선형계획모형에 의한 Muskingum 계수의 결정

(Linear Program Models for Determination of Muskingum Routing Coefficients)

안 태진*, 여 운식*, 전 호원**, 박정응**

1. 서론

하천에서 홍수추적구간 상류단의 유입수문곡선으로부터 하류단의 유출수문곡선을 축차적으로 계산하는 방법인 Muskingum 홍수추적방법을 적용하기 위해서는 기왕의 홍수자료로 부터 저류상수 K(Storage constant)와 상수 x를 계산한 후 Muskingum 계수(C_1, C_2, C_3)를 결정하여야 한다. 본고에서는 관측된 유입량과 유출량을 이용하여 Muskingum계수를 선형계획(Linear programming)으로 결정하였다. 기왕의 홍수자료를 이용하는 선형계획에 의한 Muskingum 계수 결정법은 절대오차누계의 최소화와 절대최대오차의 최소화인 두가지 모형으로 접근할 수 있다. Muskingum 계수는 홍수추적구간을 통하여 횡유입량(lateral inflow)이 있는 경우와 없는 경우를 구분하여 앞서 언급한 모형을 이용하여 결정하였다.

2. Muskingum 홍수추적 방법

횡유입량(lateral inflow)이 없는 하도구간에서 Muskingum 홍수추적방법은 다음 식(1)과 같은 저류방정식에 기초를 두고 있다.

$$I - O = \frac{dS}{dt} \tag{1}$$

여기서 I, O는 하도의 임의 구간의 유입량(Inflow) 및 유출량(Outflow)이며 S는 저류량(Storage)을 나타낸다. 식(1)을 미분항으로 풀어 쓰면 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{I(t)+I(t+\Delta t)}{2} - \frac{Q(t)+Q(t+\Delta t)}{2} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

여기서 $I(t), Q(t), S(t)$는 임의시간 Δt의 시점에서의 유입량, 유출량 및 저

---

* 농어촌진흥공사, 농어촌구조연구소

** 서울산업대학교, 토목공학과

류량이며 $I(t+\Delta t), Q(t+\Delta t), S(t+\Delta t)$는 Δt의 종점에 있어서 값들을 나타내며 Δt를 추적기간(Routing period)라 한다. 총저류량은 식(3)과 같이 표시하였다.

$$S(t) = K[x\, I(t) + (1-x)Q(t)] \tag{3}$$

따라서 식(3)을 식(2)에 대입하여 정리하면 식(4)가 된다.

여기서 K는 저류상수이고 x는 상수이다. Muskingum 홍수추적방정식은 식(4)와 같다.

$$Q_B(t+\Delta t) = C_1 I_A(t) + C_2 I_A(t+\Delta t) + C_3 Q_B(t) \tag{4}$$

여기서

Δt = 임의기간 또는 추적기간

A = 하도추적 경계조건의 상류단

B = 하도추적 경계조건의 하류단

$$C_1 = \frac{Kx + 0.5\Delta t}{\beta}, \quad C_2 = \frac{-Kx + 0.5\Delta t}{\beta}, \quad C_3 = \frac{K - Kx - 0.5\Delta t}{\beta}$$

$$\beta = K - Kx + 0.5\Delta t$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

식(4)는 추적구간 상류단의 유입수문곡선으로 부터 하류단의 유출수문곡선을 축차적으로 계산하는데 이용된다.

O'Donnell 등(1987)은 횡유입량(lateral inflow)이 있는 하도구간에서 Muskingum 저류방정식을 식(5), 저류량을 식(6), 홍수추적식을 식(7)으로 표현하였다.

$$I(1+\alpha) - O = \frac{dS}{dt} \tag{5}$$

$$S(t) = K[x(1+\alpha)\, I(t) + (1-x)Q(t)] \tag{6}$$

$$Q_B(t+\Delta t) = d_1 I_A(t) + d_2 I_A(t+\Delta t) + d_3 Q_B(t) \tag{7}$$

여기서

$$K = \Delta T \frac{d_1 + d_2 d_3}{(1-d_3)(d_1+d_2)}, \quad x = \frac{1}{2}(1 - \frac{d_2 + d_1 d_3}{d_1 + d_2 d_3}), \quad \alpha = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - 1}{1 - d_3} \tag{8}$$

$$d_1 = (1+\alpha), \; d_2 = (1+\alpha), \; d_3 = C_3 \tag{9}$$

3. Muskingum계수의 결정을 위한 선형계획모형

3.1 절대오차누계의 최소화

Q_i^{comp}를 계산 유출량, Q_i^{obs}를 관측 유출량이라 할 때 발생되는 오차 e_i는 $e_i = Q_i^{comp} - Q_i^{obs}$으로 표현되며 절대오차누계를 최소화하는 선형계획 모형을

정립하면 다음 모형1과 같다.

