

Fourier 變換을 利用한 微小 幾何 特徵 消去

이 용 구, 이 건 우
서울대학교 기계설계학과

초록 (Abstract)

기계 부품 용력 해석 시 널리 쓰이는 유한 요소 해법은 형상을 작은 유한 요소로 근사화 하는 과정이 필요하다. 유한 요소 생성의 자동화는 많은 기존 연구가 있었고 산업 현장에서도 실질적인 자동 유한 요소 생성의 혜택을 받고 있다. 이러한 자동 유한 요소 생성 알고리즘들은 형상을 충실하게 유한 요소로 근사화 하는데 그 목적이 있다. 때로는 이러한 충실성이 너무 많은 유한 요소들을 관심 영역이 아닌 곳에 생성하게 된다. 컴퓨터의 계산 능력이 눈부시게 발전하고 있지만 기술자가 다루고자 하는 기술적인 문제가 나날이 복잡해지고 있는 상황에서 컴퓨터의 계산 능력에 너무 의존하는 것은 바람직하지 않다. 본 논문에서는 주어진 기하 형상에서 Fourier 변환을 이용하여 사람의 지능과 유사하게 미소 특징을 추출하고 이를 바탕으로 기하 형상에서 미소 특징을 소거하는 알고리즘을 소개 한다. 이를 활용하면 유한 요소의 수를 해석 결과에 악 영향을 미치지 않는 상태에서 줄일 수 있으며, 결과적으로 불필요한 계산 비용을 절감할 수 있다.

1. 소개

인간은 복잡한 형상을 전체적인 형상과 미소 특징으로 구분할 수 있는 지능이 있다. 이러한 판단의 근간은 특징들을 크기 별로 구분 할 수 있는 점에 있다. 여기서 크기란 2차원에서는 면적이고 3차원에서는 부피다. 미소 특징을 소거한 형상에서 유한 요소를 생성하면 해석 결과에 악 영향을 미치지 않는 조건을 만족하면서 유한 요소의 수를 줄일 수 있으며, 결과적으로 불필요한 계산 비용을 절감할 수 있다. 이런 필요 때문에 다음과 같은 관련 연구들이 있었다.

2. 관련 연구

Shephard[2]는 미소 특징을 직접 소거하지 말고 단지 표기만 해두고 차후 자동 유한 요소 생성 단계에서 이 것들을 고려하지 않은 상태에서 유한 요소를 생성하는 방법의 가능성에 대해서 언급하고 있다. 그는 이렇게 해야 만이 미소 특징에 경계 조건이 부과되더라도 이 조건을 해석 시 적용할 수 있을 것이라고 설명한다. 이러한 자동 유한 요소 생성 방법이 기존 프로그램들을 그다지 수정하지 않고도 구현할 수 있다고 그는 주장했다.

또한 [3,4] 에서 Shephard 는 유한 요소 생성 도구는 형상의 미소 특징을 적절히 사용자의 요구대로 소거할 수 있는 형상 모델링 작용자 (geometric modeling operator) 를 제공해야 한다고 했다. 그는 또한 해석 시 불필요한 내부 구멍을 찾아내는 방법을 언급했다. 일단 외곽 형상은 해석적인 헤가 존재하는 것만

으로 제한하여 다음과 같은 단계를 거친다. 첫째, 크기가 작은 후보 구멍들을 선정한 후 이들을 없앤 상태에서 용력 해석을 한다. 둘째, 후보 구멍들의 용력을 구멍이 위치한 곳에서 계산된 용력 값에 용력 집중 계수를 곱해서 알아낸 후, 그 값이 위험할 정도로 크다면, 해당 후보 구멍을 포함한 상태에서 유한 요소를 생성하고 다시 해석을 한다.

Finnigan [5] 은 미소 특징 을 소거한 상태에서 유한 요소를 생성하면 계산상으로 이득을 볼 수 있을 것이라고 언급했다. 그는 경험적인 방법이 필요할 것이라고 예견했고 일단 사용자가 원하는 특징을 소거할 수 있는 환경이 제공되어야 한다고 주장했다. 추후 어떤 기하 추론 방법을 쓰는 방식의 개발 필요성을 역설했다.

