

# 두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 well-conditioned 이산관측기의 설계

곽 병길\*, 허 건수\*\*

\* 삼성 항공 정밀기기연구소 연구원

\*\* 정회원 : 한양대학교 정밀기계공학과

## ABSTRACT

The well-conditioned observer design method is extended for two-output systems where observer gains are not determined uniquely with respect to the desired observer poles. Similar to the previous results, this design method makes off-diagonal elements of the observer upper-left submatrix skew-symmetric and simultaneously, places the eigenvalues of the observer matrix widely separated by selecting upper two rows of the observer gain. The proposed design method is evaluated in a spindle-drive example where the load speed is estimated based on motor speed and the armature current.

Key Words: Well-conditioned observer(well-conditioned 관측기), Main index(주지표), Root-locus(근계적법), two-output(이중 출력)

## 1. 서론

확정적 관측기(Deterministic state observer)<sup>(1)</sup>와 칼만필터(Stochastic state observer)<sup>(2)</sup>가 소개된 후 관측기의 이론과 응용에 대한 많은 연구가 수행되어 왔다. 이 관측기는 상태피드백 제어(state feedback control)에서 필요한 상태변수를 추정하는 데 이용되거나 기계감지(machine monitoring)시스템에 이용되고 있다. 특히 확정적 관측기(Deterministic observer)를 기초로 한 기계감지 시스템은 학문적으로는 많은 발전이 있었지만 과도상태와 정상상태에서 큰 오차가 발생할 수 있고 또 이로 인하여 잘못된 경보를 발생시키거나 시스템을 꺼지게 하기 때문에 실제 산업 현장에서는 널리 사용되지 않고 있다. 이러한 ill-conditioned 성능이 나타나는 원인으로는 상태 추정 속도조건을 만족하는 범위내에서 대표극점을 결정하고 나머지 극점들을 임의로 배치한 후 그 배치된 극점을 갖도록 관측기의 게인을 결정하는 관측기의 설계 방법에서 기인한다. 이러한 방법으로 설계된 관측기는 미지의 초기 상태추정값, 모델식의 파라미터 변화, 라운드 오프 오차, 센싱오차와 같은 ill-conditioning 요소들을 설계단계에서 고려하지 않기 때문에 이 요소들에 대해 매우 민감할 수 있다(Huh and Stein)<sup>(3)</sup>.

따라서 관측기설계에 있어서 플랜트의 섭동에 강인한 관측기 설계방법에 대한 많은 연구가 수행되었다. Thau and Kestenbaum<sup>(4)</sup>은 모델링오차가 관측기에 미치는 영향에 대해 다루었고 Battacharyya<sup>(5)</sup>은 플랜트의 섭동에 대한 조건들하에 Luenberger 관측기에 피드백 구조를 부가하여 강인한 관측기를 설계하였고, Galimidi and Barmish<sup>(6)</sup>는 플랜트의 섭동에 대한 조건하에서 Lyapunv 함수를 이용하여 추정오차의 수렴과 안정성을 검증하였다. 그리고 Shafai and Carroll<sup>(7)</sup>은 카노니컬 형태의 모델로부터 적분게인을 관측기에 부가하면 임의의 설계자유도가 생기게 되는데 이를 이용하여 플랜트의 섭동을 포함하는 파라미터변화에 덜 민감한 관측기를 설계하였다. 그러나 위의 연구들은 플랜트의 섭동이 특정한 구조를

갖는다는 가정하에 가능하므로 이러한 조건을 보장하기 어려운 실제 현장에는 적용되기가 쉽지 않다.

이러한 점을 개선하기 위하여 연속시간영역에서 Huh and Stein<sup>(8)</sup>은 관측기의 정상상태뿐 아니라 과도상태의 성능을 정량화하는 성능지표를 구하여 이 성능지표를 최소화함으로써 어떤 플랜트의 섭동이나 다른 ill-conditioning 요소들에도 민감하지 않은 강인한 관측기를 설계하였다. 그리고 이 관측기는 이산영역에서도 유도되었으며<sup>(9)</sup> 제약조건이 있다면 단일 출력의 경우에만 설계절차가 개발되어 온 것이다.

