極限點에 이른 후, 스냅스루현상을 일으켜 아래를 향해 볼록하게 되는 全體挫屈이 발생한다. 그러나, 이러한 현상은 節點挫屈이나 부분재하에 의해 발생하는 스냅스루와 공통점이 많다.

本 論文에서는 節點挫屈과 部材挫屈을 고려한다. 節點挫屈은 荷重-變位曲線에 따라 여러 가지로 해석이 가능하지만, 일반적으로 極限點에 이른 뒤에 스냅스루를 일으켜 挫屈하게 될때 極限點에서 갑자기 크게 變位하게 되는데 이러한 極限點을 節點挫屈이 일어나는 곳으로 간주한다<그림2.1>.

節點挫屈과 部材挫屈을 고려할 경우에 斷面의 성질과 偏平度에 따라 節點挫屈이 일어나기도 하고 部材挫屈이 일어나기도 한다. 즉, 偏平度가 클수록 節點挫屈이 일어나기 쉬우며, 偏平度가 작아질수록 部材挫屈이 일어나기 쉽다.



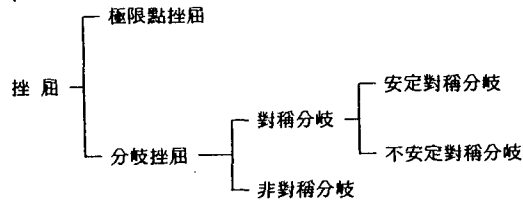
<그림 2.1> 스냅스루形의 節點挫屈

2.2 荷重-變位關係의 形態에 따른 分類

不安定 현상에 의한 經路의 형태상의 분류로 크게 分岐挫屈과 極限點挫屈이 있다. 또한 分岐挫屈에는 對稱分岐挫屈과 非對稱分岐挫屈이 있으며 對稱分岐挫屈에도 부경로에서 安定이 되는 安定對稱分岐와 不安定이 되는 不安定對稱分岐가 있다. 分岐挫屈은 部材방향으로 荷重이 作用하여 面內應力이 주가 될때 주로 발생하며 部材가 偏平하게 만들어져 있을 경우에는 極限點挫屈이 발생하기 쉽다.

특히 래티스돔은 다른 구조물에 비해 偏平정도가 크므로 주로 極限點挫屈이 발생하게 되지만 그 높이에

따라서 分岐挫屈이 발생하기도 한다.



3. 유한요소법에 의한 정식화

변형후의 i, j 점점의 변위 $(u, v, w), (u+du, v+dv, w+dw)$ 와 공학변형도의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_e = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (3.1)$$

변위함수를 사용하여 변형도를 매트릭스 형태로 나타내면

$$\epsilon_x = L d + \frac{1}{2} d^T Q^T Q d \quad (3.2)$$

여기에서, $L = \frac{1}{l_{ij}} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$

$$Q = \frac{1}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = [u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j]^T$$

가상일의 원리에 따라 연속체가 평형을 이루기 위해서는 가상變位에 의한 물체에 작용하는 모든 荷重에 대한 외력과 내력의 가상일의 합은 0이므로

$$\delta W_I + \delta W_E = 0 \quad (3.3)$$

즉, 가상일의 원리에 의해 δW_I 와 δW_E 의 합은 0이 된다. 따라서,

$$\delta W_I = \int_V \delta \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (3.4)$$

$$\delta W_E = - \int_V B \cdot \delta u dV - \int_S \hat{t} \cdot \delta u dS \quad (3.5)$$

δW_E 에서 표면력을 $\hat{t} = 0$ 이라 두고, 물체력 B 를 節點力으로 나타내면

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = f^T \cdot \delta d \quad (3.6)$$

식(3.6)에서 현재의 상태를 초기상태로 놓고, 증분에 대한 원리를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int_V \{ (\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x \} dV = \{ f^{(0)} + f \}^T \cdot \delta d \quad (3.7)$$

한편, 식(3.2)에서 $\delta \epsilon_x$ 를 구하면

$$\delta \epsilon_x = L \delta d + d^T Q^T Q \delta d \quad (3.8)$$

식(3.8)을 식(3.7)에 대입하여 정리하면

$$A l_{ij} \sigma_x^{(0)} L^T + (A l_{ij} \sigma_x^{(0)} Q^T Q + A E l_{ij} L^T L) d = f^{(0)} + f \quad (3.9)$$

非線形에 대한 증분방정식이므로 식(3.9)에서 불평형력 r 를 구하면

$$r = A l_{ij} \sigma_x^{(0)} L^T - f^{(0)} \quad (3.10)$$

따라서, 증분방정식은 다음과 같이 된다.