Dabke [6] 는 전문가 시스템을 사용해서 미소 특징을 소거하는 방법을 제시했다. 구축된 규칙을 사용해서 주어진 형상중 미소 특징을 구분해내는 방법을 제시했다. 이 방법은 특징 판별 (Feature recognition)에 좌우되는데 그 적용의 제약성에 대해서 그들은 인정하고 있다.

Armstrong [7] 은 중립축변환(Medial Axis Transformation) 을 사용해서 2D 외곽 모서리와 내부 루프(loop)에 대한 계수를 정의했다. 이 계수는 특징의 미소 정도를 정량화 하는 값으로서 적절한 한계치를 설정하면 미소 특징 들을 추출 할 수 있다. 여기서 중립 축이란 물체 내부에 두 점 (3차원에서는 세 점) 이상 내접하는 원 (3차원에서는 구) 의 중심의 궤적이다. 각 모서리 단위로 모서리의 길이와 이 것에 접하는 원(바로 중립축에 원의 중심을 둔) 들의 "평균" 반경의 비를 계산해 보면, 미소 특징에 해당하는 부분이 상대적으로 작은 값을 알 수 있고 따라서 어떤 한계치를 기준으로 이들을 추출 할 수 있다. 내부 루프(loop)에 대해서는 약간 다른 계수를 사용한다. 즉 내부 루프(loop) 를 둘러 싸고 있는 중립축의 길이와 그 것을 중심으로 한 원들의 반경의 평균 치의 비로서 계수를 정의 한다. 이런 계산 방법을 쓰면, 작은 구멍들은 상대적으로 작은 계수 값을 표기하고 있음을 알 수 있다.

오수익 과 윤성만 [8] 은 Fourier 변환을 사용해서 단조 금형을 자동 설계하는 방법에 대해서 발표했다. 단조 금형이란 금속을 원재 형상으로부터 여러 단계로 소성 변형하여 원하는 최종 형상을 얻어내는데 필요한 것이다. 특히 이 금형은 완만한 면을 가져야 하는데 저자는 이것을 구하는 방법으로서 최종 형상을 Fourier 함수로 나타내고 이 것의 고 주파 영역을 소거한 후 역 Fourier 변환으로 금형의 형상을 구하는 것에 대해서 설명하고 있다. 이 방법은 형상의 경계가 함수로 표현 가능하여야 한다는 제약이 있다.

이상의 연구 동향을 종합해보면 미소 특징 소거를 기하 추론 (geometric reasoning) 에 의거해서 수행한 연구는 [7]의 연구 밖에 알려진 것이 없다고 할 수 있다. 본 논문에서는 오수익 과 윤성만 [8] 의 고주파 소거 방법을 임의의 형상에 적용 가능 하도록 확장함과 동시에 이를 이용하여 미소 기하 특징을 판별하는 방법을 제시한다.

3. 알고리즘

2D 또는 3D 에서 임의의 형상을 Fourier 기저 함수(basis)로 나타내는 방법을 제시한다. 이러한 형상에서 고주파 영역을 소거하면 미소 기하 특징이 사라짐을 보이고 이를 바탕으로 미소 기하 경계 요소 (geometric boundary element) 를 추론하는 방법을 제시한다. 마지막으로 2D 에로서 그 타당성을 검증해 본다.

3.1 수학적 배경

오브젝트 영역(object domain) 에서 정의한 함수 $h(x, y, z)$ 의 주파수 영역에 대응하는 함수 $H(u, v, w)$ 는 Fourier 변환을 이용하여 다음 식으로 표현한다.

$$H(u, v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) e^{-2\pi i(ux+vy+wz)} dx dy dz \quad (1)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$. 역 Fourier 변환은 다음 식과 같다.

$$h(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v, w) e^{2\pi i(ux+vy+wz)} du dv dw \quad (2)$$

본 연구에서는 대상 삼차원 입체의 형상을 Eq. (3) 의 $h(x, y, z)$ 로 표현하고 이의 Fourier 변환을 이용하여 형상을 단순화하고자 한다. 여기서 T_0 는 상수로서 형상과 그것을 둘러싼 공간의 경계를 결정하는 인자이다.

