

원판이 결합된 외팔 원통셀의 고유진동 특성 해석

(○) 임 정 식¹⁾, 이 영 신²⁾, 손 동 성¹⁾

Free Vibration Analysis of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells with Plate Attached at Arbitrary Axial Positions

Jeong-Sik YIM, Young-Shin LEE, D.S.Sohn

A b s t r a c t

A theoretical formulation for the analysis of free vibration of clamped-free cylindrical shells with plates attached at arbitrary axial positions was derived and it was programmed to get the numerical results which yield natural frequencies and mode shape of the combined system of plate and shells.

The frequencies and mode shapes from theoretical calculation were compared with those of commercial finite element code, ANSYS as well as modal test in order to validate the formulation. The effects of the thickness and location of the plate were evaluated.

1. 서 론

원통 셀에 원판이 부착된 구조물의 고유진동 해석은 그 동안 여러 해석 방법과 연구자에 의해 연구되었고 이들 대부분의 해석이 경계조건이 대칭인 양단단순지지 경계조건에 한하여 해석[1,2,3,4]되어 왔는데 이것은 경계조건이 대칭이 되는 양단 단순지지 경계조건에서는 변위함수의 가정을 대칭이 되는 삼각함수를 사용하여 가정할 수 있으므로써 수식의 전개가 간단하여 해를 구하기가 용이하기 때문에 생각된다. 최근에는 컴퓨터의 발달과 함께 유한요소법에 의한 접근 방법이 두드러지며 복잡한 형상의 구조물에 대한 해석이 비교적 자유로우나 유한요소법 또한 장점과 함께 입력준비에 드는 수고와 결과 처리에 대한 많은 시간을 요하는 단점을 가지고 있는 불편함이 있다. 이러한 단점을 보완하고자 축방향 임의 위치에 원판이 부착된 외팔 경계조건을 갖는 원통 셀의 고유진동해석에 대한 수식전개를 통해 수치해를 얻고 유한요소해석의 결과 및 시험의 결과를 통해 수식의 타당성을 검토한 후, 원판의 두께 및 원판의 축방향 접합 위치에 따른 고유진동의 영향을 평가하였다.

2. 이론적 배경

2.1 횡방향 등적 하중에 의한 셀의 변위 및 기울기

한 구조물의 변위는 모드 기여 계수와 그 모드에서의 모달변위를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_i(a_1, a_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(a_1, a_2) \quad (1)$$

여기서 사용되는 모드 기여계수는 다음의 모드 기여계수 방정식의 근이다.

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k^* e^{i\omega t} \quad (2)$$

여기서

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} (q_1^* U_{1k} + q_2^* U_{2k} + q_3^* U_{3k}) A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (3)$$

$$N_k = \int_{a_1} \int_{a_2} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2) A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (4)$$

이다[1]. 여기서 사용하는 하중함수 q_1, q_2, q_3 는 각각의 셀 좌표방향으로의 입력으로 주어지는 주기력으로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_i(a_1, a_2, t) = q_i^*(a_1, a_2) e^{i\omega t}, \quad i=1,2,3 \quad (5)$$

식 (2)의 해는 정상상태에서는 조화적이고 위상각(phase angle) ϕ_k 를 사용하여 k번째 모드에서의 모드 기여계수를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1) 정희원 : 한국원자력연구소
2) 정희원 : 충남대학교공대기계설계공학과

$$u_i(a_1, a_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(a_1, a_2) \quad (6.a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} e^{j\omega t} U_{ik}(a_1, a_2) \quad (6.b)$$

원판이 셸의 축방향 위치 $x = x^*$ 에서 원통의 내부에 부착되어 있을 경우는 원판 구속으로부터 발생된 셸의 반경방향의 동적 횡방향력(dynamic excitation)은 Dirac Delta 함수를 사용하여 (7)과 같이 쓸 수 있다.

$$q_3(x^*, \theta, t) = F_o \cos \hat{n} \theta \delta(x - x^*) e^{j\omega t} \quad (7)$$

이 하중이 원통 셸에 작용할 때 식 (3)으로부터

$$F_k^* = \frac{F_o \phi(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + \int_0^L \phi^2(x) dx]} \quad (8)$$

을 얻는다. 따라서 구하여진 N_k 와 F_k^* 를 (2)식에 대입하면, k 번째까지의 모드 합으로 원통 셸의 동적 변위를 나타낼 수 있다. 즉,

$$u_{3S}(x, \theta, t) = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2)^*} \frac{F_o \phi(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + \int_0^L \phi^2(x) dx]} \quad (9)$$

분모의 보합수 적분은 참고문헌[5]에 따라 계산하여 구한다.

