

등류수심의 양해법 근사식

유 동 훈* 권 광 석**

1. 서 론

최대 유량을 소통시킬 수 있는 가장 경제적인 단면을 결정하는 것은 개수로 설계에서 대단히 중요하다. 정상 균일 유동은 일정한 단면을 가진 긴 경사진 수로에서 자유수면의 경사가 수로 경사와 일치할 때 일어난다. 이 때의 수심, 즉 등류수심을 구하면 설계 유량에 대한 단면을 결정할 수 있다.

일반 하천에서는 대부분 완난류이므로 완난류 흐름의 마찰계수 산정식을 도입하여 등류수심을 산정하는 공식을 유도하고, 등류수심 산정식을 단면설계에 적용할 수 있다. 널리 쓰이고 있는 Manning공식에 의하면 단면적이 최소일 때, 윤변 또한 최소가 되어 그때의 단면을 최량수력단면(best hydraulic section)이라고 한다. 사다리꼴 개수로의 최량수력단면은 측벽경사, 윤변과 폭이 각각 $\sqrt{3}/3$, $2\sqrt{3}y$, $2y/\sqrt{3}$ 을 갖는 경우이다. 그러나, 측벽경사가 고정되어 폭넓은 적용이 어렵다. 또한, 기존의 마찰계수 산정식들은 좌변과 우변의 단위가 일치하지 않고, 마찰계수가 조고만의 함수로 표현되어 전난류에 대한 마찰계수 산정식으로 잘못 이해될 가능성이 많다. 그리고, 기존의 마찰계수에 의한 등류수심 산정식의 경우 반복 계산해야 하는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 Bazin의 개수로 관측자료에서 레이놀즈수에 대한 마찰계수 분포가 관수로의 완난류 마찰계수 분포경향과 유사하고, 조고에 따라서 평행이동하고 있음에 주목하였다. 개수로에서의 유체 흐름이 완난류라고 할 때, 지수함수 형태의 마찰계수 산정식을 이용하여 기울기인 지수를 고정하고 비례상수는 조고의 함수로 결정할 수 있다고 판단하였다. 개수로의 단면을 사다리꼴로 선택하여 측벽경사가 0인 직사각형 수로까지 적용할 수 있도록 하고, 지수함수 형태의 마찰계수 산정식을 이용하여 이론적으로 등류수심을 산정하는 공식을 유도하였다. 그러나 이론적으로 유도된 산정식도 시행오차법으로 해를 구해야 하는 단점이 있으므로 양해법 근사식을 개발하고 Bazin 관측 자료에 적용하여 비교 검토하였다.

2. 이론식 유도

수심이 d , 수로바닥 폭이 b 이고 측벽경사가 r 인 사다리꼴 개수로에서의 단면적 A , 윤변 P 와 동수반경 H 는 형상비 $D = \frac{d}{b}$ 를 도입하여 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$A = (b + rd)d = (1 + rD)bd$$

$$P = b + 2d\sqrt{1+r^2} = (1 + 2D\sqrt{1+r^2})b$$

* 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 부교수

** 아주대학교 환경·도시공학부 토목설계공학과 학부 과정

식 (15)로 구한 S_0 를 이용하여 광폭등류수심일 때의 형상비를 구하면 다음과 같다.

$$D_0 = \frac{S_0 Q}{\nu b} \quad (16)$$

최종적으로 식(15)과 식(16)으로 구한 D_0 를 식 (11)에 대입하면 등류수심증감률 η 의 값을 산정할 수 있다. 등류수심 d 는 등류수심 증가율 η 에 광폭등류수심 d_0 를 곱함으로써 구할 수 있다. 유량과 폭만 결정되면 제시한 등류수심 양해법 근사식을 이용하여 쉽게 등류수심을 구할 수 있게 된다. 또한, 제시된 근사식은 측벽경사 r 을 다양하게 고려하였으므로 다양한 형태의 단면에 적용할 수 있다.