본 논문은 위 두 논문<sup>(8),(9)</sup>의 연장으로서 두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 well-conditioned 관측기의 설계방법을 제시하고 있으며 본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 well-conditioned 이산관측기의 기본적인 설계방법을 간단히 요약하였다. 제 3장에서는 두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 well-conditioned 관측기의 설계방법을 제시하고 있으며 제 4장에서는 spindle-drive의 예제를 통해 그 성능을 검증하겠다.

## 2. Well-conditioned 관측기의 고찰

이 절에서는 위 세 논문<sup>(3),(8),(9)</sup>의 내용을 간단히 요약한다. 먼저 ill-conditioning 요소들이 과도상태와 정상상태에서 관측기의 성능에 미치는 민감도를 정량적으로 나타낸 것을 성능지표라고 정의하고 그 내용은 Table 1과 같다.

여기서  $k_2(\Phi - LH - I)$ 는  $L_2$  노름으로 정의되는 행렬  $(\Phi - LH - I)$ 의 condition number 이고,  $k_1(P)$ 는  $L_1$  노름에 의한 고유벡터행렬  $P$ 의 condition number 이다. 그리고  $q_1^T p_1$ 은 대표극점에 대응되는 우측고유벡터와 좌측고유벡터의 내적이다.

이상의 성능지표들을 종합하기위해 활용된 것은 이들 성능지표들이 다음식에 의해 주지표,  $k_2(P)$ 와 연관

Table 1. Performance index of the discrete-time observer

성능 평가 요소	성능 지표
초기 추정상태값에 대한 과도상태 추정오차형상의 감도	$k_2(\Phi - LH - I)$
과도상태의 최대오차크기와 과도상태의 적분오차	$k_1(P)$
라운드 오프 오차에 대한 고유값 감도	$\frac{1}{ q_1^T p_1 }$
플랜트 섭동과 입력력 센싱편차에 대한 정상상태의 정확도 강인성	$k_2(\Phi - LH - I)$

되어지는 것이다.<sup>(9)</sup> 이 때  $k_2(P)$ 는 관측기 행렬의 고유벡터행렬  $P$ 의  $L_2$ 노름에 근거한 condition number 이다. 주지표의 값이 크면 ill-conditioning 요소들의 변화에 따라 설계시 원하던 성능을 나타내지 못할 수 있음을 의미한다.

$$k_1(P) \leq nk_2(P)$$

$$\frac{1}{|q_1^T p_1|} \leq k_2(P) \quad (1)$$

$$k_2(\Phi - LH - I) \leq k_2(P)^2 \frac{\max_i |\mu_i - 1|}{\min_j |\mu_j - 1|}$$

위 관계식들에 의하면,  $k_2(P)$ 를 작게함으로써 Table 1에 나열된 성능지표들이 작은 값을 갖게 되어 관측기의 ill-conditioning 요소들에 대한 민감도를 최소화시켜 강인한 성능을 갖게 할 수 있다. 예를 들면  $k_2(P)$ 는 관측기행렬이 대칭일때 최소값 1를 가진다. 그러나 관측기행렬을 대칭으로 만들지 못할 경우에  $k_2(P)$ 를 작게 만들기 위하여 관측기행렬의 비대각요소 행렬의 노름(Norm)을 작게하고 관측기의 최소극점간 거리를 크게하는 방법은 이미 발표되었다.<sup>(8)</sup> 본 연구에서 고려하는 well-conditioned 이산관측기는 2개의 출력을 갖는 시스템의 경우이며 위에서 언급되었던 것과 같은 성능지표를 최소화하기 때문에 이미 발표된 방법<sup>(8)</sup>과 유사하지만 이를 간단히 요약하면 다음과 같다.

먼저 출력이 m 개인 플랜트에 대한 모델식, 관측기행렬,  $\Phi'$ 과 관측기게인, L은 다음과 같이 표현된다.

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$\Phi'' = S^{-1}\Phi S - LC$$

$$= \begin{bmatrix} \phi''_{1,1} & \dots & \phi''_{1,m} & \phi''_{1,m+1} & \dots & \phi''_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{m,1} & \dots & \phi''_{m,m} & \phi''_{m,m+1} & \dots & \phi''_{m,n} \\ \phi''_{m+1,1} & \dots & \phi''_{m+1,m} & \phi''_{m+1,m+1} & \dots & \phi''_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{n,1} & \dots & \phi''_{n,m} & \phi''_{n,m+1} & \dots & \phi''_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi''_{11} & \Phi''_{12} \\ \Phi''_{21} & \Phi''_{22} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & \dots & l_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m,1} & \dots & l_{m,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m+1,1} & \dots & l_{m+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m \\ L_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2)$$