$$f - r = \{A E l_{ij} L^T L + A l_{ij} \sigma_x^{(0)} Q^T Q\} d = [k_E + k_G] d \quad (3.11)$$

여기에서 $k_E = A E l_{ij} L^T L$, $k_G = A l_{ij} \sigma_x^{(0)} Q^T Q$

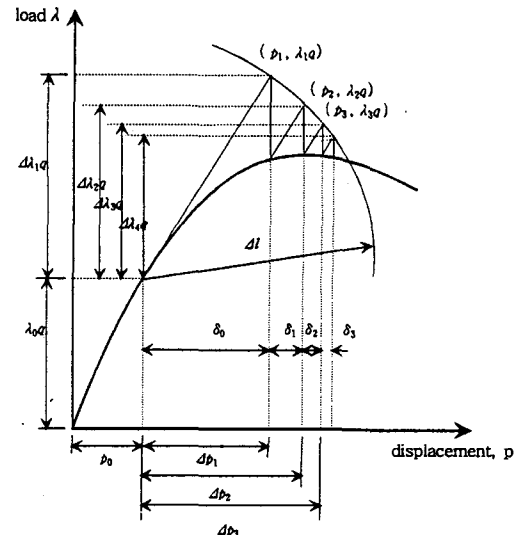
단, k_E 는 局所座標係에서의 彈性剛性매트릭스이며 k_G 는 幾何剛性매트릭스이다.

4. 非線形 數值解析法

4.1 序論

일반적으로 不完全性を 고려한 해석이나 大變形理論에 의한 기하학적 비선형 해석에서는 비선형의 거동을 하기 때문에 荷重-變位에 의한 접근법을 사용하게 된다. 荷重-變位曲線은 구조물의 평형이 되는 점을 나타내므로 이러한 경로를 추적하는 일은 매우 중요하다. 특히 單層래티스들은 그 평평정도에 따라 여러가지 형태의 荷重-變位曲線을 나타내게 된다.

極限點 이상의 平衡經路를 追跡하기 위한 증분법이 있으나 變位增分法에서는 스냅백이 荷重增分法에서는 스냅스루와 같은 舉動의 해석에 있어서 기울기가 0이 되는 부분이 발생하게 되므로 極限點 이후의 舉動을 추적하는 것이 어렵다. 그러나 弧長法은 變位增分法이나 荷重增分法과는 달리 스냅백이나 스냅스루 같은 특수한 舉動에 대해서 자동적으로 極限點과 관계없이 반복수행이 가능하다.



<그림 4.1> 기본호장과정의 표기 (b=1)

4.2 弧長法(Arc-length method)

일반적으로 弧長法에서는 하중매개변수 λ 가 변수로 취급되기 때문에 지배하는 평형방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(p) = f(p) - \lambda q \quad (4.1)$$

여기에서 내력 f 는 변위 p 의 함수이며, q 는 고정된 전체하중벡터이다. 벡터 g 는 불균형하중을 나타낸다. 변수 λ 에 대한 구속방정식은 다음과 같다.

$$\Delta p_{i+1}^T \Delta p_{i+1} + b \Delta \lambda_{i+1}^2 q^T q = \Delta p_i^T \Delta p_i + b \Delta \lambda_i^2 q^T q = \dots = \Delta l^2 \quad (4.2)$$

<그림 4.1>에서와 같이 Δp_i 는 $i-1$ 번째 반복이후의 증분변위이며, $\Delta \lambda_i$ 는 $i-1$ 번째 반복후의 증분하중이다. 그리고, Δl 은 선정된 증분길이이며, 스칼라 b 는 크기 매개변수이다. 이 논문은 $b=0$ 으로 놓은 Crisfield와 Ramm의 구형 호장법(Spherical Arc-length Method)을 사용한다.

