수학적 능력의 구조에 따른 수학 영재아 지도 방안

강 완
(서울교육대학교)

數學 學習 心理의 특성은 아동들의 數學 學習 行動을 통하여 관찰할 수 있다. 특히, 數學的 能力이 우수한 아동들의 행동은 그러한 심리 과정의 특성을 잘 보여 줄 것으로 생각된다. 그리고, 이들이 보여준 數學的 能力의 특성은 數學的 英才兒의 발굴과 학습 지도에 효과적으로 활용될 수 있을 것이다. 數學的 能力의 특성에 관한 연구는 많은 사람들에 의해 여러 가지 방법으로 이루어져 왔다. 그 중, 舊 蘇聯의 心理學者 크루테츠키(V. A. Krutetskii)의 방대한 연구는 수학의 여러 가지 내용을 종합적으로 다루고 있어 우리에게 示唆해 주는 바가 많다.

1. 數學的 能力의 定義

數學的 能力에 관한 초기의 연구들은 일반적인 知的 能力의 연구에서와 같이 주로 變因分析法에 의존해 왔다. 크루테츠키는 변인분석법에 의한 연구 결과를 분석, 종합하여 수학적 능력과 특별히 관련이 있는 知能 變因을 (1) 一般 變因, (2) 數的 變因, (3) 空間 變因, (4) 言語的 變因, (5) 推論 變因으로 정리하였다. 크루테츠키는 이와 같은 관점에서 能力과 技能의 차이를 구분하고, 數學 學習 能力을 다음과 같이 定義하였다.

> 數學을 배우는 能力 (ability to learn mathematics)이란, 다른 모든 조건이 동일한 경우에 학교에서 요구하는 수학적 활동을 수행하고, 학교 敎科目으로서의 수학을 숙달하는 데, 특히 수학적인 知識, 技能, 習慣 등을 비교적 신속하고, 용이하고, 철저하게 숙달하는 데 영향을 주는 개인의 心理的 性向, 주로 精神 活動의 性向을 의미한다.

크루테츠키는 이와 같은 定義에 덧붙여서, 能力의 成分 가운데에는 情意的인 측면이나 태도의 측면을 드러내는 것도 있는데, 그는 이러한 것을 "思考의 數學的 傾向" (mathematical cast of mind)이라고 하였다.

2. 數學的 能力의 構造

수학적 능력에 관한 크루테츠키의 연구 중에는 수학적으로 天賦的인 才能을 보인 학생들을 대상으로 그들의 문제 해결 과정, 생활 태도, 성격 등에 관한 長期的인 관찰, 분석도 있는데, 그는 다음과 같은 결론을 내리고 있다.

(1) 수학적 재능은 아주 이른 시기에 대부분 計算 技能을 통하여 나타난다.

(2) 환경이나 교육은 아무런 상관이 없고 영향도 주지 않는다. 심지어 부모들은 자녀의 특출한 행동에 놀라움을 표시하고 그러한 경향을 제지하려고까지 하였으며, 형제 자매들은 거의가 수학적 재능을 보이지 않았다.

(3) 初期의 수학적 능력의 발달은 산수에 대한 흥미와 그것을 공부하고 싶어하는 경향 등과 불가분의 관계가 있다.

이러한 數學的 英才兒들이 보여 준 數學的 才能으로서는 ① 數學的 事實에 대한 一般化 (法則을 발견하는 일), ② 思考 技能의 柔軟性 (한 操作에서 다른 操作으로의 신속한 轉換 및 思考의 可逆性), ③ 가장 쉽고, 명백하고, 경제적인 해결책에 대한 熱望, ④ 思考 過程의 短縮 및 推論을 이루는 각 連結 부분의 省略, ⑤ 주변에서 볼 수 있는 특수한 수학적 개념에 대한 초보적인 형태의 形式化 등을 열거할 수 있다. 크루테츠키는 數學的 英才兒들이 思考 活動에 있어서 視覺-圖形的 (visual-pictorial) 요소와 言語-論理的 (verbal-logical) 요소에 따른 類型的 차이를 보이기도 하였다고 報告하고 있다.