모형1

목적함수: Minimize $z=\sum_{i=1}^{n}\left|e_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i^{comp}-Q_i^{obs}\right|$

제약조건: Subject to $Q_i^{comp}-e_i=Q_i^{obs}$

$e_i \geq 0 \quad i=1,\ldots,n$

여기서 $|e_i|$는 $e_i \geq 0$ 일때 e_i가되고 $e_i<0$일때 $-e_i$가 되므로 $e_i^{+}+e_i^{-}$으로 정의되며 e_i^{+}와 e_i^{-}중 하나가 양수이면 다른 하나는 0으로 처리된다. 따라서 e_i^{+}, e_i^{-}는 비음수성(Nonnegativity)이므로 $e_i=-e_i^{+}+e_i^{-}$으로 정의하여 모형1을 다시 정리하면 모형2와 같이 된다.

모형2

목적함수: Minimize $z=\sum_{i=1}^{n} e_i^{+}+e_i^{-}$

제약조건: Subject to $Q_i^{comp}+e_i^{+}-e_i^{-}=Q_i^{obs}$

$e_i^{+}, e_i^{-} \geq 0 \quad i=1,\ldots,n$

3.2 절대최대오차의 최소화

관측치와 실측치의 절대최대오차를 최소화하는 선형계획 모형은 다음과 같이 된다.

모형3

$$Min\ [\ \underset{i}{Max}\ |e_i|\ ]$$

$$s.t.\quad Q_i^{comp}-e_i^{+}+e_i^{-}=Q_i^{obs}$$

$$e_i^{+}, e_i^{-} \geq 0 \quad i=1,\ldots,n$$

이 모형4를 선형계획을 해석하는 전산프로그램에 입력하기 위하여 다음과 같은 모형5로 변환한다.

모형4

$$Min\ \ y$$

$$s.t.\quad Q_i^{comp}-e_i^{+}+e_i^{-}=Q_i^{obs}$$

$$y \geq e_i^{+}-e_i^{-}$$

$$y \geq -e_i^{+}+e_i^{-}$$

$$e_i^{+}, e_i^{-} \geq 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

4. Muskingum계수의 결정

종래의 Muskingum 홍수추적 방법에서 표1과 같은 기왕의 홍수자료로 부

터 K = 1.40, x = 0.25로 결정하고 C_1, C_2, C_3를 계산한 결과는 다음과 같다.
$C_1 = 0.548,\ C_2 = 0.097,\ C_3 = 0.355$

4.1 횡유입량이 없는 경우

표1의 홍수자료를 식(4)에 대입하면 각 시각에 따른 유출량 계산치 (Q_i^{comp})를 구할 수 있으며 또한 유출량 관측치 (Q_i^{obs})를 표1에서 구할 수 있다. 모형2-1은 Muskingum 계수 (C_1, C_2, C_3)의 최적치를 결정하기 위하여 유출량 계산치 (Q_i^{comp})와 유출량 관측치 (Q_i^{obs})의 절대오차누계를 최소화하는 선형계획 모형이다

<u>모형2-1</u>: Minimize $z = \sum_{i=1}^{n} e_i^+ + e_i^-$

Subject to
$$Q_i^{comp} + e_i^+ - e_i^- = Q_i^{obs}$$
$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$
$$e_i^+, e_i^- \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

모형2-1을 선형계획 전산프로그램에 대입하여 계산하면
$C_1 = 0.534, C_2 = 0.080, C_3 = 0.386$을 얻는다.

관측치와 실측치의 절대최대오차를 최소화하는 모형4-1에 표1의 홍수자료를 선형계획 전산프로그램에 대입하여 계산하면
$C_1 = 0.499,\ C_2 = 0.102,\ C_3 = 0.399$을 얻는다.