$$d = \eta \cdot d_0 = \eta \cdot D_0 \cdot b = \{aD_0 + c \ln(D_0 + 1) + 1\} D_0 \cdot b \quad (17)$$

5. 결 론

일반 하천의 경우에 대부분 완난류이기 때문에 개수로에서의 마찰계수 분포경향을 충분히 반영하는 지수 함수 형태의 마찰계수 산정식을 사용하여 등류수심 산정식을 유도했다. 유도된 산정식도 기존 마찰계수 산정식에 의한 방법과 마찬가지로 반복 계산해야 하는 단점이 있다. 따라서, 유도된 산정식의 정밀해를 바탕으로 오차율 5%이내의 정밀도를 가지는 양해법 근사식을 개발하였다. 또한 단면을 사다리꼴로 채택하여 직사각형 수로까지 적용할 수 있게 되었다. 그러나, 유도 과정에서 수로경사가 소거되어 등류수심 산정시 수로경사의 영향이 충분히 반영되지 않은 단점을 가지고 있다.

지수함수 형태의 마찰계수 산정식은 Bazin 관측 자료와 비교한 결과 Bazin No 2, 7, 9 자료와는 상당히 일치하나 나머지는 약간의 차이를 보이고 있다. 이는 지수함수 형태의 마찰계수 산정식의 계수 a 에 대한 관계식 개발시 적은 양의 자료를 사용하였기 때문으로 판단된다. 따라서, 더욱 많은 양의 신뢰성 있는 관측자료를 토대로 마찰계수 산정식을 조정할 필요가 있으며 추후 전 난류, 천이난류에 대한 연구도 이루어져야 할 것으로 판단된다.

참고문헌

- 유동훈, 완난류 개수로 마찰계수, 제35회 수공학연구발표회 논문집, pp.49-56, 1993
 유동훈, 사각형 개수로 마찰계수, 한국수문학회지, 제28권 제2호, pp.155-168, 1995
 Bazin, H.E, Recherches experimentales sur lecouement de leau dans les canaux decouverts, Memoire presentes par divers savants al Academie des Sciences, Paris, Vol.19, 1869
 Streeter, Victor L, Fluid Mechanics, Korean student edition, pp.469-473, 1986

$$\alpha = 0.429 W_{Fi} + 0.0135 \quad (14.1)$$

$$\alpha = 0.0041 \ln W_{Fi} + 0.0375 \quad (14.2)$$

표 1. 정밀도에 대한 양해법 근사해 평균 오차율

x	평균 오차율(%)	
	$\beta = -1/6$	$\beta = -1/4$
0.00	0.3225	0.4211
0.02	0.7026	0.7576
0.04	0.6949	0.9566
0.06	0.9505	1.0255
0.08	0.9502	0.7053
0.10	0.4646	0.9765
0.20	1.5711	4.0239
0.30	0.5066	2.0188
0.40	1.3537	0.7871
0.50	1.9904	0.8918
0.60	2.3720	1.2536
0.70	2.5817	1.5380
0.80	2.6719	1.6965
0.90	2.6823	1.7600
1.00	2.6337	1.7574
2.00	1.2330	0.4808
3.00	0.9011	1.0294
5.00	3.2444	3.3102
10.0	8.3562	8.0259

표 2. Bazin 수로의 가정조교

Bazin No.	종 류	가정 조교(mm)
2	Experimental, Rectangular, pure cement	0.12
6,7,8	Experimental, Rectangular, planked	0.50
9	Experimental, Rectangular, bricks	0.85