크루테츠키는 수학적인 문제 해결의 활동을 수학적인 情報를 다루어 나가는 활동으로 보고, 학생들의 문제 해결 활동을 다음 3 단계로 나누어 관찰하였다.

(1) 情報의 收集 段階: 문제에 관한 情報의 獲得 過程

(2) 情報의 處理 段階: 획득된 정보를 문제를 풀 목적으로 處理(變形)하고 원하는 결과를 얻어내는 過程

(3) 情報의 把持 段階: 해결된 문제에 관한 정보를 把持하는 過程

크루테츠키가 製作한 테스트는 이러한 情報 收集, 情報 處理, 情報 把持에 관한 것과 수학적 才能의 類型的 分析을 위한 것이었는데, 변인분석법에 의한 통계적 처리 결과는 모두 크루테츠키가 설정한 假說을 만족하는 것으로 나타났다. 이제, 그가 설정한 수학적 능력의 구조적 특성을 그가 관찰한 여러 가지 事例를 통하여 살펴보기로 하자.

가. 數學的 情報 收集 能力

대체적으로 수학적인 재능을 가진 학생들은 分析的이면서도 綜合的으로 문제를 받아들였으며, 문제를 곧바로 "複合된 全體" (composite whole)로 받아들였다. 이에 반하여 평균적인 학생들은 문제를 분석하고 종합하는 過程에 가서야 비로소 관련성을 찾으려고 했으며, 둔한 학생들은 문제

에 주어진 자료들 사이의 聯關性과 相關關係를 구성하는 데 어려움이 있었다.

우수한 학생들은 문제의 構造를 파악하는 과정에서 신속하고 短縮된 思考를 보여주었다. 우수아들의 사고 과정을 分析-綜合的 洞察(analytic-synthetic vision)이라고 한다면, 평균적인 학생들의 그것은 分析-綜合的 節次(process)라고 부를 만했다.

나. 數學的 情報 處理 能力

(1) 數學的 對象에 대한 一般化 能力

크루테츠키의 연구는 피험자들이 그들의 수학적 활동에서 보이고 있는 一般化 能力에는 다음 4 가지 水準이 있음을 말하고 있다.

① 實驗者가 많은 구체적인 例를 提示하여 도와 주었음에도 불구하고 一般化가 불가능한 水準

② 구체적인 도움과 暗示가 주어질 때 一般化가 가능한 水準

③ 몇 개의 具體的 例만을 보고 독자적으로 一般化할 수 있거나, 실험자의 유도 질문에 의해 완전한 一般化가 가능한 水準

④ 아무런 도움이나 暗示가 없이도 一般化가 즉시 완전하게 이루어지는 水準

(2) 推論을 短縮시키는 能力

누구나 같은 유형의 문제를 자주 다루게 되어 익숙해지면 그 문제에 관한 그의 思考 過程은 漸進的으로 短縮된다. 따라서, 思考 過程의 '短縮'이라는 現象은 연습을 통한 漸進的 發達의 結果라고 볼 수 있다. 그러나, 크루테츠키의 관찰에 의하면 능력이 우수한 학생들에게 있어서는 그러한 연습이 꼭 필요한 것이라고 할 수 없음을 알게 된다. 그들은 자신들에게 전혀 새로운 문제임에도 불구하고 즉석에서 그러한 '단축'이 가능하다는 것이다.

(3) 思考 過程의 柔軟性

우수한 학생들에게서는 신속하게 思考의 轉換이 이루어짐을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 소냐(L. Sonya)와 볼로디아(L. Volodya)는 10살 된 天賦的인 수학적 재능을 가진 학생들이었는데, "어떤 기선의 속력은 강물을 따라 내려가면 시속 20 km, 逆行하면 시속 15 km이다. A에서 B까지 강물을 따라 내려가면 逆行하는 경우보다 5 시간이 빨랐다. A와 B 사이의 거리는 얼마인가?"라는 문제를 받고 대체로 다음과 같은 세 가지의 서로 다른 풀이 방법을 내놓았다.

(풀이 1) 강물을 따라 내려가면 3 분에 1 km, 역행하면 4 분에 1 km이다. 1 km에 1 분씩 빠르다. 모두 5 시간이니까 300 분이 빠르다. 따라서 거리는 300 km이다.