증분변위를 Δp_{i+1} 라 하면 수정뉴턴랩슨법이 적용되므로, 탄젠트 강성매트릭스 K 는 각 증분단계의 시작에서만 계산되며 증분내의 모든 반복에서 일정하다. 즉

$$\Delta p_{i+1} = \Delta p_i + \delta_i \quad (4.3)$$

$$\delta_i = -K^{-1}(f_i(p_i) - \lambda_{i+1}q) = \bar{\delta}_i + \lambda_{i+1} \delta_T \quad (4.4)$$

$$\text{여기에서 } \bar{\delta}_i = -K^{-1}f_i(p_i) \quad , \quad \delta_T = K^{-1}q \quad (4.5)$$

δ_T 는 증분의 시작에서 생긴 탄젠트 변위벡터이고, 마지막 증분에서 완전히 수렴한다고 가정하면 다음식으로 부터 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -K^{-1}(f_0(p_0) - \lambda_1 q) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0) K^{-1}q = \Delta\lambda_1 \delta_T \end{aligned} \quad (4.6)$$

δ_T 는 저장되어 있기 때문에 각 반복에서는 (4.5)식의 $\bar{\delta}_i$ 만 필요하다. 그러나, 반복벡터 δ_i 는 λ_{i+1} 를 알아야만 완전히 정의되기 때문에, 결국 (4.3), (4.4)식을 $b=0$ 으로 둔 (4.2)식에 대입하면

$$a_1 \lambda_{i+1}^2 + a_2 \lambda_{i+1} + a_3 = 0 \quad (4.7)$$

여기에서

$$a_1 = \delta_T^T \delta_T \quad , \quad a_2 = 2 \delta_T^T \Delta p_i + 2 \delta_T^T \bar{\delta}_i \quad , \quad a_3 = \bar{\delta}_T^T \bar{\delta}_i + 2 \bar{\delta}_i^T \Delta p_i + (\Delta p_i^T \Delta p_i - \Delta l^2)$$

δ_T , Δp 와 $\bar{\delta}_i$ 는 모두 기지값이므로 (4.7)식을 λ_{i+1} 에 대해 쉽게 풀 수 있다.

지금까지 증분길이 Δl 은 알고 있는 것으로 가정하였다. 최초의 증분에 대해서 예측한 초기하중 $\Delta\lambda_1$ 과 (4.5)식에서 얻은 탄젠트 변위값을 가지고 $i=0$, $b=0$ 일때

$$\Delta l = \Delta\lambda_1 \sqrt{(\delta_T^T \delta_T)} \quad (4.8)$$

나머지의 증분에 대해서도 일정하다. 단 나머지 증분길이의 크기는 다음식에 좌우된다.

$$\Delta l_j = \Delta l_{j-1} \sqrt{\left(\frac{I_{j-1}}{I_d}\right)} \quad (4.9)$$

여기서 Δl_{j-1} 은 $j-1$ 번째 반복에서의 증분길이이며, I_{j-1} 은 $j-1$ 번째 증분단계에서 소요된 반복수이다. 그리고, I_d 는 필요한 반복수이다. 만일 최대 반복수내에서 수렴되지 않으면 증분길이가 줄어들게 된다.

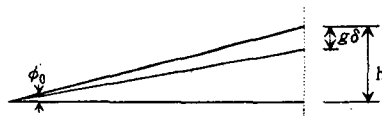
5. 數値解析모델 및 考察

5.1 幾何學的 不完全

셀모양의 돔은 일반적인 연속체셀과 동일하고 幾何學的 初期不完全이 있으면 그 挫屈荷重이 현저하게 저하된다. 이러한 初期不完全은 돔의 제작과 시공시에 不注意로 일어날 수 있다. 시공상의 어떠한 원인으로 돔의 節點이 초기에 변위량 $g\delta$ 만큼 오차를 가지게 조립되었다고 하면 <그림 5.1>과 같이 나타낼 수 있다.

여기서 초기에 不完全한 정도를 나타내는 수직변위를 나타내는 기호를 e 라 하면 식(5.1)과 같이 정의할 수 있다.

$$e = g\delta / h \quad (5.1)$$

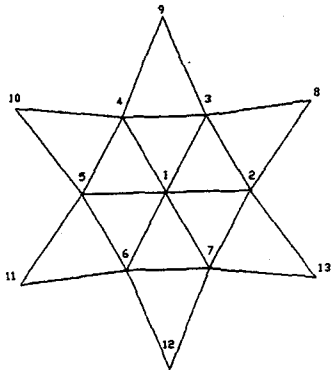


<그림 5.1> 不完全에 의한 變位 $g\delta$

5.2 解析모델

여기서 사용하계널 돔의 形狀은 <그림 5.2>과 같다. 이러한 形狀의 돔은 논문에서 자주 다루어지고 있는 모델이다. 이 모델의 좌표값은 표 5.1과 같다. 이 모델에서 사용할 荷重매개변수는 0.1이며 비례하중은 100kg으로 하였다. 일반적으로 하나의 節點에 荷重이 작용할때가 전 節點에 荷重이 작용할때보다 挫屈荷重에 더 취약한 것으로 알려져 있다.