**STEP 1**

$\Phi''_{22}$ 의 비대각요소를 비대칭으로 만들기 위해서 스케일링 행렬  $S = \text{Diag}(1, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ 을 이용한다. 이 때의 스케일링행렬의 요소를 결정하는 관계식과 그 결과는 다음 식과 같다.

$$\left(\frac{s_i}{s_j}\right)^2 = \left| \frac{\phi_{i,j}}{\phi_{j,i}} \right|$$

for  $i, j = 2, 3, 4, 5, \dots, n$  and  $i \neq j$  (3)

$$x' = S^{-1}x, \quad \Phi' = S^{-1}\Phi S, \\ \Gamma = S^{-1}\Gamma, \quad C' = CS$$

윗 식에 의하면 대각행렬을 이용한 스케일링은 비대각요소 쌍이 둘다 0이 아닌 비대각요소 쌍의 갯수가 n보다 작을 경우에만 적용가능하다는 적용범위에 한계를 가진다. 이러한 적용범위의 한계를 벗어날 수 있는 새로운 스케일링방법은 현재 연구중이며 곧 발표할 예정이다.

**STEP 2**

$L_{n-m}$ 을 이용하여  $\Phi''_{12}$ 와  $\Phi''_{21}$ 를 비대칭관계로 만든다.

**STEP 3**

마지막으로  $L_m$ 을 이용하여 두가지 조건 즉  $\Phi''_{11}$ 의 비대각요소가 비대칭이 되도록 하고 동시에 관측기의 최소극점간 거리가 최대가 되도록 한다. 이 때 플랜트의 출력이 한개인 경우는 관측기의 최소극점간 거리를 최대로 만들기만 하면 되며 이것은 근계적법을 이용하여 만족할 수 있다. 그러나 다출력플랜트의 경우에 두가지 조건을 모두 만족하면서  $L_m$ 을 결정하는 방법은 아직 개발되지 않았으며 특히 이때 관측기의 극점배치문제는 매우 어려운 문제이다.<sup>(10)</sup> 다음 장에서는 두개의 출력을 갖는 플랜트 경우에 두가지 조건을 만족시키는 방법에 대해서 다루고 있다.

**3. 두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 Well-conditioned 이산관측기의 설계**

**3.1 두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 관측기의 설계방법**

먼저 식(2)로부터 두개의 출력을 갖는 시스템의  $\Phi, \Gamma, C$  관측기의 게인, L, 그리고 관측기의 행렬,  $\Phi''$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \phi_{1,3} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \phi_{2,3} & \cdots & \phi_{2,n} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} & \phi_{3,3} & \cdots & \phi_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \phi_{n,3} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{31} & l_{32} \\ \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_{n-2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Phi'' = \Phi' - LC' = \begin{bmatrix} \Phi''_{11} & \Phi''_{12} \\ \Phi''_{21} & \Phi''_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 출력행렬  $\Gamma$ 는 일반적인 구조로서 이러한 형태가 아닌 경우는 중복된 항을 없애는 변환법에 의해 이 형태를 만들 수 있다. 기존의 발표된 방법<sup>(6)</sup>에 의하면  $\Phi''_{22}$ 는 스케일링행렬  $S$ 를 이용하여 그리고  $\Phi''_{12}$ 와  $\Phi''_{21}$ 는  $L_{n-2}$ 를 이용하여 관측기행렬의 비대각요소가 의대칭에 가깝게 하는 것이 well-conditioned 관측기에 접근하는 것이다. 그리고  $L_2$ 를 이용하여  $\Phi''_{11}$ 의 비대각요소가 의대칭이 되도록 하고 관측기의 최소극점간 거리가 최대가 되게 하는 것이 성능지표를 작게 만드는 것이다.