(풀이 2) 매시간 5 km씩 앞당겨서, 모두 75 km를 앞당겼다. (왜냐하면, 역행하는 기선은 시속 15 km로 5 시간을 더가야 하니까.) 따라서 시속 20 km로는 15 시간이 걸렸고 (75 ÷5), 따라서 300 km이다.

(풀이 3) 5 시간 동안 75 km [를 더가야 한다]. 그리고 이것은 전체 거리의 $\frac{1}{4}$ 이다.

(왜냐하면, 역행하는 속도는 순행하는 속도의 $\frac{3}{4}$ 이므로.)

소냐는 풀이 2, 3, 1의 순서로 각각 25 초, 30 초, 1 분이 걸렸다. 볼로디아는 풀이 1, 3, 2의 순서로 각각 30 초, 40 초, 20 초가 걸렸다.

(4) 優雅한 풀이를 얻으려는 努力

천부적인 재능을 가진 아동들에게서는 이러한 경향이 매우 이른 시기에서부터 나타난다. 소냐가 9살 때 푼 방법과 평균적인 6, 7학년 학생들의 풀이 방법을 비교하면 다음과 같다.

(문제) 아버지와 아들이 같은 일터로 가는데, 아버지는 40분, 아들은 30분이 걸린다. 아들이 아버지보다 5 분 늦게 출발하면, 몇 분 뒤에 아버지를 앞지르게 되는가?

(**평균적인 학생들의 풀이**) 아버지는 1분에 전체거리의 $\frac{1}{40}$ 만큼, 아들은 $\frac{1}{30}$ 만큼 간다. 속력의 차는 $\frac{1}{120}$ 이다. 아버지는 5분에 전체 거리의 $\frac{1}{8}$ 을 간다. 따라서 아들은

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{120} = 15 \text{ (분)}$$

만에 아버지를 앞지르기 시작한다.

(**소냐의 풀이**) 아버지는 아들보다 5 분 먼저 출발했으므로, 도착할 때에는 아들보다 5 분이 늦어진다. 따라서, 아들은 전체 거리의 꼭 절반이 되는 곳에서부터 아버지를 앞지르기 시작한다. 즉, 15 분 후이다.

(5) 思考 過程의 可逆性

크루테츠키는 心理學的 의미에서, 한 문제를 풀고 난 다음 그 문제를 해결할 때 나타났던 思考의 흐름의 방향을 반대로 전환시키고, 사고 과정의 방향을 신속히 재구성할 것을 요구하는 문제들을 그 문제의 數學的 性格과는 관계없이 "可逆的 問題 (reverse problem)"라고 불렀다.

우수한 학생들은 이 '可逆的 문제'를 별 어려움 없이 잘 처리했으므로 그들에게는 특별한 指導가 필요 없었다. 그들에게 있어서, 한 쪽 方向으로 形成된 사고 과정의 體系는 동시에 可逆的 體系를 뜻하는 것이었고, 한 쪽 聯想이 형성됨과 거의 동시에 可逆的 聯想이 형성되었다.

다. 數學的 情報 把持 能力

크루테츠키의 실험 결과는 우수한 학생들에게 있어서는 問題의 類型, 풀이의 一般的 方法, 推論 圖式, 證明의 기본 줄기, 論理的 形式 등이 즉시 기억되고 또한 상당히 오랫동안 그 기억이 持續되는 것을 보여준다. 동시에 문제에 사용된 具體的 資料, 數値的 資料 등은 문제를 풀 동안은 잘 기억했으나, 그 후에는 빨리 잊어버리는 現象도 보여 준다.

결국 數學的 記憶力이란 思考 類型과 演習 類型에 대한 記憶力에 해당되며, 특수한 자료에 관한 記憶力은 數學的 能力과 관련하여 中立的인 것이다. 또한 數學的 情報를 一般化되고 簡略한 형태로 기억하는 것은 腦에 부담을 주지 않고, 오랫동안 유용하게 기억하는 手段이 된다고 할 수 있으며, 이것은 브루너가 말하는 '壓縮된 表現' (condensation)이라고 할 수도 있다.

라. 요약

크루테츠키는 數學的 能力의 構成 要素를 다음과 같이 요약하고 있다.

