

線形 Muskingum-Cunge 법에서의 數值的 因子의
변화가 유출수문곡선에 미치는 영향
(Effect of Change of Numerical Parameters on Outflow
Hydrograph in the Linear Muskingum-Cunge Method)

김진수

1. 서론

Muskingum-Cunge 법(이하 M-C 법이라고 함)은 Muskingum법을 대체하는 수리학적 모형으로서, 기존의 수문자료에 의하여 추정하는 매개변수 K, X를 kinematic wave 방정식의 차분식으로 부터 결정하는 것이다.

이 방법은 kinematic wave식의 차분근사에서 발생하는 數值擴散能(numerical diffusivity)을 diffusion wave 방정식에서 유도되는 水理擴散能(hydraulic diffusivity)과 조화시킴으로써 형성된다. 따라서 kinematic wave 법을 적용하기 어려운 비교적 완경사의 사면이나 수로에서의 diffusion wave적인 흐름을 해석할 수 있는 장점을 가지고 있다. 최근 선형 M-C법은 河道追跡(이상호와 이길성 1994)뿐만 아니라 流域追跡에의 적용(Ponce, 1989; 김진수, 1995)도 시도되고 있는데, Courant 수, cell Reynolds 수 등과 같은 수치적 인자의 변화에 따른 M-C법의 거동은 아직 잘 파악되고 있지 않다.

이에 본 연구에서는 단위폭사면을 대상으로 선형 M-C 법의 수치적 인자의 변화가 하류단에서의 유출특성에 미치는 영향을 검토하기로 한다.

2. kinematic wave 방정식

斜面流의 흐름은 다음과 같은 연속방정식과 운동방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

충북대학교 농과대학 농공학과 조교수

$$h = kq^p \quad (2)$$

여기서 t : 시간, x : 거리, h : 사면류의 수심, q : 사면에서의 단위폭당 유량, k, p 는 사면류정수를 나타낸다. 특히 사면류가 지표류와 같이 Manning법칙에 따르는 흐름으로 가정하는 경우, k, p 는

$$k = \left(\frac{N}{\sqrt{s_0}}\right)^p, p = \frac{3}{5} \quad (3)$$

으로 된다. 여기서 N 은 等價粗度係數로서 사면의 流下抵抗을 표현하는 값이며, s_0 는 사면경사를 나타낸다.

3. Muskingum-Cunge 법의 이론

식(1)과 같은 kinematic wave 방정식은 다음과 같은 식 (4)로 정리될 수 있다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$c = \frac{dq}{dh} = \frac{1}{k p q^{p-1}} \quad (5)$$

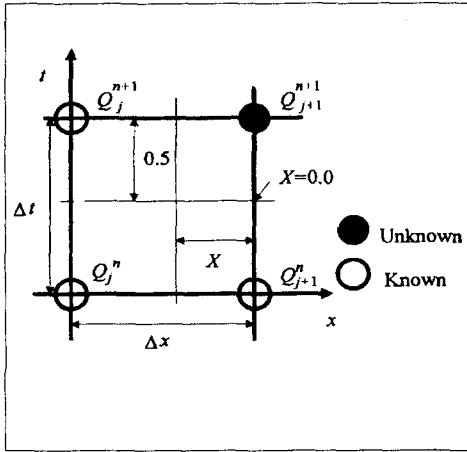
여기서 c 는 kinematic wave의 전파속도를 나타낸다. 식 (4)에 대하여 그림 1에서와 같이 시간미분에 대하여 가중치 (X)를 두어 차분하고, 거리미분에 대하여는 중심차분을 행하는 차분구조를 택하면

$$\frac{X(q_j^{n+1} - q_j^n) + (1-X)(q_{j+1}^{n+1} - q_{j+1}^n)}{\Delta t} + c \frac{(q_{j+1}^n - q_j^n) + (q_{j+1}^{n+1} - q_j^{n+1})}{2\Delta x} = 0$$

(6)

로 된다.