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &\geq T_0, \text{ When } (x, y, z) \text{ is inside the volume} \\ h(x, y, z) &< T_0, \text{ When } (x, y, z) \text{ is outside the volume} \end{aligned} \quad (3)$$

식 Eq. (1) 의 Fourier 변환을 다음 식으로 근사화 할 수 있다.

$$H(u, v, w) \approx \int_{\frac{-T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} \int_{\frac{-T_y}{2}}^{\frac{T_y}{2}} \int_{\frac{-T_z}{2}}^{\frac{T_z}{2}} h(x, y, z) e^{-2\pi i(ux+vy+wz)} dx dy dz \quad (4)$$

여기서 $T_x L, T_y M, T_z N$ 는 충분히 큰 수 이다.

한편 Fourier 변환은 컴퓨터로 계산을 하기 위해 다음과 같은 DFT 식으로 근사화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} H\left(\frac{l}{L}, \frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) &\approx T_x T_y T_z \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{N-1} g(p, q, r) e^{-2\pi i\left(\frac{pl}{L} + \frac{qm}{M} + \frac{rn}{N}\right)} \\ p &= 0, 1, \dots, L-1 & l &= 0, 1, \dots, L-1 \\ q &= 0, 1, \dots, M-1 & m &= 0, 1, \dots, M-1 \\ r &= 0, 1, \dots, N-1 & n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 함수 $g(x, y, z)$ 는 Table 1 에 표시되어 있다.

$g(x, y, z) =$	
$0 \leq x < \frac{LT_x}{2}, 0 \leq y < \frac{MT_y}{2}, 0 \leq z < \frac{NT_z}{2}$	$h(x, y, z)$
$a=0$ ($0 \leq x < \frac{LT_x}{2}$) or 1 ($\frac{LT_x}{2} \leq x < LT_x$) $b=0$ ($0 \leq y < \frac{MT_y}{2}$) or 1 ($\frac{MT_y}{2} \leq y < MT_y$) $c=0$ ($0 \leq z < \frac{NT_z}{2}$) or 1 ($\frac{NT_z}{2} \leq z < NT_z$)	$\left[\begin{aligned} &M \left((1-a)x + a \frac{LT_x}{2} - (1-b)y + b \frac{MT_y}{2} - (1-c)z + c \frac{NT_z}{2} \right) \\ &M \left(-a \frac{LT_x}{2} - b \frac{MT_y}{2} - c \frac{NT_z}{2} \right) \end{aligned} \right] / Z$
$a=0$ ($0 \leq x < \frac{LT_x}{2}$) or 1 ($\frac{LT_x}{2} < x \leq LT_x$) $b=0$ ($0 \leq y < \frac{MT_y}{2}$) or 1 ($\frac{MT_y}{2} < y \leq MT_y$) $c=0$ ($0 \leq z < \frac{NT_z}{2}$) or 1 ($\frac{NT_z}{2} < z \leq NT_z$)	$h(x - aLT_x, y - bMT_y, z - cNT_z)$

Table 1.

식 Eq. (5) 는 함수 $h(x, y, z)$ 를 x, y, z 방향으로 T_x, T_y, T_z 의 주기로 sampling 한 것이고, 그 결과식은 $g(p, q, r)$ 이다. 이 이산 (discrete) 함수를 이용해서 다음 식 Eq. (6) 을 유도한다. 이것을 DFT (Discrete Fourier Transformation) 라고 하며 이 것을 빠르게 계산하는 알고리즘을 FFT (Fast Fourier Transformation) 라 한다.