(1) 정보의 수집

① 수학적 사실을 形式化하여 認識하고, 問題의 形式과 構造를 파악하는 능력 (문제에 대한 구조적 파악)

(2) 정보의 처리

① 量的, 空間的 관계와 數, 文字, 記號 등의 영역에서 논리적으로 사고하는 능력 및 수학적 기호를 사용하여 사고하는 능력 (논리, 기호 등의 사용)

② 수학적 대상, 관계, 연산을 신속하고 광범하게 일반화하는 능력 (일반화)

③ 수학적 추론의 과정과 그에 따른 演算 體系를 단축시키는 능력 및 壓縮된 構造로 사고하는 능력 (縮約)

④ 수학적 사고에서의 사고 과정의 유연성 (유연성)

⑤ 명백하고 간단하며 경제적이고 합리적인 해결 방법을 찾는 노력 (경제성)

⑥ 사고 과정의 방향을 신속하고 자유롭게 전환, 재구성하는 능력 (가역성)

(3) 정보의 파지

① 수학적 기억력, 즉 수학적 관계, 類型的 特性, 논증의 골격, 문제 풀이의 방법, 문제에 대한 접근 방법 등에 대한 일반화된 기억 (구조적 기억)

수학적 능력의 이러한 각 구성 요소들은 서로 밀접한 관련을 가지고 있으며, 서로 영향을 미치고, 總體로서 單一한 綜合的 體系인 수학적 능력을 형성한다. 그러나, ① 일시적인 사고 과정의 신속성, ② 암산, 계산 능력, ③ 기호, 수, 공식 등에 대한 기억력, ④ 공간 개념, ⑤ 추상적인 수학적 관계와 관련성을 視覺化하는 능력 등은 비록 유용하긴 하지만, 수학적 능력의 구성 성분으로서 필수적인 것이라고 하기는 어렵다. 또한, 수학적 능력에 필수적인 것은 아니지만 영향을 주는 다른 종류의 변인으로는 수학에 대한 학생의 긍정적 또는 부정적 態度, 情緖 狀態 등이 있고, 학생에 따라 수학 문제에 대한 言語-論理的 접근 방식과 視覺-圖形的 접근 방식에 대한 차이 등도 볼 수 있었다.

3. 수학 영재아의 지도 방안

크루테츠키의 실험 결과가 암시하는 바는, 무엇보다도 數學의 論理的 展開 過程이 수학을 학습

하는 아동의 心理的 過程과 반드시 일치하지는 않는다는 점을 명백히 해 주고 있다는 것이다. 수학적 능력이 우수한 학생들이 정보 수집 과정에서 보여주는 일반화된 정보 파악 능력, 정보 처리 과정에서 보여주는 신속한 일반화, 가역적 사고, 유연성, 간략화, 추론의 단축, 정보 파지 과정에서 보여주는 일반적 법칙의 重視 등의 능력을 구비하고 있다는 사실은 상대적으로 나머지 대부분의 학생들의 경우, 적어도 그러한 능력의 발달이 뒤늦게 이루어진다는 것을 의미한다. 물론, 그러한 수학적 능력의 차이를 고려하여야 한다는 것이 가르치려는 수학 내용의 논리적 측면을 輕視해도 좋다는 것을 뜻하지는 않는다.

수학을 '배우는 것'과 수학을 '하는 것'과의 구분은 아직 분명하지 않으나, 수학의 학습은 再發明·再發見의 過程이어야 한다는 프로이덴탈의 주장에 따른다면 수학 교육에 있어서 중요한 것은 그러한 수학적 능력이 수학을 배우는 데에, 따라서 가르치는 데에 핵심적으로 고려되어야 할 것이라는 점이다.

컨프리와 라니어(Confrey & Lanier)가 든 다음과 같은 예는 수학을 할 때의 논리적 사고 과정이 수학을 배울 때의 아동의 심리적 과정과 일치하지 않는 경우에 教師가 무엇을 고려해야 될 것인가를 단적으로 보여 준다. 이는 비록 假想的인 경우이지만, 실제의 수업 장면에서도 벌어질 가능성이 충분히 있는 것으로 생각된다.