본 절에서는 두개의 출력을 갖는 경우  $L_2$ 를 이용하여  $\Phi''_{11}$ 의 비대각요소가 의대칭이 되도록 하고 동시에 관측기의 최소극점간 거리가 최대가 되게 하는 방법을 제시하고 있다. 관측기의 극점은 관측기행렬,  $\Phi''$ 의 고유값이 되며 편의상  $\Phi''$ 을 다음과 같이 표현하였다.

$$\Phi'' = \begin{bmatrix} \phi'_{1,1}-1_{1,1} & \phi'_{1,2}-1_{1,2} & \phi'_{1,3} & \cdots & \phi'_{1,n} \\ \phi'_{2,1}-1_{2,1} & \phi'_{2,2}-1_{2,2} & \phi'_{2,3} & \cdots & \phi'_{2,n} \\ \phi''_{3,1} & \phi''_{3,2} & \phi''_{3,3} & \cdots & \phi''_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{n,1} & \phi''_{n,2} & \phi''_{n,3} & \cdots & \phi''_{n,n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi''_{11} & \Phi''_{12} \\ \Phi''_{21} & \Phi''_{22} \end{bmatrix}$$

위 식(7)의 고유값 결정 문제는 단일입출력시스템에 대한 출력피드백의 극점배치문제로 다음식과 같이 재구성될 수 있으며 이 때의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$z(k+1) = F_1 \cdot z(k) + G_1 u,$$

$$w = H_1 \cdot z(k) \quad (8)$$

$$u = -1_{11} w$$

$$G(z) = \frac{\det \begin{bmatrix} zI - F_1 - G_1 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}}{\det[zI - F_1]} \quad (9)$$

여기서

$$F_1 = \left( \Phi' - \begin{bmatrix} 0 & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ L_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$G_1 = [1:0 \cdots 0]^T$$

$$H_1 = [1:0 \cdots 0]$$

여기서  $L_{n-2}$ 개의 행렬은 2장에서 요약된 STEP 2에 의하여 선정이 되고  $l_{12}, l_{21}, l_{22}$ 를 이용하여 단일입출력시스템의 극점과 영점을 정하게 되면 이 정해진 극점과 영점에 따른 출력피드백 시스템의 근궤적이 그려지게 된다. 이 근궤적을 이용하여 최소극점간 거리가 최대가 되도록 식(8)의 극점을 배치할 수 있다. 이상의 설계 절차는 다음과 같이 3단계로 분류되는데 첫번째 단계는 단일입출력시스템의 영점 결정이고 두번째 단계는 단일입출력시스템의 극점 결정이며 그리고 마지막 단계는 출력피드백시스템의 극점결정이다.

### STEP 3-1 단일입출력시스템의 영점결정

식(9)에서의 영점을 구하기 위해 determinant의 관계식으로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$\det \begin{bmatrix} zI - F_1 - G_1 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det(zI - \begin{bmatrix} \phi'_{2,2}-1_{2,2} & \phi'_{2,3} & \cdots & \phi'_{2,n} \\ \phi''_{3,2} & \phi''_{3,3} & \cdots & \phi''_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{n,2} & \phi''_{n,3} & \cdots & \phi''_{n,n} \end{bmatrix}) = 0 \quad (10)$$

위식은 다시 다음과 같은 단일입출력시스템에 대한 출력피드백의 극점배치문제로 재구성할 수 있으며 따라서  $l_{22}$ 에 따른 근궤적을 그려 식(8)의 영점을 배치할 수 있다.

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} \phi'_{2,2} & \phi'_{2,3} & \cdots & \phi'_{2,n} \\ \phi''_{3,2} & \phi''_{3,3} & \cdots & \phi''_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{n,2} & \phi''_{n,3} & \cdots & \phi''_{n,n} \end{bmatrix} \cdot z(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$w_1 = [10 \cdots 0] \cdot z(k) \quad (11)$$

$$u = -1_{22} \cdot w_1$$

### STEP 3-2 단일입출력시스템의 극점결정

$\Phi''$ 의 블록 행렬인  $\Phi''_{11}$ 이 의대칭이 되어야 하므로  $l_{12}$ 와  $l_{21}$ 관계식을 하나의 변수로 유도할 수 있다. 그리고 이 변수의 변화에 따른 식(8)의 극점 궤적을 그려볼

수 있으며 앞의 **STEP 3-1**에서 결정한 영점의 위치를 참조하여 적절한 위치에 극점을 배치시킬 수 있다.

$$\det(zI - \begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} - l_{12} & \phi'_{13} & \cdots & \phi'_{1n} \\ \phi'_{21} - l_{21} & \phi''_{22} & \phi'_{23} & \cdots & \phi'_{2n} \\ \phi''_{31} & \phi''_{32} & \phi'_{33} & \cdots & \phi'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{n1} & \phi''_{n2} & \phi'_{n3} & \cdots & \phi'_{nn} \end{bmatrix}) = 0 \quad (12)$$

여기서

$$l_{12} = \phi'_{12} + \alpha$$

$$l_{21} = \phi'_{21} - \alpha$$

### STEP 3-3 출력퍼드백시스템의 극점결정 (관측기의 극점 결정)

구해진 단일입출력시스템의 영점과 극점을 바탕으로 식(8)에서  $l_{11}$ 에 따른 근궤적을 그려 원하는 settling time 내에서 최소극점간 거리가 최대가 되는 점에 관측기의 극점을 최종적으로 배치할 수 있다.