$$\begin{aligned} G\left(\frac{l}{L}, \frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) &= \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{N-1} g(p, q, r) e^{-2\pi i\left(\frac{pl}{L} + \frac{qm}{M} + \frac{rn}{N}\right)} \\ p &= 0, 1, \dots, L-1 & l &= 0, 1, \dots, L-1 \\ q &= 0, 1, \dots, M-1 & m &= 0, 1, \dots, M-1 \\ r &= 0, 1, \dots, N-1 & n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6)$$

역 DFT 는 Eq. (7) 과 같다.

$$\begin{aligned} g(p, q, r) &= \frac{1}{LMN} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{l}{L}, \frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) e^{2\pi i\left(\frac{pl}{L} + \frac{qm}{M} + \frac{rn}{N}\right)} \\ p &= 0, 1, \dots, L-1 & l &= 0, 1, \dots, L-1 \\ q &= 0, 1, \dots, M-1 & m &= 0, 1, \dots, M-1 \\ r &= 0, 1, \dots, N-1 & n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (7)$$

DFT 는 디지털 시그널 프로세싱(Digital Signal Processing)에서 많이 쓰이는 계산 방법으로서 [1] 에서 그 내용 및 여러 응용 분야에 대해서 자세히 설명하고 있다. 이상 설명한 DFT 를 이용 형상을 Fourier 기저함수(basis)로 표현한후 고주파 영역을 소거해서 미소특징을 찾는 방법을 2D 예를 통해서 알아 본다.

3.2 2-D 예

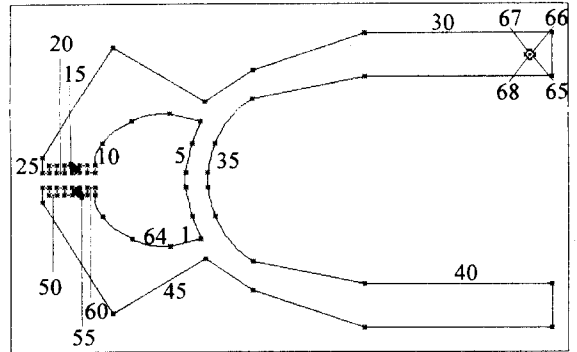


Fig. 1: Input geomtry

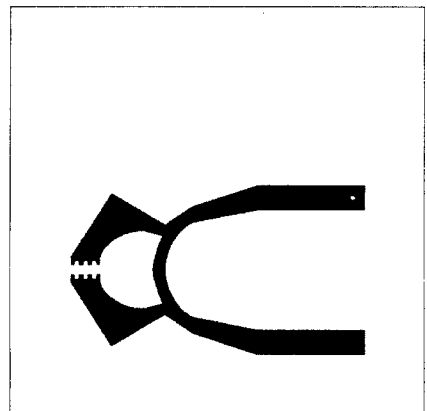


Fig. 2: Object domain

일단 DFT 를 적용하기 위해서 디지털이징이 필요하다. 그래서 Fig.1 의 집계를 512x512 의 격자 점으로 추출했다. 각 격자 점을 화소로 색을 칠한 그림이 Fig. 2 와 같다. 이 그림에서 검은 색의 화소들이 Eq. (3)을 만족하는 점들이고 흰색의 화소들이 빈 공간이다. 검은 화소들은 해당하는 격자점의 값, 즉 $h(x, y)$ 를 1.0 으로 설정했으며, 흰 화소들은 해당하는 격자점의 값, 즉 $h(x, y)$ 를 -1.0 으로 설정했다. 값이 -1.0 에서 1.0 으로 변화하는 곳이 형상의 경계이고 Eq. (3) 에서

