

## 회전원판의 진동 특성 감시

o안 태길\* C.D. Mote, Jr.\*\*

### Monitoring the Vibration Characteristics of a Rotating Disk

T.K. Ahn C.D. Mote, Jr.

#### ABSTRACT

A modal testing method to monitor modal characteristics of a rotating disk, such as the mode and its motion relative to the disk, is presented in this paper. It is shown through measurements that this method can be applied to monitor the vibration characteristics of a rotating disk under operating conditions.

#### 1. 서론

회전 원판은 원형 톱, 디스크 드라이브와 같은 회전 기기에서 기본이 되는 기계요소이다. 회전원판의 측방향 진동은, 원형 톱의 경우에는 재료손실과 가공물의 정도에 악영향을 미치고 디스크 드라이브의 경우에는 정보의 원활한 전달을 방해하게 된다. 이러한 이유로 회전원판의 진동에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다[1-4]. 정지해 있는 원판의 진동은 소위 forward traveling wave와 backward traveling wave라 불리는 두 진행파의 합성으로 이루어진다. 회전속도는 forward wave의 진행속도를 증가시키고 따라서 고정좌표계에 대한 주파수를 증가시키게 된다. 한편 backward wave의 고정좌표계에 대한 주파수는 회전속도가 증가함에 따라 감소하게 된다. 결과적으로, 회전원판의 동일 모드수의 고유진동수는 두 개가 존재하게 되고 주파수 크기에 따른 모드들의 순서는 정지원판의 순서와 다르게 된다. 또한 회전원판의 고유진동수는 원판의 온도분포에 의해서도 영향을 받게

되므로[1] 운전중의 회전원판의 진동특성과 안전성을 파악하기 위해서는 운전 중에 회전원판의 진동 특성을 감시할 수 있는 방법이 필요하다.

회전원판의 진동특성을 파악하는 기존의 방법은 정지원판의 고유진동수를 측정후 회전수를 조금씩 증가시키며 각 모드의 고유진동수의 변화를 추적하는 것이었다[2]. 그러나 이러한 방법은 시간이 많이 필요하므로 운전중인 원판의 진동특성을 간단하게 감시할 수 있는 방법에 대한 연구가 진행되어 왔다[5-7].

본 연구에서는 축대칭 회전원판의 진동특성, 즉 반경방향 모드(nodal diameter mode)와 고유진동수를 운전 중에 감시할 수 있는 방법을 제안하였으며 그 유용성을 검토하였다.

#### 2. 이론적 배경

공간에 고정된 측방향 집중하중을 받는 축대칭 회전원판의 진동은 정지원판이 측방향 회전 집중하중을 받는 것으로 생각할 수 있다. 이때 원판의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$D \nabla^4 w + \rho h w_{tt} = f \quad (1)$$

중량의 고정 경계조건은

\* 호서대학교 기계공학과

\*\* U.C. Berkeley Dept. of Mech. Eng.

$$w_{rr} + \left( \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} \right)_r + \frac{1-\nu}{r^2} \left( w_r - \frac{w}{r} \right)_{\theta\theta} = 0 \quad (2)$$

$$w_{rr} + \nu \left( \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} \right) = 0 \quad (3)$$

과 같고 원주의 자유 경계조건은 다음과 같다.

$$w = 0 \quad (4)$$

$$w_r = 0 \quad (5)$$

위에서 각 변수들은 다음과 같다.

- $h$  = 원판의 두께
- $f$  = 축방향 가진력
- $r$  = 반경방향 좌표
- $t$  = 시간
- $w$  = 축방향 변위
- $\rho$  = 원판의 밀도
- $\nu$  = 포아송 비
- $\theta$  = 고정좌표계의 원주방향
- $D$  = 굽힘 강성  $[Eh^3/12(1-\nu^2)]$
- $E$  = 영계수

축방향의 집중하중,  $F e^{i\omega t}$  가 원판의 주위 ( $r=r_0$ )를 반시계 방향으로 일정한 속도,  $\omega_r$ 로 회전할 때, 원판의  $(m,n)$  모우드에서의 무차원화된 응답은 다음과 같이 표현된다[4].

$$W_{(m,n)} = Z^f e^{i\theta} e^{i(\Omega - n\Omega_r)\tau} + Z^b e^{-i\theta} e^{i(\Omega + n\Omega_r)\tau} \quad (6)$$

여기서

$$W = w(r, \theta, t) / w_{ref}(r), \quad (7)$$

$$w_{ref}(r) = \frac{FA_{mn}(r)}{\rho h \omega_{mn}^2 \eta}, \quad (8)$$

$$Z^b = \eta / [1 - (\Omega + n\Omega_r)^2 + i\eta], \quad (9)$$

$$Z^f = \eta / [1 - (\Omega - n\Omega_r)^2 + i\eta], \quad (10)$$

$$\Omega = \omega / \omega_{mn}, \quad \Omega_r = \omega_r / \omega_{mn}, \quad \tau = \omega_{mn} t \quad (11)$$

$m$ 은 nodal circle의 수,  $n$ 은 nodal diameter의 수,  $\omega_{mn}$ 은  $(m,n)$ 모우드의 고유진동수,  $A_{mn}(r)$ 은 Bessel function들의 조합이며  $\eta$ 는 structural damping이다.

