

# B-스플라인 자유형상체 생성 알고리즘 개발에 관한 연구

## A study on development of algorithms for the B-spline freeform modelling

김희중\* . 정재현

한국해양대학교 대학원 기계공학과 . 한국해양대학교 기계시스템공학부

### 1. 서론

최근 생산 현장에서의 CAD/CAM등을 통한 자동화 확대와 더불어, 이에 필요한 설계 및 가공시스템의 수요도 증가하고 있다. 그러나 국내에서 사용중인 기계 및 관련 분야의 CAD/CAM 시스템은 대부분이 외국 제품이다. 근래 국내 몇몇 업체에서 독자적인 제품을 보급하고 있으나 아직도 저조한 실정이다. 더욱이 이들 제품의 대부분도 기본적인 핵심 기술 및 이론은 외국의 것을 도입한 경우가 많다. 그러므로 현재 설계 및 가공시스템의 국산화가 매우 절실하며, 또한 기본 배경이 되는 기하 라이브러리와 모델링 엔진의 개발이 시급히 요구된다.

기하 라이브러리는 설계 및 가공시스템의 개발에 있어 독창성을 부여할 수 있는 주요한 부분이며, 일반적으로 3차원 공간 개념 정의, 형상 프리미티브 정의, 그리고 각 프리미티브 요소간의 조작등을 제공한다.

본 연구는 설계 시스템 개발의 기본 환경인 기하 라이브러리 구성에 있어 자유형상, 특히 B-스플라인 기반의 자유형상체를 생성하는 데에 목적이 있다.

현재 대부분 CAD 시스템은 자유형상의 표현에 있어 B-스플라인 및 NURBS를 표준적으로 제공하고 있다. 그러나 복잡한 데이터

를 가지는 자유형상의 정의는 선형형상에 비하여 많은 계산과 시스템 자원이 요구된다. 특히 NURBS는 그 계산의 복잡함으로 인하여 워크스테이션급이라야 제대로 운용되고 있는 실정이다. 그러나, 최근 마이크로 프로세서의 발달로 저가의 시스템에서 이러한 자유형상체를 구성하기 위한 시도가 진행중이다.

기하 라이브러리가 범용성을 가지기 위해서는 다양한 종류의 시스템에 사용될 수 있도록 장치독립적(device independent)이어야 하며, 동일한 개발 환경을 제공할 수 있어야 한다. 본 연구에서의 개발환경은 HP 9000/720 워크스테이션에서 HP-UX 9.03과 X11R5/Motif 1.2를 기준으로 하였다.<sup>1</sup>

### 2. B-스플라인 형상 이론 분석

평면 및 공간에서의 일반적인 B-스플라인 곡선은 다음 식으로 표현된다.

$$C(t) = \sum_{i=1}^{m+1} P_i N_{i,k}(t) \tag{1}$$

$$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 2 \leq k \leq n+1$$

혼합함수는 식(2)와 같은 재귀함수식으로  $(x_i, x_{i+k})$  구간에서 제어되고, Cox-de Boor 알고리즘으로 증명된다.<sup>2</sup>

$$N_{ik}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+1,k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+1,k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+1,k}-x_{i+1}} \quad (2)$$

$$N_{ik}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

식에서  $x_i$  는 노트벡터이고 B-스플라인 형상의 기하학적 특징을 정의한다.

B-스플라인은 식(1)에서와같이 매개변수  $t$  에 대한 식으로 구성되어 있다. 노트벡터는  $t$  로 이루어진 매개변수 구간에 그 배열 수 만큼 순서대로 삽입되어 규칙 또는 불규칙적으로 매개변수 구간을 재구성하는 것으로 정의할 수 있다. 이때 노트벡터는 각 제어점의 매개변수 구간에 대한 영향력으로 분석하였다.\* 기하 라이브러리의 자유형상 루틴에서 B-스플라인 함수를 구현하기 위해서는 노트벡터의 사용이 필수적이다. 그러나 실제 사용자 측면에서는 제어점에 의한 형상제어가 우선적이므로 노트벡터를 주기적 형태로 고정한 경우가 일반적이다.