또 원판 부착에 따른 동적 횡방향 구속력에 의해 발생되는 원통 셸의 축방향 기울기는 (9) 식을 미분하여 얻는다. - $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2)^*}$ * 즉,

$$\theta_S(x, \theta, t) = \frac{F_o \phi(x^*) \rho_r \phi'(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (10)$$

2.2 동적 주기 모멘트에 의한 셸의 변위

주기적 횡방향 동적 모멘트 하중이 작용할 때의 변위 또한 모드 확장법을 이용하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있고, 횡방향 동적 모멘트 $M_{3S}(x^*, \theta, t)$ 에 의한 셸의 동적 응답은 다음의 식 (11)과 같다.

$$u_{3S}(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \frac{M_o}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{-\rho_r \phi'(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (11)$$

또 기울기는 변위를 미분하여 다음식을 얻는다.

$$\theta_S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \frac{M_o}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{-\rho_r \phi'(x^*) \phi'(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (12)$$

2.3 동적 주기 하중에 의한 원판의 변위

원통과 접하는 부위에서 원판에 작용하는 주기적인 힘을

$$F_{rP}(r, \theta, t) = F_{rP}(a, \theta, t) = F_{0P} \cos \hat{n} \theta e^{j\omega t} \quad (13)$$

라 하면 원판의 반경방향으로의 운동은 다음과 같이 나타낼 수 있다[1].

$$u_{rP}(a, \theta, t) = U_o \cos \theta e^{j\omega t} \quad (14)$$

댐핑이 없는 원판의 내평면 운동은 원판의 질량을 M_P 라 할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_P \ddot{\eta}_k = F_k(t) \quad (15)$$

원판의 운동은 다음식으로 표현된다.

$$M_P \ddot{u}_{rP} = \left\{ \int_0^a \int_0^{2\pi} [F_{0P} \cos \rho \theta \delta(r-a) r \cos \theta] dr d\theta \cos \theta \right\} e^{j\omega t} = \begin{cases} F_{0P} a \pi \cos \theta e^{j\omega t} & \text{for } p=1 \\ 0 & \text{for } p \neq 1 \end{cases} \quad (16)$$

(15) 식을 미분하여 (16) 식에 대입하면

$$M_P \ddot{u}_{rP} = \pi a^2 \rho h_P (-\omega^2 u_{rP}) = F_{0P} a \pi \cos \theta e^{j\omega t} \quad (17)$$

2.4 동적 모멘트에 의한 원판의 변위

원판이 원통 셸에 부착된 부위의 선 모멘트를

$$T_1(r, \theta, t) = -M_{0P} \cos \hat{n} \theta \delta(r-a) e^{j\omega t} \quad (18.a)$$

$$= -M^* \delta(r-a) e^{j\omega t} \quad (18.b)$$

라 할 때 원판의 횡방향 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{u}_{3P}(r, \theta, t) = \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right] \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (19)$$

이 변위를 모달 확장식을 사용하여 나타내면

$$u_{3P}(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) U_{3k}(r, \theta) \quad (20.a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{mn}^* U_{3mn}^P(r, \theta)}{\omega_{mn}^2 - \omega_c^2} e^{j\omega t} \quad (20.b)$$

또 선 모멘트에 의한 원판의 기울기는 (20)식을 미분하여

$$\theta_P(r, \theta, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{mn}^* U_{3mn}^P(r, \theta)}{\omega_{mn}^2 - \omega_c^2} e^{j\omega t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 a \pi M_{0P}}{\rho h_P N_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \left[J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a) \right]^2 \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (21)$$

(22)

2.5 축방향 임의 위치에 원판이 부착된 외팔 원통 셀의 고유진동 해석

원판과 원통 셀 접합부위의 하중/변위관계로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

동적응답 β_{12} 와 β_{21} 은 원판의 내평면 운동과 원판의 횡방향 운동의 연성이 없으므로 영이다.