本 모델에서는 支持點을 제외한 모든 節點에 荷重이 작용할 경우와 節點1에 荷重이 작용할 경우를 고려한다. 모델의 部材는 단면적 3.45cm², 탄성계수 2.0 x 10⁶ kg/cm², 단면 2차모멘트가 20.107 cm⁴인 재료이다.



<그림 5.2> 해석모델의 형상

표 5.1 해석모델의 절점좌표(단위 cm)

절점	X	Y	Z
1	0.000	0.000	20.869
2	63.500	0.000	15.789
3	31.750	54.994	15.789
4	-31.750	54.994	15.789
5	-63.500	0.000	15.789
6	-31.750	-54.994	15.789
7	31.750	-54.994	15.789
8	109.982	63.500	0.000
9	0.000	127.000	0.000
10	-109.982	63.500	0.000
11	-109.982	-63.500	0.000
12	0.000	-127.000	0.000
13	109.982	-63.500	0.000

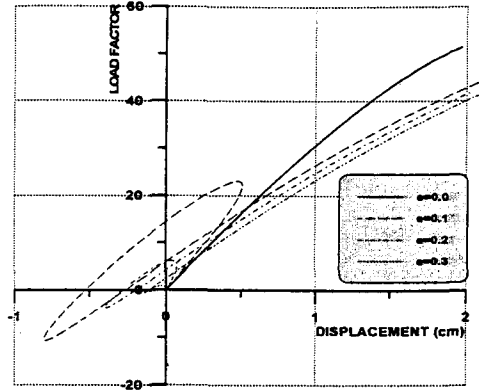
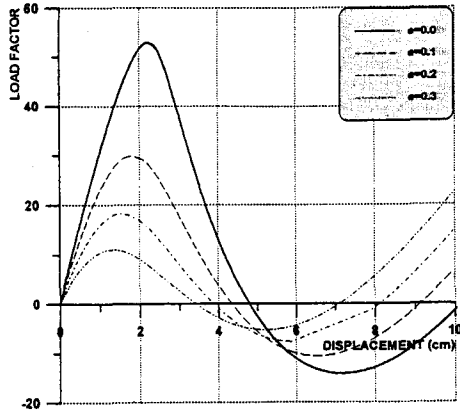
5.3 解析結果

가. 모든 節點에 荷重이 작용할 경우

모든 절점에 하중이 작용할 경우에 대한 절점좌굴하중 및 변위와 불완전위치에 따른 절점1에서의 하중-변위곡선을 표 5.2와 <그림 5.3-4>에 나타내었다.

표 5.2 절점좌굴하중 및 각 절점의 변위

모델의 상태	불완전도 (e)	하 중 (ton)	각 절점의 z방향 변위					e = 0.0에 대한 하중 백분율(%)
			절점1	절점2	절점3	절점4	절점5	
완전한 경우	e = 0.0	5.300	2.241	1.209	1.209	1.209	1.209	100.0
절점1의 불완전	e = 0.1	2.992	1.794	0.590	0.590	0.590	0.590	56.5
	e = 0.2	1.823	1.547	0.318	0.318	0.318	0.318	34.4
	e = 0.3	1.098	1.326	0.167	0.167	0.167	0.167	20.7
절점2의 불완전	e = 0.1	2.303	0.476	1.770	0.348	0.524	0.483	43.5
	e = 0.2	0.618	0.043	1.247	0.049	0.132	0.113	11.7
	e = 0.3	0.088	-0.031	0.717	-0.003	0.018	0.010	1.7



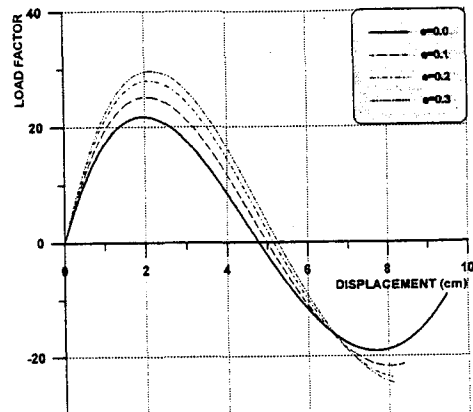
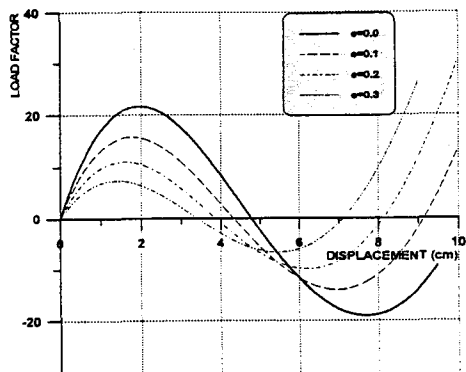
<그림 5.3> 節點1의 荷重-變位曲線 (節點1의 不完全) <그림 5.4> 節點1의 荷重-變位曲線 (節點2의 不完全)

나. 節點1에 荷重이 작용할 경우

절점1에 하중이 작용할 경우의 절점좌굴하중 및 변위와 불안전위치에 따른 절점1에서의 하중-변위곡선을 표 5.3와 <그림 5.5-6>에 나타내었다.