$T_0 = 0.0$ 으로 한다. Fig. 2 를 Fourier 변환한 주파수 영역에 해당하는 그림을 Fig. 3 에서 도시하고 있다. 이 그림은 일반적으로 복소수인 주파수 영역 가운데 실수만 나타내고 있는데 허수 부분에 해당하는 그림도 거의 유사한 값 분포를 나타낸다. 이 그림에서 저주파 영역 (Fig. 3 의 중심 부분) 의 값은 작고, 고주파 영역 (Fig. 3 의 네 귀퉁이에 해당) 에서 값이 큰 폭으로 변화하고 있다는 것을 알 수 있다. 만일 저주파 영역을 남기고 고주파 영역의 값들을 소거한다면 실제 그 곳의 값이 그다지 큰 값이 아니므로 전체적인 형상은 유지할 것이라는 것을 예측할 수 있다. 이러한 가정을 실험하기 위해 Fig. 4 와 같이 저주파 영역을 남기고 고주파 영역을 소거했다. 예제에서는 두 영역을 구분하는 주파수 값 (θ : Cut off frequency) 을 $\frac{80}{512} \pi$ 로 사용했다. 주파수 영역인 Fig. 4 의 오브젝트 (Object) 영역을 역 Fourier 변환해서 Fig. 5 를 구한다. Fig. 5 에서 검은 부분은 $T_0 = 0.0$ 보다 값이 큰 부분이고 흰부분은 $T_0 = 0.0$ 보다 값이 작은 부분이다. 여기서 손잡이 부분이 작은 구멍이 채워졌고 이빨 부분도 평균적으로 무디어진 것을 알 수 있다. 일반적으로 고주파 영역을 소거하면 경계에서 각이 큰 부분이 완만하게 된다. 이러한 성질 때문에 전체 경계의 모든 각진 부분이 완만하게 변화했음을 그림에서 알 수 있다. 이것은 바람직하지 않으므로 부가적인 방법이 필요하다. Fig. 6 은 고주파 영역이 소거된 오브젝트 영역의 값 분포 중 각 모서리 단위로 그

것과 겹쳐있는 화소 값들의 평균치와 $T_0 = 0.0$ 와의 차이를 표시했다. 횡축은 각 모서리의 아이디(Edge ID)이고 종축은 해당하는 차이 값이다. 해당 아이디(ID)는 Fig. 1 에 표기되어 있다. 아이디(ID)들은 루프(loop)에서 시계방향으로 번호가 매겨져 있다. 여기서 알 수 있는 것은 전체적인 값 분포는 $T_0 = 0.0$ 근방이라는 것이다. 만일 각 모서리 단위로 구성 화소의 평균치를 구한 후 $T_0 = 0.0$ 에 대한 편차를 구해서 그 값이 시스템을 정한 공차 값보다 작다면 해당 모서리는 변화한 형상 (미소 특징이 소거된 형상) 의 경계의 일부가 된다고 할 수 있다. 여기서 발생하는 문제는 이빨 부분 중 y 축 방향과 평행한 모서리들은 그들의 평균치(mean value)가 $T_0 = 0.0$ 와 비교해서 편차가 작으므로 마치 경계가 되는 것처럼 오판을 할 수 있는 점이다. 모서리 구성 화소들의 각각이 갖는 절대 편차의 평균값 (Average absolute deviation from the mean value)을 계산해 보면 전술한 모서리들의 계산 값은 매우 큼을 확인할 수 있었다. 이 사항은 Fig. 7 과 같다. 이는 해당 모서리들이 고주파가 소거된 오브젝트(object) 영역에서 등고선의 기울기 (gradient) 방향으로 있다는 의미가 된다. 따라서 미소 특징에 해당하는 모서리 즉 제거되어야 할 모서리들은 전술한 두 가지 조건으로 판별한다. 즉 다음 식을 만족하는 모서리(삼차원에서는 면)는 미소 특징이 되지 않는다.

$$\bar{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (8)$$

N : Number of {pixels/voxels} composing {an edge/a face}
 ρ_i : Value of {pixel/voxel} / composing {an edge/a face}
 $\bar{\rho}$: The mean value of $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N\}$
 δ : Tolerance of the mean value deviation from T_0
 σ : Tolerance of the average absolute deviation from the mean value

$$\left| T_0 - \bar{\rho} \right| < \delta$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N |\rho_i - \bar{\rho}|}{N} < \sigma$$