이 것을 미지유량 q_{j+1}^{n+1} 에 대하여 정리하면 식 (7)와 같은 대수식 형태의 추적방정식을 얻을 수 있다.



$$q_{j+1}^{n+1} = C_0 q_j^{n+1} + C_1 q_j^n + C_2 q_{j+1}^n \quad (7)$$

$$C_0 = \frac{c(\Delta t / \Delta x) - 2X}{2(1-X) + c(\Delta t / \Delta x)}$$

$$C_1 = \frac{c(\Delta t / \Delta x) + 2X}{2(1-X) + c(\Delta t / \Delta x)} \quad (8)$$

$$C_2 = \frac{2(1-X) - c(\Delta t / \Delta x)}{2(1-X) + c(\Delta t / \Delta x)}$$

그림 1. 선형 Muskingum-Cunge법의 차분구조

여기서 C_0 , C_1 , C_2 는 추적계수이다.

Ponce and Yevjevich(1978)은 추적방정식의 추적계수를 Courant 상수 C 와 cell Reynolds 수 D 를 이용하여 다음과 같이 표현하였다.

$$C_0 = \frac{-1+C+D}{1+C+D}$$

$$C_1 = \frac{1+C-D}{1+C+D} \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{1-C+D}{1+C+D}$$

여기서 Courant 상수 C 는 격자망의 이동속도 $\Delta x / \Delta t$ 에 대한 kinematic wave의 파속 c 의 비로서 다음과 같이 표현된다.

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (10)$$

또한 cell Reynolds 수 D 는 격자확산능 $c\Delta x / 2$ 에 대한 수리확산능 $q / (2s_0)$

의 비로서 다음과 같이 표현된다.

$$D = \frac{q_0}{s_0 c \Delta x} \quad (11)$$

여기서 s_0 : 사면경사, q_0 : 단위폭당 기준유량. 함수 d 를

$$d = \frac{q_0}{s_0 c} = f(N, q_0, s_0) \quad (12)$$

라고 정의하면, D 는

$$D = \frac{d}{\Delta x} = g(N, s_0, q_0, \Delta x) \quad (13)$$

가 된다. 함수 c 와 d 는 등가조도계수 N , 사면경사 s_0 및 단위폭당 기준유량 q_0 과 같은 물리적 인자에 의하여 좌우되는데 반하여, 함수 C 와 D 는 이런 물리적 인자뿐만 아니라 격자간격(Δx 또는 Δt)과 같은 수치적 인자에 의하여 좌우된다.

4. 사면에서의 수치계산

대상사면은 단위폭사면 (1 x 1000 m)으로서 등가조도계수를 0.4(밭의 등가조도계수에 해당)로 하고 경사각을 0.1, 0.02, 0.003로 한다 (표 1). 상

표 1. 대상사면의 제 조건

	사면 I	사면 II	사면 III
등가조도계수 N	0.4		
사면경사 s_0	0.1	0.02	0.003
kinematic wave의 전파속도 c	0.25	0.15	0.09
d	0.50	4.04	47.56
d 의 크기의 정도	0(0.1)	0(1)	0(10)

류단에 sine 곡선의 홍수파 $0.025 \sin(\pi t / 20) (m^2/s, t$ 는 분)를 20 분간를

유입시켰다. 이 때, 단위폭당기준유량 q_0 으로서는 첨두유량의 반을 취하면 단위폭당기준유량의 값은 $0.0125 (m^2/s)$ 을 갖는다. Δt 를 일정하게 고정하고 Δx 을 작게하는 경우, C와 D 값은 증가하게 된다.

그림 2는 사면 I과 같이 d 값이 큰 사면 (급경사이거나 조도계수가 작은 사면)의 하류단에서 얻은 유출곡선을 나타낸다. 주어진 조건 속의 전 경우에 있어서 D 값은 0.1 이하이고 특히 C 값이 1보다 작은 경우에는 D는 0.01 이하가 되어 $X = 1/2$ 인 경우의 중심차분의 kinematic wave 법($D = 0$)에 접근한다. 수치진동이 $C < 1$ 인 경우에는 流出曲線의 前方(빠른시간)에 나타내고 $C > 1$ 인 경우에는 유출곡선의 後方(느린시간)에 나타나는 데, 이런 현상은 수치분산의 효과에 의하여 설명될 수 있다. C 값이 1에 접근함에 따라 수치진동은 작아지는데, 일반적으로 $C > 1$ 의 경우는 $C < 1$ 의 경우보다 D 값의 증가로 수치진동이 감소한다.