> 교사는 약분을 지도하기 위하여 $\frac{7}{14}$과 같은 간단한 분수를 골라 시작한다. 교사는 $\frac{14}{21}$와 같은 분수의 취급도 예상하고 있기 때문에 조심스럽게 $7=7\times1$, $14=7\times2$ 와 같이 소인수 분해를 해 나간다. 그러나 학생들은 단순히 곧바로 14를 7로 나눌 수 있다는 생각 때문에 교사의 설명을 무시하는 경향이 있다. 학생은 (교사의 관점으로 보아서는) 바람직하지 못한 면에 신경을 쓰고 있다. 만일 학생이 그러한 생각을 계속한다면, 교사가 $\frac{14}{21}$를 약분하라고 문제를 제시했을 때, 학생들은 어떻게 해야 할 지 모르는 상황이 벌어질 것이다.

즉, 이러한 상황은 數學에서 사용되는 一般化의 論理가 학생들이 數學을 학습할 때의 心理的 過程과는 미묘하게 다를 수 있다는 점을 보여주고 있다: 教師가 提示하려고 하는 約分의 一般化된 방법은 "分母, 分子를 그들의 共通因數로 나눈다"이지만, 학생들이 $\frac{7}{14}$의 약분 과정에서 받아들이는 일반화된 방법이란 단순하게 "分母를 分子로 나눈다"가 될 수 있다는 점이다.

이러한 例는 크루테츠키가 제시한 數學的 能力의 여러 構成 要素에서도 볼 수 있다. 예를 들어, 思考의 可逆的 轉換 能力이란 면에서 생각해 보자. 教師들은 때로 어떤 수학적 원리에 대하여 思考의 한 쪽 方向으로만 설명하고 난 후, 評價 問題를 작성하게 된다. 이 때, 교사는 아동들에게 있어 可逆的 思考가 당연히 별 다른 어려움 없이 가능할 것으로 판단하고는, 思考 過程의 方向을 뒤집어야 풀 수 있는 評價 問題를 제시하는 경우가 흔히 있다. 크루테츠키의 實驗 事例에서도 볼 수 있듯이, 학생들이 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$의 공식을 배운 다음, 그

들에게 sin75° 나 cos105° 의 값을 구하라는 문제를 주면, 학생들은 公式에 나타난 思考의 順序와 같은 方向으로 생각하여 용이하게 公式을 적용할 수 있다. 그러나 sin15° cos30° +cos15° sin30° 의 값을 구하라는 문제를 주게 되면, 대부분의 학생들은 풀이에 곤란을 겪게 되는데, 이 문제를 풀려면 공식에 나타난 思考의 순서와 反對의 방향으로 思考하여야 하기 때문인 것이다.

컨프리와 라니어는 학생들의 數學的 能力이 數學의 論理的 展開 過程과 부합되는 수준에 이르기 이전까지는, 數學的 槪念의 論理的이고 體系的인 학습에 앞서 그들의 心理的 特性을 고려한 思考 活動 자체의 훈련이 필요하다고 보고, 數學的 能力의 여러 構成 要素들을 직접 훈련시키는 방법을 고려해 볼 것을 제안하고 있다. 다시 말하면, 컨프리와 라니어는 마치, 야구의 打擊 指導에서 安打를 칠 가능성을 높이기 위하여 打者에게 打席에서의 스탠스, 스윙, 공을 끝까지 따라가는 視線의 集中力 등에 대한 기본 속성을 가르치는 것과 유사하게, 학생들로 하여금 그들의 數學的 能力을 强化시키고, 數學的 槪念들을 보다 쉽게 파악하도록 하기 위하여 可逆性, 柔軟性, 簡略化, 一般化, 推論 過程의 縮約, 情報의 一般化된 把持 能力 등을 각각의 學習 單位로 하여 가르치는 방법을 고려해 보는 것도 가치 있을 것이라고 보는 것이다.

이러한 관점에서 수학적 영재아을 위하여 제공될 수 있는 학습 활동의 종류는 다음과 같은 것들을 생각해 볼 수 있다.