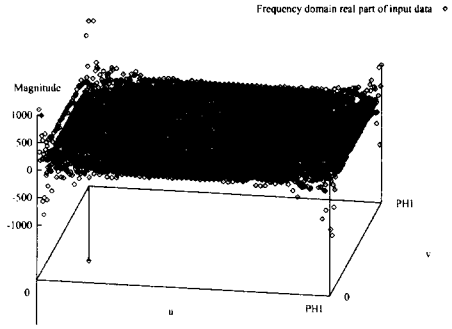


Fig. 3: Frequency domain

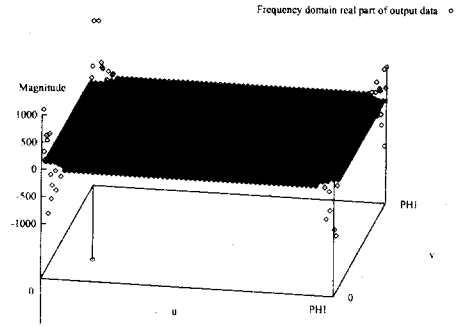


Fig. 4: Filtered frequency domain

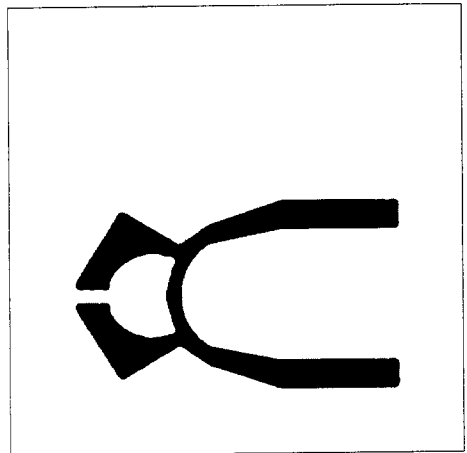


Fig. 5: Filtered object domain

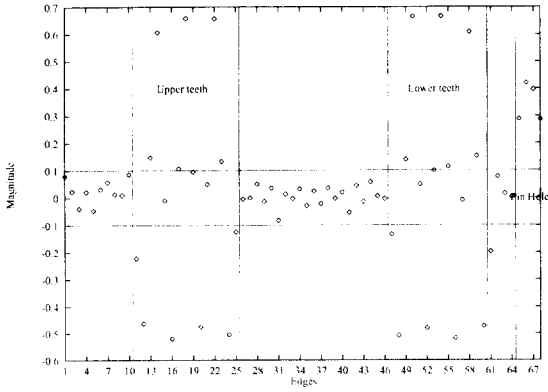


Fig. 6: Mean value deviation from T_0

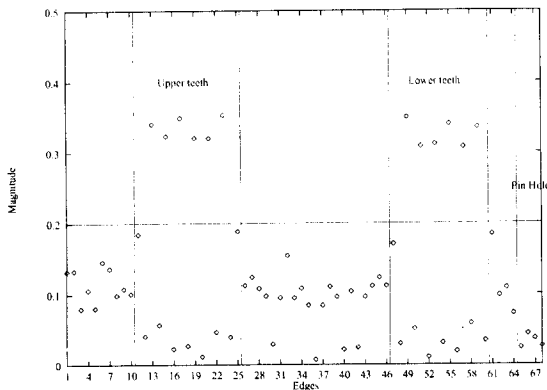


Fig. 7: Average absolute deviation from the mean value

θ (Cut off frequency)	$\frac{80}{512} \pi$
T_0 (Discriminating value between void and volume)	0.0
δ (Tolerance of the mean value deviation from T_0)	0.1
σ (Tolerance of the average absolute deviation from the mean value)	0.2

Table 2

Table 2 의 값들을 사용하여 각 모서리들을 판별 한 후 소거한 결과가 Fig. 8 에 나타나 있다. 작은 구멍과 이빨 부분의 모서리들이 미소 특징으로 판별 되었다. 수정한 경계에 삼각 유한 요소를 생성한 결과가 Fig. 9 에 있다.