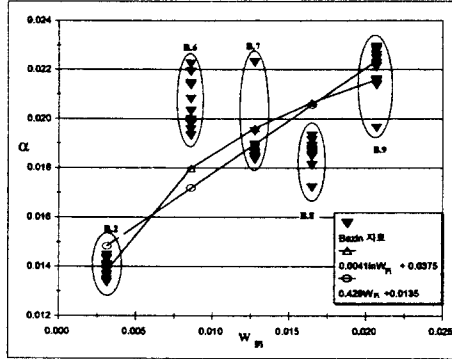


그림 2. Bazin 자료에 근거한 α 회귀분석 결과

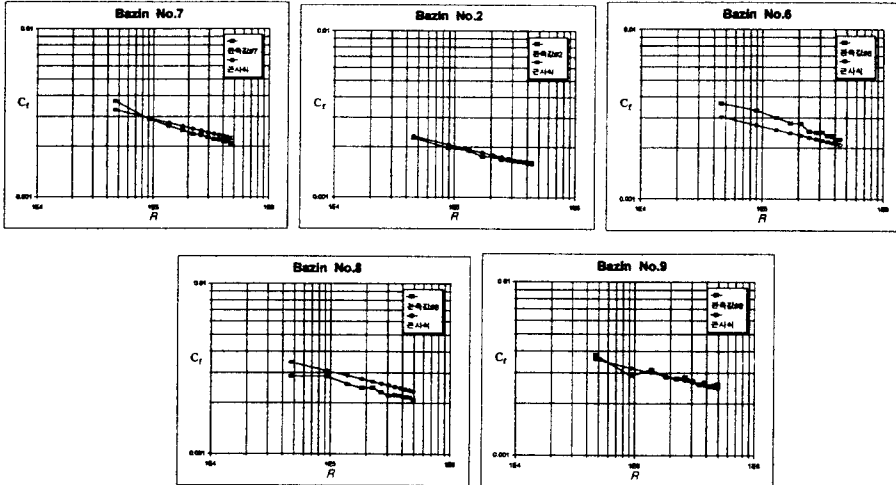


그림 3. 개수로 마찰계수에 대한 관측 자료와 산정 결과 비교

Bazin 관측자료와 비교한 결과 그림 2에서 알 수 있듯이 조교의 증가에 따라 비례상수 α 가 증가하는 경향을 보이고 있다. 그러나, Bazin 관측자료 중 No.6은 추정되는 경향으로부터 상당히 벗어나 과대 산정되고 있다. 과대산정 원인은 분명히 파악되지 못하고 있는데 No.6 자료는 제외하고 회귀 분석하였다. 식 (14.1)이나 식 (14.2)를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$S_0 = (0.0041 \ln W_F + 0.0375)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{vb}{Q} \right)^{\frac{3-\beta}{3}} \left(\frac{Q}{gb^{\frac{5}{3}}i} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

$$\eta = aD_0 + c \ln(D_0 + 1) + 1 \quad (11)$$

식 (11)에서 계수 a , c 는 유도된 산정식에 의해서 구한 정밀해를 회귀 분석하여 식 (12.1), (12.2), (12.3), (12.4)와 같이 결정하였다. 식 (11)의 둘째 항의 1은 광폭수심 D_0 가 0일 경우에 발생하는 오류를 방지하고, 셋째항의 1은 그림 1에서 알 수 있듯이 광폭수심이 0일 때 1로 수렴하는 경향을 반영한다. 측벽경사 r 이 0.15근처에서 그래프의 경향이 변하기 때문에 0.15를 기준으로 분리하여 회귀 분석하였다. 그 결과 계수 a , c 의 함수 형태가 통일성을 갖게 되었다.

