한국소음진동공학회 1996년도 추계학술대회논문집, pp. 210-216.

스펙트럴요소법을 위한 새로운 동적분포하중 처리 기법에 관한 연구

[0]김주홍, 이준근**, 이우식*

A New method for the dynamic distributed loads in Spectral Element Method

Joohong Kim, Joonkeun Lee and Usik Lee

ABSTRACT

Spectral element method(SEM) has been recognized to provide accurate structural dynamic responses even at high frequency. The Duhamel's integral based SEM developed by the authors for the structures under dynamic distributed loads does not take into account the zero frequency effect and requires significant computational time due to the integration procedure of Duhamel's integral. Hence, in this paper, a new SEM algorithm is proposed. This new algorithm is based on the FEM-type procedure for the distributed loads and includes the zero frequency correction to improve the accuracy. Some numerical results are illustrated to prove the accuracy of present new SEM algorithm.

1. 서론

일반적으로 구조물의 동적응답을 얻기 위한 방법으로 유한요소법이 가장 널리 사용되어왔다. 그러나, 유한요소법은 저주파수 대역에서는 비교적 만족할 만한 동적응답을 얻을 수 있으나, 고주파수 영역에서는 그 결과를 신뢰할 수 없으며, 고주파수 영역에서 유한요소법에 의한 동적응답의 계산에는 큰 메모리 용량과 빠른 계산능력을 갖는 컴퓨터가 필요하다. 따라서, 보다 짧은 전산시간과 적은 메모리를 사용하며 고주파수 영역에서도 높은 정확도를 가지는 동적응답 계산 알고리듬이 요구된다.

이러한 요구조건을 만족하는 알고리듬중에서 Doyle[1,2] 등이 제안한 해석기법으로 스펙트럴해석법(Spectral Analysis Method : SAM)이 있다. 스펙트럴해석법은 구조물에 대한 운동방정식을 파동역학적 관점에서 해석하여 고속 푸리에 변환과 역 고속 푸리에 변환을 이용하여 구조물의 동적응답을 주파수 영역과 시간 영역 모두에서 정확하게 구해주는 해석기법이다. 이러한 특징을 가지는 스펙트럴해석법을 한 단계 발전시켜 서로 다른 물성치나 구조적 특성을 갖는 복합구조물에 스펙트럴해석법을 적용시킬 수 있는 방법을 스펙트럴요소법(Spectral Element Method : SEM)이라고 한다.

Gopalakrishhan[3] 등은 스펙트럴해석법을 이용하여 티모센코 보의 동적거동을 고찰하였고, Rizzy[4]는 적층된 형태의 구조물에 스펙트럴해석법을 시도하였다. Lee[5] 등은 스펙트럴요소법을 이용하여 격자구조물의 진동해석을 수행하였으며, 이준근[6] 등은 스펙트럴요소를 곡선 보에 적용하여 동적응답을 계산하였다. 그러나, 동적분포하중이 작용하는 구조물의 동적거동을 해석한 연구는 이우식[7] 등이 수행한 경우를 제외하고는 거의 연구되지 않았다. 기존의 연구에서 제시한 동적분포하중에 대한 알고리듬은 수치적분을 이용하기 때문에 많은 계산시간이

[0] 인하대학교 대학원
** 인하대학교 대학원
* 정회원, 인하대학교 기계공학과

필요하고, 알고리듬이 복잡하다.

따라서, 본 연구에서는 이러한 단점을 극복한 (1) 동적분포하중이 가해지는 보에 대한 스펙트럴요소를 유도하고 (2) 주파수가 0 Hz일 때, 정확한 해를 얻을 수 있는 방법을 제시하였다. 제시된 새로운 알고리듬을 이용하여 몇 가지 예제를 수행하여 본 연구의 결과가 타당함을 확인하였다.