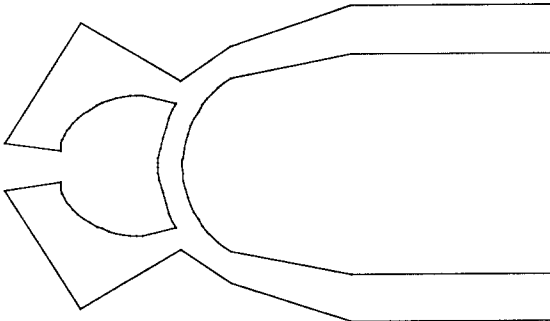


Fig. 8: Detail removed geometry

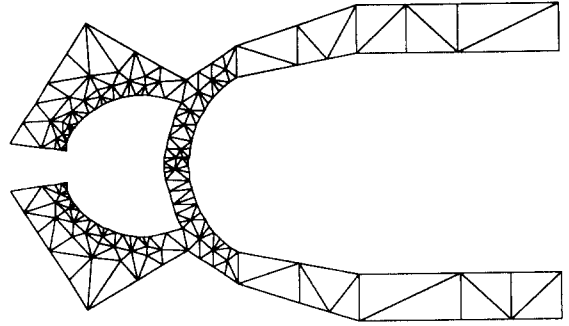


Fig. 9: Triangular mesh generation on the detail removed geometry

4. 결론

4.1 유한 요소 수 감소와 특징의 정량화

본 논문의 방법을 활용한다면 유한 요소 해석 계산 시간을 단축 할 수 있다. 즉, 필요하지 않은 유한요소의 생성을 최대한 억제하여 컴퓨터의 자원을 효율적으로 활용할 수 있다.

특징 (Feature) 이란 지금까지 기능에 따라 사용자가 입력하거나 주변 위상 요소들과의 관계에서 단순 특징들을 특정한 규칙에 의해 추론하는 방법뿐이었다. 특징을 어떤 양에 따라 구분할 수 있는 방법은 그다지 알려진 바가 없다. 본 논문은 특징을 크기에 따른 양으로 정량화 하는 방법을 제시했다.

4.2 향후 연구 과제

이상의 방법을 3 차원에서 적용하려면 부피를 디지털화 (digitizing) 하는 기술, 특히 방대한 data 를 다루는데 따른 컴퓨터 자원의 효율적인 사용 방법이 제시되어야 한다. 2 차원에서는 미소 특징으로 판별된 모서리들을 소거하면서 새로운 경계를 구성하는 것이 쉬웠으나 3 차원에서는 면들이 소거되므로 경계 구조가 삭제된 면 때문에 손상되게 된다. 이러한 삭제된 면을 새로운 면들로 재구성 하는 방법은 3 차원인 만큼 그다지 쉽지가 않을 것으로 예상된다.

5. 참고문헌

- [1] E. Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform and Its Applications," 1988 Prentice Hall, Inc.
- [2] Mark S. Shephard, "Geometrical modeling of finite element modeling," Geometric Modeling for CAD Applications, Elsevier Science Publishers B.V., 1988
- [3] Mark S. Shephard et al., "Framework for the reliable generation and control of analysis idealizations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 82 (1990) pp. 257-280
- [4] Mark S. Shephard et al., "A Modeling Framework for Controlling Structural Idealizations in Engineering Design," Computers & Structures (1990), Vol. 37, No. 2, pp. 181-191
- [5] P.M. Finnigan, A. Kela, and J.E. Davis, "Geometry as a basis for finite element automation," Engineering with Computers 5 (1989) pp. 147-160
- [6] Padmanabh Dabke, Vallury Prabhakar, Sheri Sheppard, "Using Features to Support Finite Element Idealizations," Stanford University, CDR technical report Feb-21-1994
- [7] C.G. Armstrong et al., "Medials for meshing and more," 4th Annual International Meshing Roundtable, October 16-17, 1995, Albuquerque, New Mexico. Sponsored by Sandia National Laboratories
- [8] S.I. Oh, S. M. Yoon, "A New Method to Design Blockers," Annals of the CIRP, Vol. 43 No. 1, 1994