본 연구의 B-스플라인 형상 구현에는 nonuniform 노트벡터를 사용하여 다양한 형상제어가 가능하게 했다. 즉 혼합함수를 형상 생성 루틴에 포함하므로써 기존의 노트벡터 제한으로 인한 형상 변수(곡선 차수, 제어점 수 등)의 제약을 배제하였다. 그리고 nonuniform 노트벡터는 uniform 및 periodic 노트벡터를 모두 표현할 수 있다.

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 B-스플라인 혼합함수의 알고리즘 루틴이다.

Control\_points - Control points of control polygon  
 Knot\_points - knot vectors of B-spline curve or surface  
 deg - degree of B-spline basis function  
 k - degree + 1  
 n - number of Control\_points

procedure blend\_curve()  
 var i, k, t: real;

```

begin
  for i:=0 to n-k+2 do
    for t:=0 to 1 do
      if starting point
        moveto(devices, t, basisfunction(i,k,t));
      else
        lineto(devices, t, basisfunction(i,k,t));
      end if
    next t
  next i
end;

function basisfunction
  (var i, k, t, Knot_points: real): real
  var temp1, temp3, temp2, temp4: real;
begin
  if k>1 then
    temp1 = Knot_points[i+k-1] - Knot_points[i]
    if temp1 <> 0 then
      temp3 = (t-Knot_points[i])
        * basisfunction(i,k-1,t)/temp1;
    else
      temp3 = 0;
    end if
    temp2 = Knot_points[i+k] - Knot_points[i+1];
    if temp2 <> 0 then
      temp4=(Knot_points[i+k]-t)
        * basisfunction(i+1,k-1,t)/temp2;
    else
      temp4 = 0;
    end if
    basisfunction := temp3 + temp4;
  else
    if Knot_points[i]<=t
      and t<Knot_points[i+1] then
      basisfunction = 1;
    else
      basisfunction = 0;
    end if
  end;
end;

```

**Fig.1 Routines for calculating the B-spline**

#### **basis functions and blending curves**

Fig. 2는 위 루틴을 사용하여 아래와 같은 노트벡터 배열과 6개의 제어점을 가지는 곡선과 그 혼합함수이다. 혼합함수의 분석에서는 형상의 제어점의 갯수만이 형상 분석등에 필요하고 위치값은 의미가 없음을 파악할 수 있다.

**deg = 2, n = 6, knot vector [ 0 0 0 0.3 0.5 0.75 1 1 1 ]**

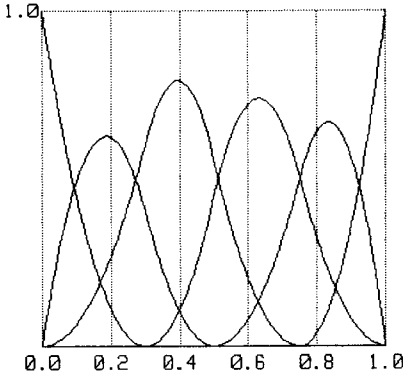


Fig. 2 Blending curves of a nonuniform B-spline curve

### 3. B-스플라인 곡선의 생성

B-스플라인 곡선 생성에 있어 주요하게 고려되어야 할 것은 각 노트벡터 배열에 대한 형상 변수들을 재정의하는 것이다. 즉, 노트벡터의 배열이 uniform과 nonuniform인 경우에서 곡선 매개변수 t의 구간의 시작과 끝의 값이 달라져야 한다. Fig. 3의 nonuniform B-스플라인 곡선 루틴에서 내부 매개변수 t의 값은 절대값 0에서 1까지로 고정된다. 하지만 uniform B-스플라인으로 표현하고자 한다면 매개변수 구간값은 최소 계수값과 최대 제어점 수의 범위로 되어야 한다.