2. 스펙트럴요소

2.1 운동방정식의 유도와 해

동적분포하중이 가해지는 오일러 보의 자유물체도는 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다. Fig. 1에 나타낸 유한요소에 대해 힘평형을 고려하면, 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x,t) \qquad (1)$$

여기서, E는 강성, I는 관성모멘트, ρ는 밀도, A는 보의 단면적이다. 모든 물리량은 유한요소 내에서 일정하다고 가정한다. 오일러 보의 스펙트럴해석을 위해 식(1)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$v(x,t) = \sum_{w=0}^{\infty} \hat{v}(x)\, e^{i\omega t} \qquad (6)$$

동적분포하중도 스펙트럴형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$p(x,t) = \sum_{w=0}^{\infty} \hat{p}(x)\, e^{i\omega t} \qquad (7)$$

식(2)과 (3)을 식(1)에 대입해서 정리하면, 공간좌표 x와 시간좌표 t 에 대한 편미분방정식을 상미분방정식으로 나타낼 수 있다.

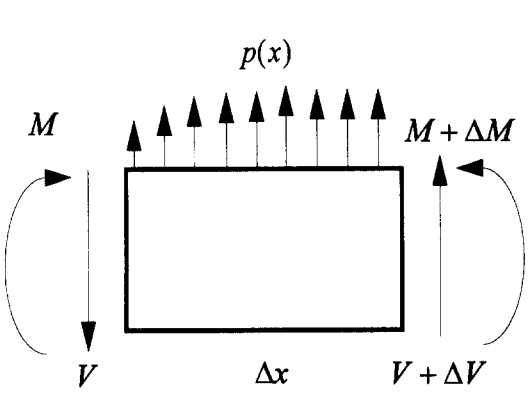

Fig. 1 Free body diagram for an Euler beam element

$$EI\frac{d^4 v}{dx^4} - \omega^2 \rho A\frac{d^2 v}{dt^2} = p(x) \qquad (4)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - k^4\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\hat{p}(x)}{EI} \qquad (5)$$

여기서, $k^4 = \omega^2 \rho A / EI$ 이다.

식(5)는 주파수를 파라미터로 가지는 상미분방정식이며, 시간에 대해서는 독립적이 되었다.

모멘트, 전단력, 분포하중은 변위와 다음의 관계를 가진다.

$$M = EI\frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \qquad (6)$$

$$V = -EI\frac{d^3 \hat{v}}{dx^3} \qquad (7)$$

$$\hat{p} = EI\frac{d^4 \hat{v}}{dx^4} - \omega^2 \rho A\, \hat{v} \qquad (8)$$

식(5)의 해는 제차해와 특이해로 구성되어지며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{v}(x) &= \hat{v}_h + \hat{v}_p \\ \hat{v_h}(x) &= a_1 \cos(k x) + a_2 \sin(k x) \\ &\quad + a_3 \cosh(k x) + a_4 \sinh(k x) \\ &\quad + w(x) \\ \hat{v}_p(x) &= w(x) \end{aligned} \qquad (9)$$

여기서, a_1, a_2, a_3, a_4는 경계조건에 의해 결정되며, $w(x)$는 식(8)을 만족하는 임의의 함수이다.

2.2 스펙트럴요소행렬

스펙트럴요소법을 사용하기 위해서는 운동방정식을 스펙트럴요소로 표현해야한다. 여기서는, 이에

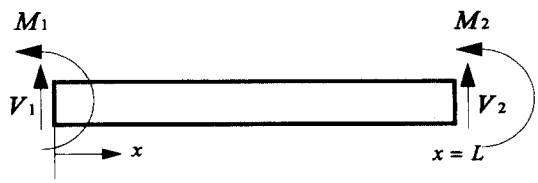

Fig. 2 Sign convention for an Euler beam element.

필요한 스펙트럴요소행렬을 유도하고자 한다.

스펙트럴요소행렬을 유도하기 위한 보에 대한 부호규약은 Fig. 2와 같다. 식(9)에 유도되어진 동적분포하중을 받는 오일러 보의 일반해에서 분포하중이 없는 경우에 대한 스펙트럴요소의 형상함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= a_1\cos(k\,x) + a_2\sin(k\,x)\\ &\quad + a_3\cosh(k\,x) + a_4\sinh(k\,x)\end{aligned} \tag{10}$$

x = 0 일 때의 변위와 기울기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{v}(0) &= \hat{v}_1 = a_1 + a_3\\ \frac{d\hat{v}}{dx}(0) &= \hat{v}_1' = k\,a_2 + k\,a_4\end{aligned} \tag{11}$$