(1) 주어진 소재에 맞추어 문제 만들기
(2) 부족한 정보를 채워서 문제 만들기
(3) 과잉 정보를 덜어내어 문제 만들기
(4) 도형에 관한 통찰력 기르기
(5) 문제의 유형 분류하기
(6) 형식화 연습
(7) 주어진 유형으로 문제 만들기
(8) 문자 산수 (cryptarithmetic)
(9) 다양한 풀이 찾기
(10) 변형된 문제 풀기
(11) 사고의 재구성
(12) 순행-역행 문제
(13) 논리적 추론
(14) 비현실적인 문제
(15) 자기 제약 암시 문제

이 중 활동 (1), (2), (3)은 문제 안에 주어진 구체적 사실들과 그들의 관계를 인식하는 능력을 기르기 위한 목적으로 제공되는 활동이다. 활동 (4)는 주어진 도형과 그 배경으로부터 기하적 요소를 추출하는 능력을, 활동 (5), (8)은 일반화하는 능력과 추론 과정을 단축하는 능력을, 활동

(7), (14)는 문제에 대한 일반화된 인지 능력을 목표로 한 활동이다. 또한, 활동 (9), (10), (11), (16)은 사고의 유연성과 풀이의 우아함을 추구하는 능력을, 활동 (12)는 사고 과정의 가역성을 돕기 위한 것이고, 활동 (13)은 추론 능력을 돕기 위한 것이다. 이러한 학습 활동을 위한 구체적인 문제 상황의 제시 방안을 몇 가지 예를 들면 다음과 같다.

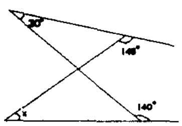
가. 활동 (*11*) <사고의 재구성>의 예

같은 종류의 사고 활동이 반복될 경우, 하나의 고정된 사고 습관(mental set)이 형성되는 경우가 많다. 이러한 습관은 사고의 효율성을 높일 수도 있지만, 새로운 문제 상황에 부딪혔을 때 장애를 일으킬 수도 있다. 주위에서 보게 되는 수학 연습 문제들은 이 가운데 사고의 효율성이라는 측면만을 강조하여 구성된 것이 대부분이다. 보다 폭넓은 사고 능력을 기르기 위해서는 새로운 문제 상황에 알맞게 사고의 방향을 신속히 재구성하는 활동이 필요하다.

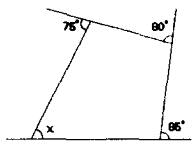
다음에 예를 드는 <사고의 재구성> 활동에서는 (1)에서 (5)까지의 5 문제가 하나의 문제군을 형성한다. 이 중 문제 (5)를 풀기 위해서는 문제 (1)~(4)에서와는 다른 방식의 사고가 필요하게 된다. 문제 (1)에서 (5)까지 순서대로 문제를 풀게 하고, 문제 (5)를 풀기 시작할 때 학생의 사고의 흐름에 어떤 변화가 있는지 관찰하면, 학생을 이해하는 데 도움이 될 것이다. 문제 (5)까지 다 푼 다음, 문제 (5)의 풀이가 다른 문제의 풀이와 어떻게 다른지 알아보게 한다.

[예 1] 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

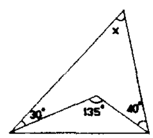
(1)



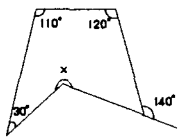
(2)



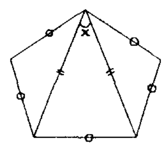
(3)



(4)



(5)



(1)~(5)는 모두 다각형의 내각, 외각에 대한 성질을 이용하여 각 x의 크기를 구하는 문제이다. (1)에서 (4)까지는 문제에 주어진 구체적인 각의 크기를 적절히 더하거나 빼는 방법으로 풀 수 있지만, (5)에서는 구체적인 각의 크기가 아무 것도 주어지지 않았다.

[예 2] 다음에서 x, y의 관계식을 구하여라.

(1) 지름이 38 cm인 자전거의 바퀴가 x 바퀴 돌았을 때, 자전거가 움직인 거리 y cm.

(2) 넓이가 200 m^2인 직사각형의 가로 x m와 세로 y m.

(3) 반지름이 5 cm인 부채꼴의 중심각 $x°$ 와 그에 대한 호의 길이 y cm.