다음의 루틴은 2차원 평면의 경우이나 3차원 공간에서도 동일한 결과를 나타낸다.

```

procedure b_spline_curve()
  var i, k, p0, p1, p2, s, t, x, y, v: real;
begin
  draw_polygon;
  for t:=0 to 1 do
    for i:=0 to n do
      x = x + Control_points
        * basisfunction(i,k,t);
      y = y + Control_points
        * basisfunction(i,k,t);
    next i
    if starting point
      move2d(devices,x,y);
    else
      draw2d(devices,x,y);
  end;
end;

```

```

end if
next t
end;

function draw_polygon(var Control_points: real)
  var i: real;
begin
  for i:=0 to n do
    if starting point
      move2d(devices, Control_points);
    else
      draw2d(devices, Control_points);
    end if
  next i
end;

```

Fig. 3 A Routine for drawing of nonuniform B-spline curve

Fig. 4는 Fig. 3의 루틴을 사용하여 평면상에서 구현한 B-스플라인의 예를 보인 것이다. 곡선은 5개의 제어점을 가지면서 다음의 nonuniform 노트벡터로 구성된다.

deg = 2, n = 5 knot vector [ 0 0 0 0.3 0.8 1 1 1 ]

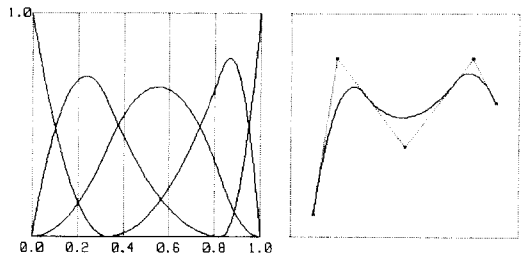


Fig. 4 The B-spline curve with nonuniform knot vectors

### 4. B-스플라인 곡면의 생성

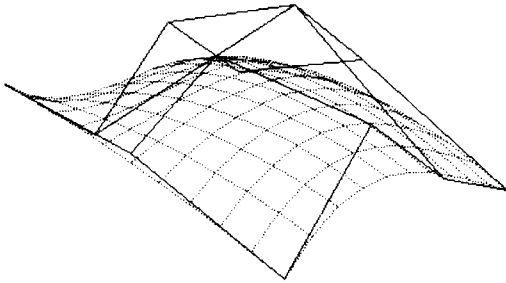
곡면의 경우는 형상 내부에서 u방향과 v방향의 노트벡터를 고려해야 한다. 식(3)은 일반적인 B-스플라인 곡면을 나타낸다. 식에서 각 혼합함수는 곡선의 경우와 형식과 매개변수 범위가 동일하다.

$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} P_{ij} M_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \quad (3)$$

형상 변화를 예측하기 위한 분석에서 곡면의 경우, 네 모서리 부분은 곡선과 동일한

형상 변화의 예측이 가능하나 내부는 노트벡터 간의 상호간섭으로 예측이 매우 어렵다. 곡면의 출력루틴은 곡선의 경우보다 복잡하며, 특히 노트벡터간의 관계를 정확히 분석해야 한다.<sup>1</sup>

Fig. 5는 4 X 3개 제어점 배열을 가지는 nonuniform B-스플라인 곡면의 경우이다. 본 연구의 실제 프로그램에서는 형상처리의 속도향상을 위해 그래픽 하드웨어가 제공하는 더블 버퍼를 사용하였다.