이에 따라 하나의 원판이 원통 셀의 임의 위치에 부착되어 있는 경우에 구해야 할 동적응답은 다음과 같다.

가) 셀의 동적응답

횡방향 동적 가진에 의한 동적 응답은 변위 표현식 (9)와 (10)으로부터

$$a_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)^2} * \frac{\phi(x^*) \phi(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (24)$$

$$a_{21} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)^2} * \frac{p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (25)$$

또 동적 모멘트에 의한 셀의 동적 응답은 $x=x^*$ 에서 다음의 식 (26),(27)과 같다.

$$a_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)^2} * \frac{-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (26)$$

$$a_{21} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)^2} * \frac{-p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (27)$$

나) 원판의 동적응답

구해야 할 원판의 응답은 연성되어 영이 되는 두 개를 제외한 β_{11} 과 β_{22} 이다.

따라서 원판의 동적응답 β_{11} 은 식 (17)에서

$$\beta_{11} = \frac{u_{rr}(a, \theta, t)}{F_{rr}(a, \theta, t)} \quad (28.a)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{a \rho h_p \omega^2} & \text{for } \hat{n} = 1 \\ 0 & \text{for } \hat{n} \neq 1 \end{cases} \quad (28.b)$$

다음으로 선 모멘트에 의한 원판의 동적응답은 식

(22)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\beta_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \lambda^2 a}{\rho h_p} \frac{[J_{n+1}(\lambda a) - J_n(\lambda a)/I_n(\lambda a) * I_{n+1}(\lambda a)]^2}{N_{mn}(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \quad (29)$$

다) 진동수 방정식 및 모드형상

원판과 원통 셀의 접합 경계에서의 연속조건을 적용하여 얻은 식 (23)에서 무용해를 얻지 않기 위한 조건으로부터 다음의 진동수 방정식(Frequency Response Equation : FQE)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

식 (30)을 전개한 진동수 방정식은 특이점을 갖는 비선형 방정식으로서 수치적인 방법에 의해 해를 구해야 하며 이로부터 구한 조합 원통 셀의 진동수를 이용하여 모멘트/하중비를 구한 후 (9)와 식 (11)을 이용하여 셀의 모드형상을 구할 수 있고, 원판의 모드형상은 (20)식에서 얻는다.

3. 결과 및 고찰

3.1 고유진동수 및 모드형상

Fig.1과 Fig.2는 중간에 원판이 부착된 외팔 원통 셀의 축방향 반파수 $M=1,2$ 에서 고유진동모드이며 Fig.3과 Fig.4는 원판의 진동모드이다. Fig.5는 상단에 원판이 부착된 경우의 수치계산과 유한요소 해석 및 시험결과로 얻은 고유진동수의 비교를 보이고 있고 축방향 모드 $M=1$ 및 2,3에서 세 경우 잘 대응함을 보이며 시험의 결과는 수치해 및 ANSYS[6] 결과에 비해 상대적으로 낮은 값을 보인다.

축방향 중간 위치에 원판이 부착된 경우의 고유진동수를 이론해 및 유한요소 해석, 시험의 결과를 동시에 나타내면 Fig.6과 같다.

3.2 원판 두께가 고유진동수에 주는 영향

부착되는 원판의 두께가 조합 원통 셀의 고유진동수에 주는 영향을 알아보기 위하여 상단에 원판이 부착된 경우를 택하여 원판의 두께를 변화시켜 가며 진동수를 구하여 그림으로 나타내면 축방향 모드수 $M=1,2$ 에서 Fig.7, Fig.8과 같다. Fig.7에서 보면 원판의 부착에 의해 축방향 반파수 $M=1$ 에서 원판의 두께가 얇은 경우인 $h_p=0.5 \text{ mm}$ 일 때 원판의 진동이 지배적인 낮은 진동수 영역이되어 원주방향 파수 증가에 따라 원판의 진동수 변화와 같은 선형의