(4) 정확히 2000원으로 살 수 있는 공책의 수 x 권과 공책 한 권의 값 y 원.

(5) 바닷물 2 L를 증발시켜 소금 x g을 얻을 때, 소금 420 g을 얻기 위해 필요한 바닷물 y L.

(1)에서 (4)까지는 각 문제에 구체적인 수의 값이 하나 주어지고, x, y의 관계가 정비례인지 또는 반비례인지를 판정하여 관계식을 직접 구하는 문제이다. 그러나, (5)에서는 구체적인 수의 값도 2 개 주어져 있고, 비례식을 세워 본 후에 정비례인지 반비례인지를 알 수 있는 문제이다.

나. 활동 (12) 순행-역행 문제의 예

수학적 원리, 공식 등에는 대칭적 관계, 연산과 역연산의 관계, 한 정리와 그 정리의 역 등 서로 반대로 향하는 두 사고의 흐름이 함께 하나의 원리 또는 공식을 이루는 경우가 많다. 그러나, 대부분의 학생들은 자신이 배운 수학적 원리나 공식을 한쪽 방향으로만 사용하려는 경향이 있다. 수학적 사고가 원활하게 이루어지려면, 이러한 수학적 원리에 대한 사고 방향의 급격한 재구성, 즉 신속한 가역적 사고의 능력이 요구된다.

다음에 예를 드는 <순행-역행 문제> 활동의 각 문제는 순행 문제 A와 역행 문제 B의 쌍으로 제시된다. 역행 문제는 순행 문제에서의 소재는 그대로 둔 채, 순행 문제에서 요구하는 미지의 것을 조건으로, 순행 문제에서의 조건을 미지의 것으로 바꾼 것이다. 학생으로 하여금 순행 문제 A를 푼 후, 답을 맞추어 보거나 풀이에 대하여 설명하는 일 없이 곧바로 역행 문제 B를 풀게 한다. 각 쌍의 문제에서 학생의 사고 흐름의 방향 전환이 어떻게, 얼마나 신속하게 일어나는지 관찰하는 것이 지도에 도움이 된다. 이 때, 문제 B가 A의 역행 문제라는 사실을 알려 줄 필요는 없다.

A. 갑과 을이 각각 벽돌을 500장, 700장씩 쌓았다. 품삯은 각자가 쌓은 벽돌의 수에 비례한다. 두 사람의 품삯의 합이 180000원일 때, 갑과 을의 품삯은 각각 얼마인가?	B. 갑과 을이 벽돌을 쌓고 받은 품삯을 합하면 48000원이다. 품삯은 각자가 쌓은 벽돌의 수에 비례한다. 갑이 벽돌 200장을 쌓고 30000원을 받았다면, 을이 쌓은 벽돌은 모두 몇 장인가?

(A)는 두 사람 품삯의 합 180000원을 5 : 7로 비례 배분하여 답을 구하는 문제이고, (B)는 두 사람 품삯의 비를 구한 다음 이 비의 값을 갑이 쌓은 벽돌의 수에 곱하여 답을 구하는 문제이다.

A. 영희, 민수, 혜경이가 3 : 5 : 4의 비로 24개의 구슬을 나누어 가졌다. 이들이 가진 구슬은 각각 몇 개인가?	B. 철수 인홍, 만구가 가진 구슬의 수의 비는 5 : 7 : 3이다. 철수가 가진 구슬의 수가 15개이면, 인홍이와 만구가 가진 구슬은 각각 몇 개씩인가?

(A)는 연비로 비례 배분하여 답을 구하는 문제이고, (B)는 철수가 가진 구슬의 수에 적절한 비의 값을 구하여 답을 구하는 문제이다.

A. 50만원을 월이율 1푼 3리로 4개월간 빌어 쓰면, 모두 얼마를 갚아야 하는가?	B. 원금 150000원을 연이율 10%로 예금하였더니 얼마 후 원리 합계가 195000원이 되었다. 예금한 기간을 구하여라.

(A)는 원금, 이율, 기간이 주어졌을 때, 원리합계를 구하는 문제이고, (B)는 원금, 이율, 원리합계가 주어졌을 때, 기간을 구하는 문제이다.