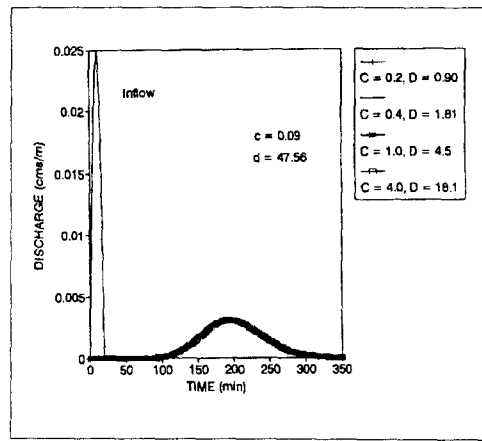
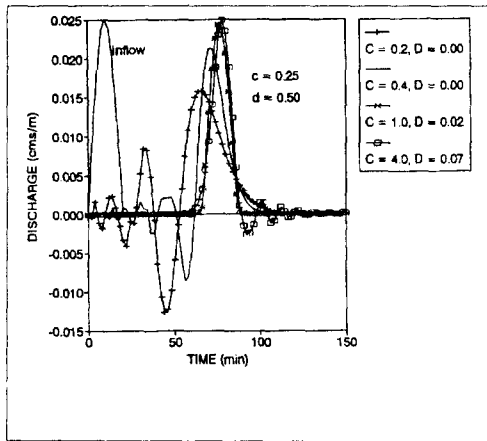


그림 2. 사면 I에서의 C와 D의 변화에 따른 유출곡선의 변화

그림 3 사면 III에서의 C와 D의 변화에 따른 유출곡선의 변화

C = 1인 경우에는 유입 sine 곡선은 波形의 변화가 거의 없이(즉 첨두유량의 감쇠없이) 하류로 전파된다. 따라서 이런 사면에서의 흐름은 kinematic wave적인 흐름에 해당되고 흐름을 정확히 재현하기 위해서는 Courant수를 가능한한 1에 가깝게 취하는 것이 좋다.

사면 III과 같이 d 값이 큰 사면(예, 완경사이거나 등가조도계수가 큰 사면)에서는 비교적 낮은 Courant 수에서 또는 큰 Δx 에서도 큰 D 값을 얻을 수 있다. 그림 3에서 보는 바와 같이 이런 사면에서는 Courant수에 관계없이 거의 같은 결과를 나타내며, 유입곡선과 비교할 때, 유출곡선의 첨두유량은 상당히 감소한다. 이런 사면에서의 흐름은 유하와 함께 첨두유량의 감소를 나타내는 diffusion wave 적인 흐름이 된다.

6. 結論과 요약

본 연구에서는 $d(= q_0/(s_0c))$ 값을 달리하는 단위폭사면을 대상으로 선형 Muskingum-Cunge(M-C) 모형에서의 數值的因子的 변화가 하류단에서의 유출 특성에 미치는 영향을 검토하였다.

d 값이 큰 사면에서 M-C법은 비교적 낮은 Courant 수에서 또는 큰 거리격자간격(Δx)에서도 유하와 함께 확산하는 흐름을 수치진동없이 얻을 수가 있다. 이와 같이 완경사 유역에서의 유출해석에 있어 M-C 법의 적용은 diffusion wave를 잘 재현할 수가 있어 매우 유효하리라고 생각된다.

7. 參考文獻

1. 이상호, 이길성(1994). "Muskingum-Cunge 방법에 의한 남한강 홍수추적." 한국수문학회, Vol.27, No.4, pp. 105-114.
2. 김진수(1995)., "수리학적 유출모형에 의한 홍수추적 - 선형 Muskingum-Cunge 법을 이용한 단위유역의 추적.", 한국농공학회지, Vol.37, No.6, pp.59-69.
3. 角屋睦 (1982). 流出解析法 3. "雨水流法-表面流出モデルによる洪水流出解析", 農業土木學會誌, 第48卷 6號, pp. 37-43.
4. Ponce, V. M. (1989). *Engineering hydrology, principles and Practice* Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 317-325.
5. Ponce, V. M. and Yevjevich V. (1978). "Muskingum-Cunge method with variable parameters.", *J. of hydraulic division*, ASCE, Vol. 104, No.HY3, pp.1663-1667.