진동수 변화를 보이고, 원판의 두께가 증가할수록 가장 낮은 진동수를 보이는 $N=0$ 에서의 진동수가 원판의 진동수 증가에 기인하여 조합 원통 셀의 진동수는 외팔 원통 셀만의 진동수에 접근하는 증가경향이 뚜렷하게 보인다. 특히 원통 셀의 최저진동수를 보이는 $N=2$ 에서의 기본진동수에서 원판의 두께가 두꺼울 때 진동수의 증가가 현격하며 원주방향 파수에 따른 진동수의 변화는 보강링을 갖는 원통 셀의 진동수의 변화 추이(6)와 유사한 경향을 보임을 알 수 있다. 또 $N=1$ 에서는 원판의 두께 영향을 거의 받지 않고 있는데 이는 $N=1$ 의 진동모드는 보의 진동모드(swaying or bam mode)를 보이므로 원판의 진동과 무관하는데 기인한다. 외팔 원통 셀만의 진동수와 원판이 부착되었을 경우의 진동수를 비교해 보면 원판의 부착에 의해 원주방향 파수가 작은 곳에서는 원판의 낮은 진동수에 의해 고유진동수의 큰 감소를 보이고 원주방향 파수가 증가되면 원판의 부착에 의한 고유진동수의 변화에 주는 영향은 크지 않고 원래의 원통 셀의 진동수 변화와 유사함을 보인다.

3.3 원판부착 위치가 고유진동수에 주는 영향

Fig.9, Fig.10은 원판이 부착되는 축방향 위치에 따라 나타나는 진동수의 변화를 보인다. Fig.9에서 축방향 모드 $M=1$ 에서 $N=0$ 와 $N=1$ 모드는 부착되는 축방향 위치에 관계없이 거의 동일한 고유진동수를 보이는데 이것은 이 모드의 진동이 원판지배 진동모드이기 때문이며, 셀만의 진동수에서 최저진동수를 보이는 $N=2$ 에서의 기본진동수는 원판부착의 위치에 따라 가장 큰 진동수 증가의 효과를 보이고 가장 큰 진동수 증가를 보이는 원판부착 위치는 셀 길이의 $3/4$ 의 위치에 부착될 때이며, 축방향 위치가 $1/4$ 에 원판이 부착될 때에는 기본진동수에 주는 증가는 크지 않음을 보인다. 이러한 축방향 위치에 따른 원판의 진동수에 주는 영향은 $N=3$ 까지이고 그 이상의 원주방향 파수에서는 원판의 부착 위치에 따른 고유진동수의 변화는 크지 않다.

Fig.10은 원판의 축방향 부착위치에 따른 진동수 변화를 축방향 반파수 $M=2$ 에서 원주방향 파수 변화에 따른 영향을 보이는 그림이며, 원판의 부착 위치에 따라 고유진동수가 $N=0,1$ 에서는 감소하며 $N=1$ 모드는 원판의 진동과 무관한

보형상의 진동모드이므로 원판 부착에 따른 영향은 나타나지 않고 원판 부착위치에 따른 진동수의 증가가 가장 큰 경우는 $N=2,3,4$ 에서 축방향 중간에 원판이 부착될 경우로서 이것은 $M=2$ 의 진동모드는 셀 길이의 중간에서 가장 큰 진동 모드를 보이므로(Fig. 1,2 참조) 이 진동을 구속하는데 필요한 에너지가 가장 크게 기여하기 때문으로 해석된다.

4. 결론

비대칭 경계조건을 갖는 외팔 원통 셀의 축방향 임의 위치에 원판이 부착되어 있을 경우의 고유진동해석을 동적 응답법을 사용한 이론적인 수치전개를 통해 수치해를 얻고 시험 시편을 이용한 고유진동시험과 비교하여 이론적 수치해의 타당성을 확인하고 ANSYS의 결과 및 시험의 결과와 비교 검토하였다. 이들로 부터 다음의 결론을 얻었다.