스펙트럴요소 내에서의 임의의 점에서의 보의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}k\,\hat{v}(x) &= a_1 k(\cos kx - \cosh kx)\\ &\quad + a_2 k(\sin kx - \sinh kx)\\ &\quad + \hat{v}_1\,k\cosh kx + \hat{v}_1'\sinh kx\end{aligned} \tag{12}$$

식(11)와 (12)를 식(10)에 대입하여 정리하면 다음의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (C-Ch) & (S-Sh)\\ -(S+Sh) & (C-Ch)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{v}_1\,kL\,Ch - \hat{v}_1'\,L\,Sh + \hat{v}_2\,kL\\ -\hat{v}_1\,kL\,Sh - \hat{v}_1'\,L\,Ch + \hat{v}_2'\,kL\end{Bmatrix}\frac{1}{kL} \tag{13}$$

여기서, $C=\cos kL$, $S=\sin kL$, $Ch=\cosh kL$, $Sh=\sinh kL$ 이다. 식(13)으로부터 a_1과 a_2을 구하고, 식(11)을 노드변위로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= g_1(x)\,\hat{v}_1 + g_2(x)\,\hat{v}_1'\\ &\quad + g_3(x)\,\hat{v}_2 + g_4(x)\,\hat{v}_2'\end{aligned} \tag{14}$$

여기서,

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \frac{z_0\,h_0(x) + z_1\,h_2(x) - z_2\,h_3(x)}{2\,z_0}\\ g_2(x) &= \frac{z_0\,h_0(x) + z_3\,h_2(x) - z_1\,h_3(x)}{2\,z_0\,k}\\ g_3(x) &= \frac{z_4\,h_2(x) + z_5\,h_3(x)}{2\,z_0}\\ g_4(x) &= \frac{z_6\,h_2(x) + z_4\,h_3(x)}{2\,z_0\,k}\\ z_0 &= 1 - C\cdot Ch\\ z_1 &= S\cdot Sh\\ z_2 &= C\cdot Sh + S\cdot Ch\\ z_3 &= S\cdot Ch - C\cdot Sh\\ z_4 &= C - Ch\\ z_5 &= S + Sh\\ z_6 &= Sh - S\\ h_0(x) &= \cos kx + \cosh kx\\ h_1(x) &= \sin kx + \sinh kx\\ h_2(x) &= \cos kx - \cosh kx\\ h_3(x) &= \sin kx - \sinh kx\end{aligned}$$

식(14)를 이용하여 노드에서의 전단력과 모멘트를 노드변위로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}M(x) &= EI\frac{d^2\hat{v}}{dx^2}\\ &= EI[g_1''(x)\,\hat{v}_1 + g_2''(x)\,\hat{v}_1'\\ &\quad + g_3''(x)\,\hat{v}_2 + g_4''(x)\,\hat{v}_2']\\ V(x) &= -EI\frac{d^3\hat{v}}{dx^3}\\ &= -EI[g_1'''(x)\,\hat{v}_1 + g_2'''(x)\,\hat{v}_1'\\ &\quad + g_3'''(x)\,\hat{v}_2 + g_4'''(x)\,\hat{v}_2']\end{aligned} \tag{15}$$

식(15)로부터, 노드에서의 전단력과 모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}V_1 &= -V(0)\ ,\ V_2 = V(L)\\ M_1 &= -M(0)\ ,\ M_2 = M(L)\end{aligned} \tag{16}$$

식(15), (16)을 이용하여, 전단력과 모멘트에 대한 행렬식을 노드변위로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3 z_0} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & sym & d_{33} & d_{34} \\ & & & d_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_1' \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_2' \end{pmatrix} \quad (17)$$

여기서,

$$d_{11} = (S \cdot Ch + C \cdot Sh)(kL)^3$$
$$d_{12} = S \cdot Sh\,(kL)^2 L$$
$$d_{13} = -(S + Sh)(kL)^3$$
$$d_{14} = (Ch - C)(kL)^2 L$$
$$d_{22} = (S \cdot Ch - C \cdot Sh)\,kL^3$$
$$d_{23} = (C - Ch)(kL)^2 L$$
$$d_{24} = -(S - Sh)\,kL^3$$
$$d_{33} = (S \cdot Ch + C \cdot Sh)(kL)^3$$
$$d_{34} = -S \cdot Sh\,(kL)^2 L$$
$$d_{44} = (S \cdot Ch - C \cdot Sh)\,kL^3$$