고정좌표계는 하중 기준좌표계와 다음과 같은 관계를 갖는다.(Fig. 1 참조)

$$\phi = \theta - \Omega_r \tau \quad (12)$$

하중 기준좌표계  $(r, \phi)$ 에 대한 무차원 응답은 다음과 같이 표현된다.

$$W_{(m,n)}^\phi = (Z^f e^{i\theta} + Z^b e^{-i\theta}) e^{i\Omega_r \tau} \quad (13)$$

$(m,n)$  모우드의 응답  $W^\phi$ 는 가진력의 주파수가 다음의 관계를 만족할 때 공진을 일으키게 된다.

$$1 - (\Omega \pm n\Omega_r)^2 = 0, \quad (14)$$

식(9)와 (10)으로부터  $\Omega = 1 - n\Omega_r$  일 때,  $\Omega_r$ 이 영 근처가 아니거나,  $\Omega$ 가 영 근처가 아니라면

$|Z^f|$ 는  $|Z^b|$ 에 비하여 무시할 만 하게 된다.

즉 원판이 거의 정지해 있거나 원판의 속도가 임계속도(critical speed) 근처가 아니라면 하중 고정좌표계에 대한 원판의 응답은 반시계 방향으로 회전하는 진행파가 된다. 가진력이 forward wave의 주파수와 일치하는 경우에는 시계방향의 진행파가 된다.

### 3. 모우드 해석

식(13)으로부터 가진력이 backward wave ( $\Omega = 1 - n\Omega_r$ )를 가진했을 때 원판의 응답은 다음과 같이 표현된다.

$$W_{(m,n)b}^\phi = [ |Z^f(\Omega)| e^{i(n\phi + \alpha')} + e^{-i(n\phi + \pi/2)} ] e^{i\Omega_r \tau} \quad (15)$$

$$\approx e^{-i(n\phi + \pi/2)} e^{i(1 - n\Omega_r)\tau} \quad (16)$$

if  $|Z^f(\Omega)| \ll 1$  (3.1 참조)

여기서  $\alpha'$ 는  $Z^f(\Omega) [= \eta / \{4n\Omega_r(1 - n\Omega_r) + i\eta\}]$ 의 위상이다. 하중 기준좌표계의  $\phi_1$  위치에서 모우드  $(m,n)_b$ 의 응답은

$$W_{(m,n)_b}^{\phi_1} = e^{-i(n\phi_1 + \pi/2)} e^{i(1 - n\Omega_r)\tau} \quad (17)$$

과 같고  $\phi_2 (= \phi_1 + \Delta\phi)$ , 위치의 응답은 다음과 같이 얻어진다.

$$W_{(m,n)_b}^{\phi_2} = e^{-i(n\phi_1 + \pi/2 + n\Delta\phi)} e^{i(1 - n\Omega_r)\tau} \quad (18)$$

식(17)과 (18)로부터 두 응답사이의 위상차는 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_{12} = \angle W_{(m,n)_b}^{\phi_2} - \angle W_{(m,n)_b}^{\phi_1} = -n\Delta\phi \quad (19)$$

식(19)의 관계에서 nodal diameter 수  $n$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$n = -\alpha_{12} / \Delta\phi \quad (20)$$

forward wave를 가진하게 되면,  $\alpha_{12}$ 는 식(19)와 같은 값을 가지나  $\Delta\phi$ 의 부호가 반대가 된다. 따라서,  $\Delta\phi$ 를 알면, 두 응답의 위상차로부터 nodal diameter 수와 진행파의 방향을 알아낼 수 있다. 가진력에 대한 원판의 응답은 각 모우드의 선형결

합(linear superposition)으로 나타내어질 수 있으므로 식(19)의 관계는  $n=0$  를 제외한 모든 모드에서 성립하게 된다.

### 3.1 오차 분석

식(13)에서 하중 기준좌표계에 대한 무차원 모우드 응답은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$W_{(m,n)}^{\phi} = \begin{bmatrix} |Z^f| \cos(n\phi + \alpha^f) + |Z^b| \cos(-n\phi + \alpha^b) \\ + i [ |Z^f| \sin(n\phi + \alpha^f) + |Z^b| \sin(-n\phi + \alpha^b) ] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$= Re + i Im \quad (22)$$

여기서  $\alpha^f$  와  $\alpha^b$  는 복소수  $Z^f$  와  $Z^b$  의 위상이다.