- 1) 이론적으로 얻은 수치해는 ANSYS의 해석 결과와 잘 일치하는 경향을 보이고 시험의 결과와도 서로 잘 대응함을 보인다. 이론해로부터 얻은 진동수의 계산 결과는 시험에서 얻은 결과보다 높은 값을 보이며 이는 Rayleigh-Ritz법을 사용한 외팔 원통셀만의 진동수 계산의 영향으로 보인다.
- 2) 이론해석 계산에 의한 모드 형상 또한 시험 및 ANSYS의 결과와 서로 잘 대응함을 보인다.
- 3) 원판의 두께 및 부착 위치가 조합 원통 셀의 고유진동수에 주는 영향 평가로부터 부착되는 원판의 두께가 작으면 원판의 낮은 진동수의 진동 모드가 지배적이 되어 원주방향 파수 증가에 따라 셀의 진동수 변화보다는 원판의 진동수와 유사한 변화추이를 보이고 원주방향 파수 $N=0$ 모드에서는 원판 부착이 진동수를 상당히 감소시키는 것을 보인다. 보 형상의 진동모드를 보이는 $N=1$ 모드에서는 원판의 두께 영향이 진동수에 주는 영향은 크지 않으며 타원형 진동모드를 보이는 $N=2$ 에서는 원판이 부착되므로써 진동수의 증가에 가장 크게 기여를 하고, 원주방향 파수 N 이 증가하면 원판 부착이 진동수에 주는 영향은 작아진다.
- 4) 원판부착 위치에 따른 진동수 변화는 셀의 진동이 가장 크게 나타나는 원주방향 파수 $N=2$ 에서이며 N 이 증가 할수록 셀의 진동이 지배적으로 되어 원판이 진동수에 주는 영향은

작게 나타난다.

참 고 문 헌

- 1.W.Soedel, Vibration of shells and plates, Marcel Dekker Inc.,New York,1981
- 2.D.T.Huang and W.Soedel, "Natural frequencies and modes of a circular plate welded to a circular cylindrical shell at arbitrary axial positions", J. of sound and vibration, 1993, Vol.162, No.3,pp403-427
- 3.D.T.Huang and W.Soedel, "Study of the forced vibration of shell-plate combinations using the receptance method", J. of sound and vibration, 1993, Vol.166.No.2,341-369
- 4.D.T.Huang and W.Soedel,"On the free vibration of multiple plates welded to a cylindrical shell with special attention to mode pairs", J. of sound and vibration, 1993, Vol.162, No.3,pp315-339
- 5.J.S.Yim,Y.S.Lee,D.S.Shon,"Free vibration analysis of clamped-free and clamped-free with ring stiffened circular cylindrical shells", Advance in Comput. method for simulation, Civil-comp. press, Edinburg, 1996,pp247-252
- 6.Swanson Systems Inc.,ANSYS Ver.5.1 User's manual