**Fig. 5 The B-spline surface with nonuniform knot vectors**

B-스플라인 곡면은 모든 매개변수에 대하여 각각 u방향과 v방향의 상호관계로 처리된다. 그리고 곡선의 경우와 마찬가지로 각 방향에서의 노트벡터의 배열에 따라 매개변수의 범위도 변환된다. 곡면 형상구성에서는 곡면 매개변수와 제어점 수에 대한 루틴상의 매개변수의 순서 지정에 주의해야 한다. Fig.6은 곡면에 대한 생성 루틴을 나타낸다.

```

procedure b_spline_surface(var Control_points,
UKnot_points, VKnot_points:real)
  var i, j, ku, kv, tu, tv, x, y, z, v, w: real;
      U, u - remark characters for u-direction
      V, v - remark characters for v-direction
begin
  v : basisfunction of Uknot_points;
  w : basisfunction of Vknot_points;
  for tu:=0 to 1 do
    for tv:=0 to 1 do
      for i:=0 to nu do

```

```

        for j:=0 to nv do
          x = x + Control_points
            * v * w;
          y = y + Control_points
            * v * w;
          z = z + Control_points
            * v * w;
        next j
      next i
    if starting point
      move3d(devices.x,y,z);
    else
      draw3d(devices.x,y,z);
    end if
  next tv
next tu
end;

for tv:=0 to 1 do
  for tu:=0 to 1 do
    for j:= 0 to nv do
      for i:=0 to nu do
        x = x + Control_points
          * v * w;
        y = y + Control_points
          * v * w;
        z = z + Control_points
          * v * w;
      next i
    next j
    if starting point
      move3d(devices.x,y,z);
    else
      draw3d(devices.x,y,z);
    end if
  next tu
next tv
end;

```

**Fig. 6 The routines for displaying nonuniform B-spline surface**

또한 곡면처리에서 제어네트를 처리하기 위한 루틴을 함께 구성하였다. 형상 수정에서 사용자는 일반적으로 제어네트의 각 제어점으로 형상을 제어하게 된다.

```

function draw_controlnet(var u, v:real)
  var nu, nv: real;
begin
  for nv:=0 to v do
    move3d(devices, Control_points);
    for nu:=1 to u do
      draw3d(devices, Control_points);
    next nu
  next nv
  for nu:=0 to u do

```

```

move3d(devices, Control_points);
for nv:=1 to v do
    draw3d(devices, Control_points);
next nv
next nu
end;

```

## 5. 결론

본 연구에서는 기하 라이브러리를 구성하는데 있어 기본이 되는 B-스플라인 곡선과 곡면을 구성하기 위한 알고리즘을 구현하였다. 특히 형상 구현에서 노트벡터의 사용을 임의 차수 및 제어점 갯수에 대하여 적용이 가능하도록 하였다. 이상을 다음과 정리할 수 있다.

1. B-스플라인 형상의 구현에 있어 혼합합수를 원리대로 적용함으로써, 형상의 내부 변수를 사용자가 제어 가능하도록 하였다.

2. B-스플라인 형상 구현에서 nonuniform 노트벡터의 임의 배열에 대한 형상의 차수 및 제어점 수에 대한 제약없이 사용하게 하였다.

3. 생성된 B-스플라인 형상체는 기존 기하 라이브러리와 상호 공유가 가능하도록 구성하였다.

본 연구와 더불어 B-스플라인 곡선과 곡면 생성에 rational 표현과 생성속도 증진의 개선이 필요하다고 생각된다.

## References

1. Hewlett-Packard Company, "Starbase Graphics Techniques. Chapter 14 Splines", 1991

2. Maurie G. Cox, "Algorithms for Spline Curves and Surfaces", Fundamental of Computer-Aided Geometric Modeling, pp. 51 - 76, Academic Press, 1993( UK)

3. 정재현, 김희중, "B-스플라인 노트벡터 값 변화에 의한 곡선 형상 변화 예측", '95년도 한국정밀공학회 추계학술대회 논문집, pp. 866 - 871, 1995

4. 정재현, 김희중 "B-스플라인 설계 시스템의 자유 형상 변형 예측에 관한 연구", '96년도 한국박용기관학회 춘계학술강연회 초록집, pp. 77 - 82, 1996