위의 설계방법에서 두번째 단계는 독립적이지 못하고 첫번째 단계에서 결정된  $l_{22}$ 의 값에 의해 영향을 받는다. 이를 다음 절의 예제를 통해 살펴보자.

## 4. 예제

본 예제에서는 허건수, 김상진<sup>9)</sup>에서 사용된 DC 스피들 드라이브 시스템에 대하여 앞에서 제안한 설계방법을 적용할 것이며 시스템의 모델식은 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.7865 & 0.1782 & 0.4079 & -0.8753 \\ -0.1336 & 0.5905 & -0.0262 & 0.1082 \\ 0.5099 & 0.0437 & -0.2697 & 2.5822 \\ 0.1094 & 0.0180 & -0.2582 & -0.4138 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.1012 \\ 0.7810 \\ 0.0121 \\ 0.0074 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위식에서  $\Phi''_{22}$ 는 스케일링행렬 S를 이용하여 그리고  $\Phi''_{12}$ 와  $\Phi''_{21}$ 는  $L_{n-2}$ 를 이용하여 비대각요소가 각각의 대칭이 되도록 하였고 이때의 관측기행렬은 다음과 같이 변환된다.

$$\Phi' = S^{-1} \cdot \Phi \cdot S$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7865 & 0.1782 & 0.4079 & -0.2768 \\ -0.1336 & 0.5905 & -0.0262 & 0.0342 \\ 0.5099 & 0.0437 & -0.2697 & 0.8165 \\ 0.3460 & 0.0569 & -0.8165 & -0.4138 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Phi' - \begin{bmatrix} 0 \\ L_{n-2} \end{bmatrix} C$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7865 & 0.1782 & 0.4079 & -0.2768 \\ -0.1336 & 0.5905 & -0.0262 & 0.0342 \\ -0.4079 & 0.0262 & -0.2697 & 0.8165 \\ 0.2768 & -0.0342 & -0.8165 & -0.4138 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서

$$L_{n-2} = \begin{bmatrix} 0.9178 & 0.0175 \\ 0.0692 & 0.0911 \end{bmatrix}$$

관측기의 극점을 구하기 위하여 위식을 식(8)과 같이 단일입출력시스템의 출력퍼드백의 극점 배치 문제로 재구성하였다.

$$z(k+1) = \left\{ \Phi - \begin{bmatrix} 0 & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ \vdots & \vdots \\ L_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} z(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (16)$$

$$w(k) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]z(k), \quad u(k) = -l_{11}w(k)$$

### STEP 3-1 단일입출력시스템의 영점결정

단일입출력시스템의 영점은 식(10)을 토대로 결정한다. 즉, 식(11)과 같이 단일입출력시스템에 대한 출력퍼드백의 극점배치문제로 재구성하여  $l_{22}$ 에 대한 영점의 근궤적은 Fig.1와 같다.

$$\det(zI - \begin{bmatrix} 0.5905 - l_{22} & -0.0262 & 0.0342 \\ 0.0262 & -0.2697 & 0.8165 \\ -0.0342 & -0.8165 & -0.4138 \end{bmatrix}) = 0 \quad (17)$$