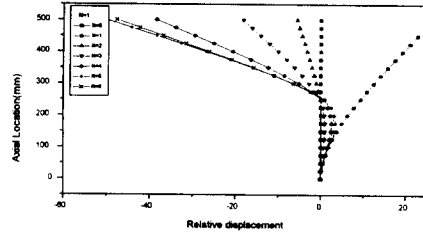


Fig.1 Mode shapes of M=1 for shell with plate at center

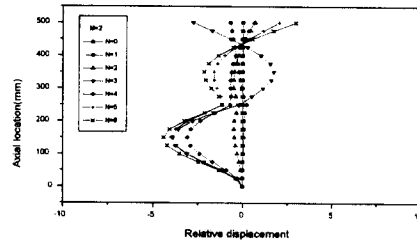


Fig.2 Mode shapes of M=2 for shell with plate at center

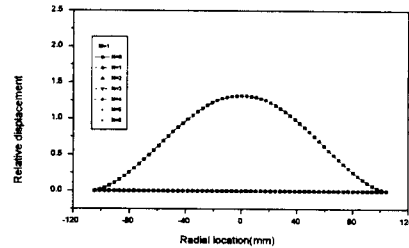


Fig.3 Mode shapes of M=1 for plate at center

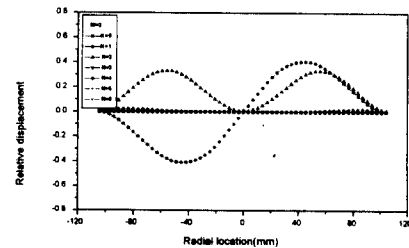


Fig.4 Mode shapes of M=2 for plate at center

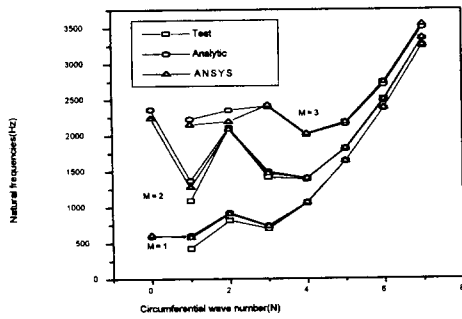


Fig.5 Comparison of natural frequencies from analytic, ANSYS and test for shell with end plate

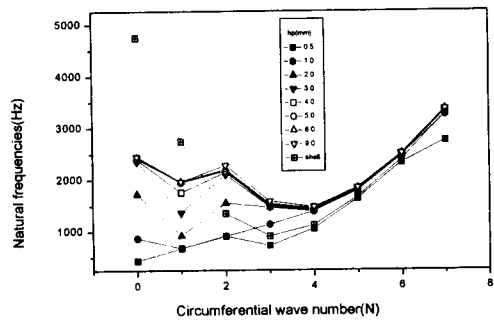


Fig.8 Natural frequencies of $M=2$ as a function of circumferential wave number for shell with end plate

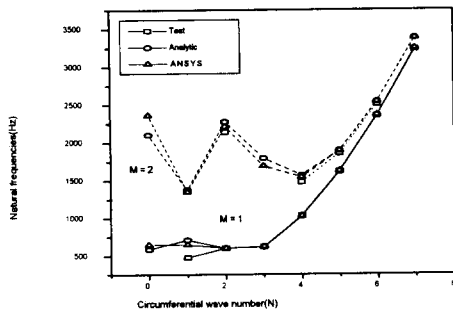


Fig.6 Comparison of natural frequencies from analytic, ANSYS and test for shell with plate at center

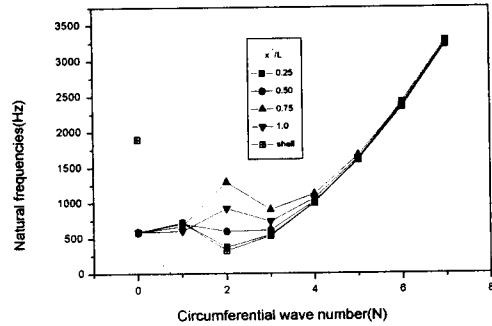


Fig.9 Natural frequencies of $M=1$ as a function of circumferential wave number for shell with end plate

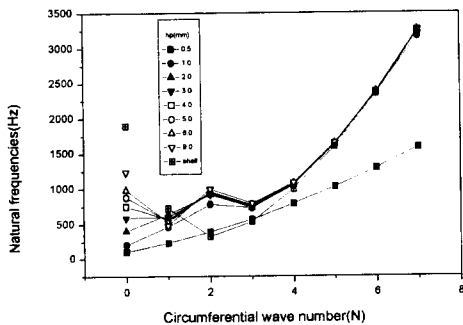


Fig.7 Natural frequencies of $M=1$ as a function of circumferential wave number for shell with end plate

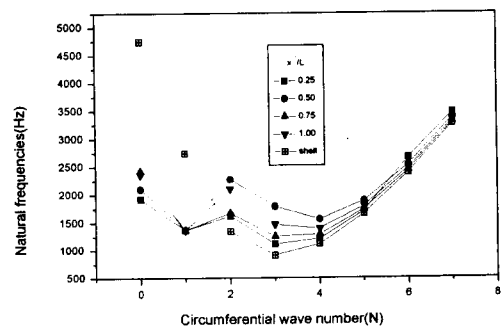


Fig.10 Natural frequencies of $M=2$ as a function of circumferential wave number for shell with end plate