$W_{(m,n)}^{\phi}$  의 위상은 다음과 같이 주어진다.

$$\angle W_{(m,n)}^{\phi} = \tan^{-1}(Im/Re) \quad (23)$$

식(23)으로부터 구하여지는 두 모우드 응답사이의 위상차와 식(19)와의 오차는 다음과 같다.

$$Err = [ \angle W_{(m,n)}^{\phi_2} - \angle W_{(m,n)}^{\phi_1} ] + n\Delta\phi \quad (24)$$

오차는  $\Omega$ ,  $\Omega_r$ ,  $\eta$ ,  $n$ ,  $\Delta\phi$ ,  $\phi_1$  의 함수이다. 이러한 변수들이 오차에 미치는 영향을 알아보기 위하여 다음과 같은 조건에서 오차를 계산하여 보았다.

$$\phi_1 = 0, \quad \Omega = 1 - n\Omega_r, \quad \eta = 0.001,$$

$$0 \leq \frac{n\Omega_r}{\eta} \leq \frac{1}{\eta}, \quad 0 \leq n\Delta\phi \leq 180^\circ$$

그 결과는 Fig. 2에 나타나 있으며,  $n\Omega_r/\eta$  가 영과  $1/\eta$  부근, 즉 정지상태거나 임계속도부근에서 오차값이 매우 큰 것을 알 수 있다. 이것은 식(13)의  $|Z^f|$  가  $|Z^b|$  와 비슷하게 되어 하중 기준좌표계에 대한 모우드 응답이 진행파가 아닌 정지파(standing wave)에 가까워지기 때문이다. 두 위치사이의 각도  $\Delta\phi$  가 오차에 미치는 영향은 회전속도에 의한 영향과 비교하여 볼 때 무시할 만하다. 참고로, 가진주파수가 고유진동수와 일치하지 않을 때에도 오차가 발생한다. 그러나  $|Z^f|$  가  $|Z^b|$  에 비하여 무시할 만 하면, 두 응답사이의 위상차는  $n\Delta\phi$  만의 함수가 된다. 따라서 가진 주파수가 고유진동수와 정확히 일치하지 않아도 식(19)의 관계는 안정적으로 성립하게 된다.

### 4. 실험

앞에서 제시한 방법의 유용성을 검증하기 위하여 얇은 강철 원판을 이용하여 실험을 수행하였다. 원판의 바깥지름은 408 mm, 고정부의 지름은 229 mm, 두께는 1 mm 였다. 원판의 바깥지름 부근에 고정된 마그네틱 가진기를 이용하여 랜덤가진하였으며, 두 개의 eddy-current 형식의 변위센서를 이용하여 원판의 진동을 측정하였다. 두 센서는 원판의 중심으로부터 동일한 반경에 위치하였으며 둘 사이의 각도는  $22^\circ$  정도였다(Fig. 3).

각 위치에서 동시에 측정된 원판 변위의 파워 스펙트럼과 두 변위사이의 크로스 스펙트럼은 20 번의 평균을 취하여 계산하였다. 회전원판의 고유진동수는 파워 스펙트럼으로부터, 그때의 두 변위사이의 위상차는 크로스 스펙트럼으로부터 구하였다.

측정된 고유진동수와 두 신호사이의 위상차는 Fig. 4, 5 와 같다. 그 결과를 살펴보면 위상차와 모우드와의 관계가 식(19)와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 또한 이러한 관계는 고유진동수에서만 성립하므로 파워 스펙트럼의 peak가 고유진동수인지 회전수에 관련된 고조파(harmonics)인지를 판단할 수 있다.

### 5. 결론

회전원판의 nodal diameter 수와 진행파의 방향을 규명할 수 있는 모우드 해석 방법을 제안하였다. 실험장치와 신호처리가 비교적 간단하여 운전 중에 회전원판의 진동특성을 실시간으로 파악할 수 있다. 또한 정지원판에 대한 모우드 정보없이 회전원판의 각 모우드를 규명할 수 있으며 랜덤가진을 이용하여 몇 개의 모우드를 동시에 규명할 수 있다.

### 참고문헌

1. C.D. Mote, Jr. and J.E. Rakowski, 1969, "Thermally Induced Natural Frequency Variations in a Thin Disk," *Experimental Mechanics*, Vol. 9, pp. 1-8.
2. C.D. Mote, Jr., 1970, "Stability of Circular Plates Subjected to Moving Loads," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 290, pp. 329-344.