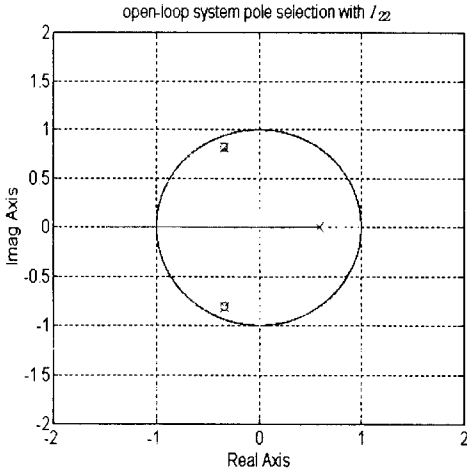


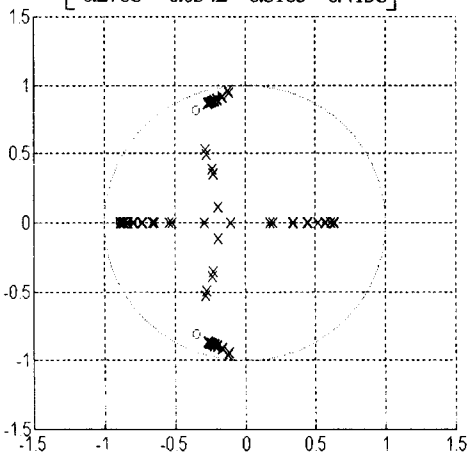
Fig.1 Root locus: Open-loop system zero selection

위 궤적에 의하면  $l_{22}$ 에 상관없이 2 개의 복소영점은 결정이 되며 실수축상에 한개의 영점만 결정하면 된다.

**STEP 3-2 단일입출력시스템의 극점결정**

단일입출력시스템의 극점은 식(12)를 이용하여 결정하는데 앞 절에서 언급된 바와 같이 STEP 3-1에서 결정된  $l_{22}$ 에 따라 궤적이 달라진다. 그러나 다음식으로부터 결정되는 극점들은 Fig.2에 나타난 바와 같이  $\alpha$ 가 변함에 따라 거의 변하지 않는 한쌍의 공액 복소근과 실수축의 한점에 모였다가 분기되어 나가는 또다른 한쌍의 복소근을 갖는다. 즉 이러한 경향은  $l_{22}$ 에 관계없이 어떤 규칙성을 띄며 STEP 3-1에서 선택된 영점과 다음 식의  $\alpha$  값에 따른 극점을 그려봄으로써 알 수 있다.

$$\det(zI - \begin{bmatrix} 0.7865 & -\alpha & 0.4079 & -0.2768 \\ \alpha & -0.8875 & -0.0262 & 0.0342 \\ -0.4079 & 0.0262 & -0.2697 & 0.8165 \\ 0.2768 & -0.0342 & -0.8165 & -0.4138 \end{bmatrix}) = 0 \quad (18)$$



0 : step 3 - 1 에서 결정된 영점 (-0.8864, -0.3423 ± j 0.8141)  
 x :  $\alpha$  값에 따른 극점 (-1 ≤  $\alpha$  ≤ 1)

Fig.2  $\alpha$  값에 따른 단일입출력시스템의 극점의 변화

이러한 경향을 바탕으로 다음 단계 3-3에서 구할 관측기의 최소극점간 거리가 최대가 될 수 있도록 Fig. 1과 Fig. 2로부터 단일입출력시스템의 극점과 영점을 배치할 수 있다. 이로써  $l_{12}$ ,  $l_{21}$ ,  $l_{22}$ 가 결정되는데 그 값은 다음과 같다.

$$l_{12} = 0.1782, \quad l_{21} = -0.1336, \quad l_{22} = 1.4780 \quad (19)$$

**STEP 3-3 출력피드백시스템의 극점결정(관측기의 극점결정)**

식(8)에 앞에서 결정된 식(19)의 값을 대입하고  $l_{22}$ 에 따른 관측기 행렬의 극점배치를 그려보면 Fig.3과 같고 이 때의 극점, 관측기의 계인과 관측기행렬이 다음식들에 나타나 있다. 그리고 이상 결정된 관측기 행렬에 대하여 Table 1과 식(1)에 나열된 성능지표 값을 계산한 결과가 모델링오차로 인한 정상상태의 상대적오차와 같이 나열되어 있다.

$$L = \begin{bmatrix} 0.5524 & 0.1782 \\ -0.1336 & 1.4780 \\ 0.9178 & 0.0175 \\ 0.0692 & 0.0911 \end{bmatrix}$$

$$\Phi' = \Phi' - LC \quad (20)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2342 & 0 & 0.4079 & -0.2768 \\ 0 & -0.8875 & -0.0262 & 0.0342 \\ -0.4079 & 0.0262 & -0.2697 & 0.8165 \\ 0.2768 & -0.0342 & -0.8165 & -0.4138 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(\Phi' - LC) = [-0.2768 \pm 0.9179i \quad -0.8875 \quad 0.1012] \quad (21)$$