<u>모형4-1</u>

$$Min\ y$$
$$s.t.\quad Q_i^{comp} - e_i^+ + e_i^- = Q_i^{obs}$$
$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$
$$y \geq e_i^+ - e_i^-$$
$$y \geq -e_i^+ + e_i^-$$
$$e_i^+, e_i^- \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

4.1 횡유입량이 있는 경우

횡유입량을 고려한 표1의 홍수자료를 절대오차누계를 최소화하는 모형인 모형 2-2로 계산 결과는 $d_1 = 0.3431,\ d_2 = 0.3222,\ d_3 = 0.4756$이다. 따라서 식(8)을 이용하여 α를 계산하면 0.2725가 되며, 식(9)를 적용하여 $\bar{C_1}$, C_2, C_3를 계산하면 각각 0.2532, 0.2696, 0.4756이 된다. 한편 횡유입량을 무시한 모형2-1를 이용하여 C_1, C_2, C_3를 직접 계산하면 각각 0.4292, 0.0,

0.5708으로 되어 횡유입량을 고려한 결과와 큰차이를 보여 주고 있다.

모형2-2: Minimize $z = \sum_{i=1}^{n} e_i^+ + e_i^-$

Subject to

$$Q_i^{comp} + e_i^+ - e_i^- = Q_i^{obs}$$
$$d_1 + d_2 + d_3 \ge 1$$
$$e_i^+, e_i^- \ge 0 \quad i=1,\ldots,n$$

절대최대오차를 최소화하는 모형인 모형4-2에 표1의 횡유입량을 고려한 홍수자료를 대입하여 해석하면 $d_1 = 0.4032$, $d_2 = 0.2798$, $d_3 = 0.4555$을 얻으며 α는 0.254이고 C_1, C_2, C_3를 계산하면 각각 0.3215, 0.223, 0.4555가 된다.

모형4-2

$$Min\ y$$
$$s.t.\quad Q_i^{comp} - e_i^+ + e_i^- = Q_i^{obs}$$
$$d_1 + d_2 + d_3 \ge 1$$
$$y \ge e_i^+ - e_i^-$$
$$y \ge -e_i^+ + e_i^-$$
$$e_i^+, e_i^- \ge 0 \quad i = 1,\ldots,n$$

4. 결론

선형계획 모형에 의한 방법은 종래의 Muskingum 계수 결정공식을 이용하지 않고 Muskingum 홍수 추적 공식을 직접 이용함으로서 저류상수 k와 상수 x를 계산 할 필요없이 Muskingum계수를 결정할 수 있는 장점이 있다. 또한 횡유입량이 있는 홍수추적구간에 관하여 Muskingum 홍수추적방정식의 매개변수d_i를 선형계획모형으로 용이하게 구할 수 있다. 오차를 최소화하는 두가지 선형모형으로 결정한 Muskingum계수와 매개변수d_i의 적합성은 실제 하도추적을 통하여 검정되어야 한다.

참고문헌

1. 윤 용남, 공업수문학, 청문각, 1986.
2. O'Donnell, T., Pearson C.P., and Woods, R.A., Improved Fitting for Three Parameter Muskingum Procedure, J. of Hydraulics Eng., Vol. 114, No. 5, pp 516-528, 1987.
3. Ponce, V. M., Engineering Hydrology: Principles and Practices,

Prentice Hall, 1989.
4. Ravindran, A., D. T. Phillips, J. Solberg, Operation Research: Principles and Practices, John Wiley, 1987.
5. Stephenson, D., Direct Optimization of Muskingum Routing Coefficients, Journal of Hydrology, 41, pp 161-166, 1979.

표1. 임의 하천에서 유입 및 유출량

일	시 각	유입량 (m^3/s)	유출량 (m^3/s)		횡유입량 (m^3/s)	유출량 (m^3/s)
1	0600	30	30		0	30
	1200	60	32		20	52
	1800	120	54		30	84
	2400	210	101		50	151
2	0600	330	181		70	251
	1200	420	278		90	368
	1800	480	370		100	470
	2400	510	440		110	550
3	0600	480	480		120	600
	1200	420	475		100	575
	1800	330	437		90	524
	2400	210	360		80	440
4	0600	120	261		60	321
	1200	60	169		40	209
	1800	30	99		20	119
	2400	30	56		10	66