3. C.D. Mote, Jr. and R. Szymani, 1978, "Circular Saw Vibration Research," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 10, pp. 15-30.
4. Y. Honda, H. Matsuhisa and S. Sato, 1985, "Modal Response of a Disk to a Moving Concentrated Harmonic Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, pp. 457-472.
5. C.J. Radcliffe and C.D. Mote, Jr., 1983, "Identification and Control of Rotating Disk Vibration," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 105, pp. 39-45.
6. A.B. Stanbridge and D.J. Ewins, 1995, "Modal Testing of Rotating Discs Using a Scanning LDV," *The 15th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Boston, MA, DE-Vol. 84-2, pp. 1207-1213.
7. H. Irrerier and F. Reuter, 1995, "Experimental Modal Analysis of Rotating Disk Systems," *The 15th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Boston, MA, DE-Vol. 84-2, pp. 1201-1206.

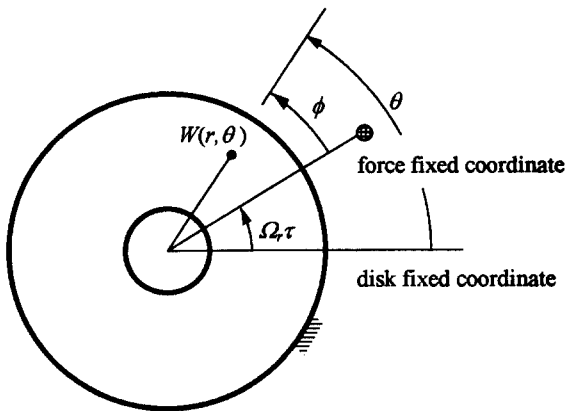


Figure 1. Coordinate systems.

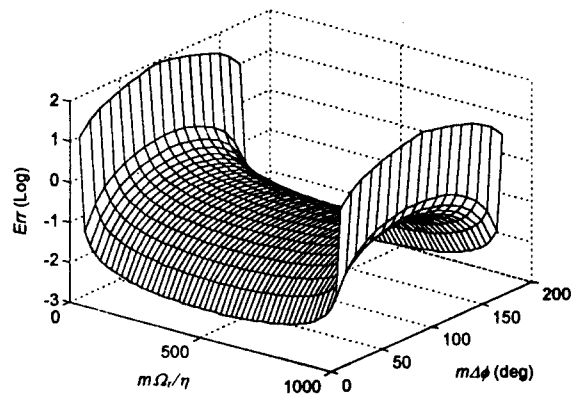


Figure 2. Error values of (24) for  $\phi_1 = 0$  and  $\eta = 0.001$ .

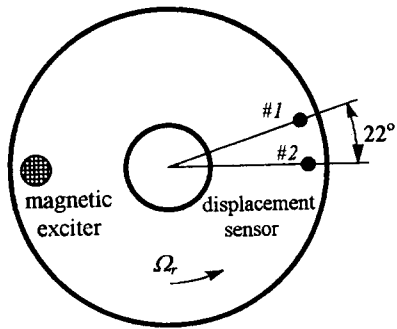


Figure 3. Experimental setup.

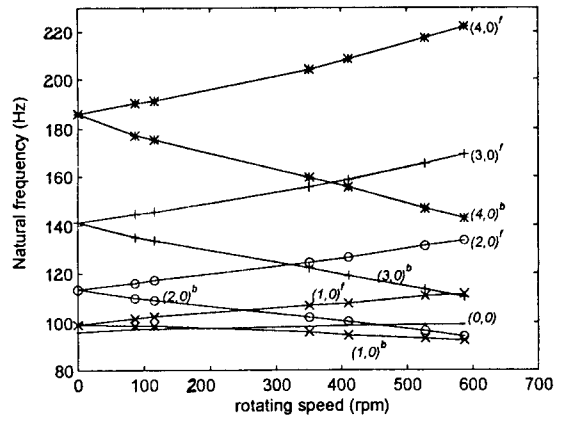


Figure 4. Natural frequencies for the disk.

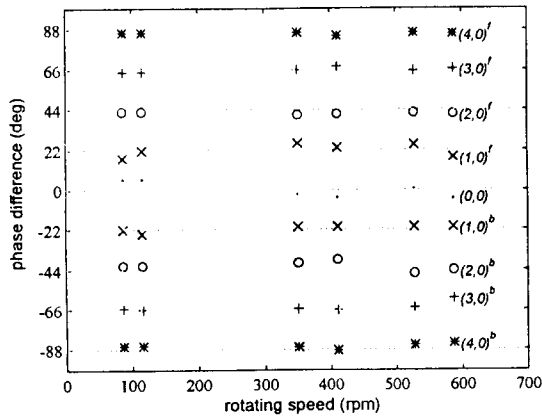


Figure 5. Phase differences between two displacement signals for the disk.