표 5.3 절점좌굴하중 및 각 절점의 변위

모델의 상태	불완전도 (e)	하 중 (ton)	각 절점의 z방향 변위					e = 0.0에 대한 하중 백분율(%)
			절점1	절점2	절점3	절점4	절점5	
완전한 경우	e = 0.0	2.178	1.971	-0.126	-0.126	-0.126	-0.126	100.0
절점1의 불안전	e = 0.1	1.578	1.753	-0.106	-0.106	-0.106	-0.106	72.5
	e = 0.2	1.101	1.590	-0.090	-0.090	-0.090	-0.090	50.6
	e = 0.3	0.733	1.376	-0.072	-0.072	-0.072	-0.072	33.7
절점2의 불안전	e = 0.1	2.514	2.030	-0.311	-0.044	-0.144	-0.162	115.4
	e = 0.2	2.796	2.106	-0.664	0.029	-0.160	-0.192	128.4
	e = 0.3	2.969	2.139	-1.308	0.081	-0.167	-0.205	136.3



<그림 5.5> 節點1의 荷重-變位曲線 (節點1의 不完全) <그림 5.6> 節點1의 荷重-變位曲線 (節點2의 不完全)

6. 結 論

本 論文에서는 初期 不完全을 고려한 單層래티스돔의 挫屈特性에 대한 研究를 수행하였다.

실제의 부재의 제작과 시공에는 오차가 발생하지 않을 수가 없다. 특히 래티스돔에서는 그 오차가 구조물의 안정성에 크게 영향을 주게되기 때문에 반드시 고려해야 한다.

本 論文의 결과로부터 미소한 節點의 不完全에도 極限荷重이 크게 감소함을 알 수 있었으며 이것은 래티스돔이 일반 구조물과 비교할 수 없을 정도로 초기불완전에 민감하다는 것을 나타낸다. 특히 荷重이 작용하는 節點에 不完全이 생기게 되면 그 節點의 極限荷重이 크게 감소하는 것을 알 수 있었다.

또한 일반적인 돔구조물의 특성과 같이 하나의 節點에 집중적으로 荷重이 작용할때가 모든 節點에 荷重이 작용할때보다 極限荷重이 크게 감소하며, 지점에 가까운 절점에 불완전이 생길때는 국부적인 곡률의 영향에 따라 하나의 절점에 하중이 작용할 경우에 좌굴하중이 증가하는 것을 알 수 있었다.

7. 向後의 研究方向

本 論文에서는 절점의 불완전도 e 를 변수로하여 $e = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$ 에 대한 수치해석을 행하였다. 그 결과 좌굴하중의 저하가 현저함을 알 수 있었다. 또한, 래티스돔은 많은 부재와 절점을 가진 편평 구조물이기 때문에 편평도, 부재수, 단위격자의 형태 등에 따라서도 다른 거동을 나타낸다. 따라서, 이에 대한 초기불완전성의 영향을 고려하는 것도 향후 필요하리라고 사료된다.

참 고 문 헌

1. Thompson, J. M. T., "Discrete Branching Points in The General Theory of Elastic Stability," J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, 1965, pp.295-310.
2. Powell, G., "Theory of Nonlinear Elastic Structures," Journal of the Structural Division, Dec., 1969, pp. 2687-2701.
3. Riks, E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems," Int. J. Solids Structures, Vol.15, 1979, pp. 529-551.
4. Rosen, A. and Schmit, Lucien A., "Design-Oriented Analysis of Imperfect Truss Structures - Part I - Accurate Analysis," Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.14, 1979, pp. 1309-1321.
5. Rosen, A. and Schmit, Lucien A., "Design-Oriented Analysis of Imperfect Truss Structures - Part II - Approximate Analysis," Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.15, 1980, pp. 483-494.
6. Crisfield, M. A., "An Arc-Length Method including Line Searches and Accelerations," Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.19, 1983, pp. 1269-1289.