측벽경사 $r < 0.15$ 인 경우,

$$\beta = -\frac{1}{6} \text{ 일때, } a = \exp(-23r + 0.06) - 0.36 \quad (12.1)$$

$$c = 1.1 - \exp(-32r - 0.06)$$

$$\beta = -\frac{1}{4} \text{ 일때, } a = \exp(-25.5r + 0.26) - 0.33 \quad (12.2)$$

$$c = 1.2 - \exp(-32r + 0.22)$$

측벽경사 $r \geq 0.15$ 인 경우,

$$\beta = -\frac{1}{6} \text{ 일때, } a = 0.5 \ln(0.48r + 0.3) \quad (12.3)$$

$$c = -0.97 \ln(0.81r + 0.16)$$

$$\beta = -\frac{1}{4} \text{ 일때, } a = 0.5 \ln(0.44r + 0.28) \quad (12.4)$$

$$c = -0.97 \ln(0.74r + 0.15)$$

상기 근사식에 의한 산정 결과를 정밀해와 비교한 결과 평균오차율이 5%이하로 상당한 정밀성을 유지함을 보이고 있다. (표 1 참조, 오차율은 $\frac{|정밀해 - 근사해|}{정밀해} \times 100$ (%)로 정의한다.)

4. 관측 자료와의 비교 검토

등류수심 산정식을 개발할 때 지수함수 형태의 마찰계수 산정식 $C_f = a R^\beta$ 를 사용하므로 먼저 비례상수 a 를 결정해야 한다. $3 \times 10^4 \leq R$ 인 Bazin No 2, 6, 7, 8, 9 관측자료를 분석하면, β 가 $-1/6$ 이라고 할 때 a 가 동수반경 레이놀즈수 R 과 무관하고 조고 k_s 또는 W_{Fi} 수의 함수임을 알 수 있다. W_{Fi} 수는 유동훈(1995)이 제안한 무차원수로 개수로 흐름에서 가장 연관성이 있는 Weber수를 Froude수로 나눈 값의 길이 차원을 조고 k_s 로 환산한 값이며 다음과 같이 정의한다.

$$W_{Fi} = k_s \sqrt{\frac{\rho g l^3}{\sigma}} \quad (13)$$

Bazin 관측자료에는 조고가 수치로 제시되어 있지 않은 관계로 유동훈(1995)은 표 2와 같이 조고를 가정하고 a 값을 W_{Fi} 에 대하여 회귀 분석한 결과 다음과 같은 관계식을 얻어냈다.

$$S = a^{\frac{1}{3}}(1+rD)^{-1}(1+2D\sqrt{1+r^2})^{\frac{1-\beta}{3}} B^{\frac{3-\beta}{3}} F^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

만일 폭이 수심보다 매우 크다면, D 는 거의 0에 가까워지므로 무차원수 S 를 다음과 같이 산정할 수 있으며, 이 때의 등류수심을 광폭등류수심 d_0 로 정의한다.

$$S_0 = a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{3-\beta}{3}} F^{\frac{2}{3}} \quad (8)$$

식 (7)에 식 (8)의 S_0 를 치환하면 다음과 같이 표기된다.

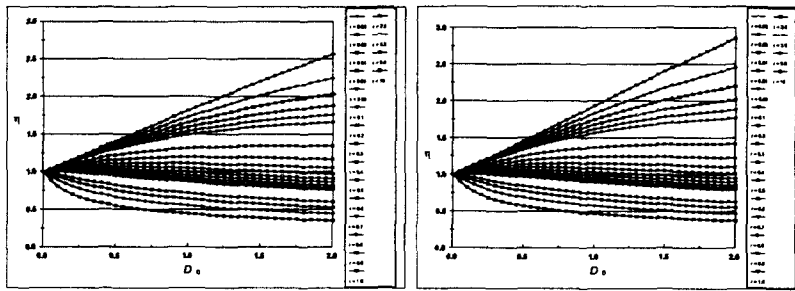
$$\frac{S}{S_0} = (1+rD)^{-1} (1+2D\sqrt{1+r^2})^{\frac{1-\beta}{3}} \quad (9)$$

또한, $D_0 = \frac{d_0}{b}$, $\eta = \frac{S}{S_0} = \frac{d}{d_0}$, $D = \frac{d}{b} = \eta D_0$ 을 각각 대입하여 정리하면 다음과 같은 형태의 공식을 얻을 수 있다.

$$\eta = (1+r\eta D_0)^{-1} (1+2\eta D_0\sqrt{1+r^2})^{\frac{1-\beta}{3}} \quad (10)$$

여기서 η 는 등류수심증감률이라 칭한다.