$$k_2(P) = 1.6629 \quad (22)$$

$$k_2(\Phi' - LC' - I) = 2.2561 \quad (23)$$

$$\|e_{ss}\|_2 / \|x_{ss}\|_2 \times 100 = 0.4339(\%) \quad (24)$$

위 결과는 같은 시스템에 대해서 단일출력인 경우 well-conditioned observer를 설계한 결과인

$$k_2(P) = 2.3065$$

$$k_2(\Phi' - LC' - I) = 5.8176$$

$$\|e_{ss}\|_2 / \|x_{ss}\|_2 \times 100 = 1.03(\%)$$

에 비해 향상된 성능을 보여주고 있다.

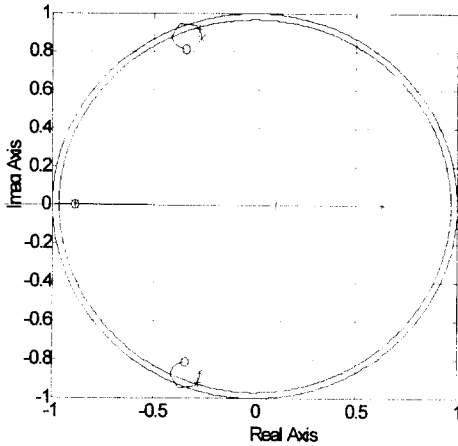


Fig.3 Root locus : Observer Poles selection

## 5. 결론

두개의 출력을 갖는 시스템에 대한 well-conditioned 이산관측기의 설계방법을 제시하였다. 이 방법은 관측기 행렬 중  $\Phi^{11}$ 의 비대각요소가 최대치가 되도록 하면서 동시에 최소극점간 거리가 최대가 되도록 관측기의 게인을 설정하는 것이 가능하게 한다. 이렇게 함으로써 두개의 출력을 갖는 시스템의 상태변수를 추정시 ill-conditioning 요소들에 대하여 민감하지 않는 즉 강인한 성능을 가지는 관측기를 설계할 수 있게 한다.

본 연구에서 제시하는 관측기 설계 방법을 검증하기 위하여 DC spindle drive system에 대해 설계 방법을 적용하였으며 그 결과 단일 출력의 경우에 비해 예상대로 향상된 성능을 보여주고 있다. 본 연구에서 제안된 관측기는 2개의 sensor를 사용하는 시스템에 대한 신뢰성 있는 상태 변수 감지에 잘 응용될 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- (1) D. G. Luenberger, 1966, "Observers for Multivariable Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, pp.190-197.
- (2) R. E. Kalman and R. S. Bucy, 1969, "New results in Linear Filtering and Prediction Theory", Journal of basic Engineering, Transactions of ASME series D., Vol. 83, No. 3, pp. 95-108.
- (3) K. Huh, and J. L. Stein, 1994, "A Quantitative Performance Index for Observer-Based Monitoring Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 116, No. 3, pp.487-497.
- (4) F. E. Thau, A. Kestenbaum, 1974, "The effect of Modeling Errors on Linear State Reconstructors and Regulators," Transactions of the ASME Dec. pp.454-459.
- (5) S.P. Battacharyya, 1976, "The Structure of Robust Observers," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, Aug., pp.581-588.
- (6) A. R. Galimidi, and B.R. Barmish, 1984, "Robustness of Luenberger Observers: Linear Systems Stabilized Via Nonlinear Control," American Control Conference, Vol. 2, pp.968-974.
- (7) B. Shafai, and R. L. Carroll, 1985, "Design of Proportional-Integral Observer for Linear Time-Varying Multivariable Systems," Proceedings of 24th Conference of Decision and Control, Ft. Lauderdale, FL., Dec., pp.597-599.

- (8) K. Huh, and J. L. Stein, 1995, "Well-Conditioned Observer Design for Model-based Monitoring Systems," Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 117, No. 4, pp.592-599.
- (9) 허건수, 김상진, 1995, "이산관측기에 근거한 감지 시스템을 위한 정량적 성능 지표", 한국정밀공학회지 제 12 권 제 10 호, pp. 138-148.
- (10) H. Kimula, 1975, "Pole Assignment by Output Feedback," IEEE Transactions on Automatic control, AC-20, pp.509-516.
- (11) 김상진, 1995, Well-conditioned 이산관측기 설계, 한양대학교 석사 학위 논문.