식 (10)에서 측벽경사 r 과 D_0 별로 반복 계산을 하여 산정된 결과는 그림 1에 제시된 바와 같다. ($r : 0 \sim 10$, $D_0 : 0.0 \sim 2.0$, $\beta : -\frac{1}{6}$ 과 $-\frac{1}{4}$)



(a) $\beta = -1/6$

(b) $\beta = -1/4$

그림 1. 등류수심증감률 η 에 대한 반복 계산 결과

3. 양해법 근사식

식 (10)은 이론에 근거한 식이기는 하나, 결과를 얻기 위해서는 번거롭게 반복 계산해야 하는 단점이 있다. 그러나, 식 (10)에서 알 수 있듯이 η 는 광폭수심 D_0 , 측벽경사 r , 마찰계수 산정식의 지수 β 에 관한 함수이므로 식 (11)과 같은 양해법 산정식을 제시한다.

$$H = \frac{A}{P} = \frac{(1 + rD)d}{(1 + 2D\sqrt{1+r^2})} \quad (1)$$

Chezy는 1775년 개수로내 등류의 바다면 마찰력과 중력의 흐름 방향 성분이 같음을 이용하여 다음과 같은 평균유속 공식을 유도했다. 여기서 V 는 평균유속, i 는 수로경사, C_f 는 마찰계수, g 는 중력가속도이다.

$$V = \sqrt{\frac{gHi}{C_f}} \quad (2)$$

마찰계수 C_f 에 대하여 식 (2)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$C_f = \frac{gHi}{V^2} \quad (3)$$

Bazin의 개수로 관측자료를 살펴보면 레이놀즈수에 대한 마찰계수 분포가 관수로의 완난류 마찰계수 분포 경향과 유사하게 일정한 기울기를 가지며 단지 조고에 따라서 평행이동하고 있음에 주목하였다. 또한, 기울기에 해당하는 지수를 고정하고 비례상수를 조고의 함수로 결정할 수 있다고 판단하였다. 따라서, 개수로에서의 흐름이 완난류라고 한다면, 등류수심을 산정하는 식을 개발하는데 아래와 같은 지수함수 형태가 가장 유리하다.

$$C_f = \alpha R^\beta = \alpha \left(\frac{VH}{\nu} \right)^\beta \quad (4)$$

우리가 구하고자 하는 등류수심 d 에 대한 이의 전개 과정은 다음과 같다. 식 (3)과 식 (4)가 같다고 하면 다음과 같이 정리된다. 유량 Q , 수로 경사 i , 측벽경사 r 과 수로바닥 폭 b 등은 주어진다고 가정한다.

$$\left(\frac{Q}{\nu b} \right)^{2+\beta} = \frac{gid^3}{\nu^2} \frac{(1+rD)^3 (1+2D\sqrt{1+r^2})^{\beta-1}}{\alpha} \quad (5)$$

식 (5)와 같이 좌변과 우변을 일치시킨 후, 수식의 단순성과 일반성을 얻을 수 있도록 무차원수를 도입한다.

$$\frac{gid^3}{\nu^2} = \left(\frac{\nu d}{Q} \right)^3 \frac{gb^5 i}{Q^2} \left(\frac{Q}{\nu b} \right)^5 \quad (6)$$

여기서 다음과 같은 무차원수가 도입되었다.

$$S = \frac{\nu d}{Q}, \quad B = \frac{\nu b}{Q}, \quad F = \frac{Q}{\sqrt{gb^5 i}}$$

이들 무차원수를 대입하여 S 에 대하여 다음과 같이 정리할 수 있다.