2.3 분포하중이 고려된 스펙트럴요소행렬

분포하중이 스펙트럴요소 내에 존재할 경우, 식(17)에서와 같이 힘벡터의 요소가 전단력과 모멘트 뿐만 아니라, 분포하중에 의한 힘요소가 존재해야 한다. 그러나, 기존의 분포하중을 처리하는 알고리듬은 힘벡터를 따로 유도하지 않고 수치해석적인 접근방법을 시도하였다. 그 결과, 알고리듬이 복잡해지고 수치해석에 많은 시간이 걸리는 단점을 갖고 있었다. 이와 같은, 단점을 극복하기 위해 새로운 힘벡터의 유도가 필요하다.

힘평형을 이용하여 스펙트럴요소행렬을 유도할 경우, 유도과정이 복잡해지고 분포하중에 대한 항들을 정확히 구분하기 어려우므로 분포하중이 가해지는 스펙트럴요소에 대한 스펙트럴요소행렬의 유도를 위해서 가상일의 원리를 이용하고자 한다. 가상일의 원리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{t_2}^{t_1} \delta(T - V)\,dt + \int_{t_2}^{t_1} \delta W_{nc}\,dt = 0 \quad (18)$$

여기서, T 는 운동에너지이고, V 는 위치에너지, δW_{nc} 는 비보존력에 의한 가상일을 나타낸다. 식(14)는 노드변위와 형상함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{v}(x) = [N]^T \{u\} \quad (19)$$

여기서,

$$[N] = \{\, g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \,\}$$
$$\{u\} = \{\, \hat{v}_1 \quad \hat{v}_1' \quad \hat{v}_2' \quad \hat{v}_2' \,\}$$

식(1)에 식(19)를 대입하고 식(18)을 적용하면, 다음과 같다.

$$[D(\omega)] = [K] - \omega^2 \rho A [M] = \{Q\} \quad (20)$$

여기서,

$$[K] = EI \int_0^L [B]^T [B]\,dx$$
$$[M] = \rho A \int_0^L [N]^T [N]\,dx$$
$$\{Q\} = \{P\} + \{F\}$$
$$\{P\} = \int_0^L [N]^T \{p(x, \omega)\}\,dx$$
$$\{F\} = \{V_1,\ M_1,\ V_2,\ M_2\}^T$$
$$[B] = -\frac{d^2[N]}{dx^2}$$

식(17)과 (20)에 각각 유도된 스펙트럴요소행렬은 동일한 행렬임을 알 수 있고, 분포하중에 대한 힘벡터는 다음과 같다.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \int_0^L g_1(x)\ p(x, \omega)dt \\ \int_0^L g_2(x)\ p(x, \omega)dt \\ \int_0^L g_3(x)\ p(x, \omega)dt \\ \int_0^L g_4(x)\ p(x, \omega)dt \end{Bmatrix} \quad (21)$$

3. 수치해석 알고리듬

앞서 유도된 동적분포하중을 받는 스펙트럴요소

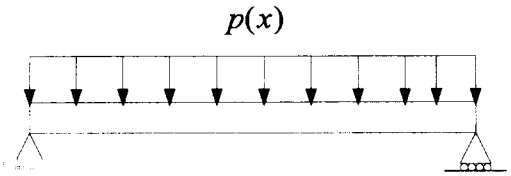

Fig. 3 Simply-supported beam under uniformly distributed dynamic load

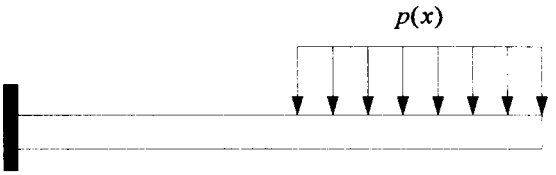

Fig. 4 Cantilever beam under the partially distributed dynamic load

에 대한 수치해를 구하기 위한 알고리듬을 제시하고 수치해석 과정 중에 수치오차를 일으키는 주파수가 0 Hz일 때의 처리기법을 소개하고자 한다.

3.1 수치해석과정

스펙트럴요소법은 앞서 언급했다시피, 기존의 유한요소법에 대한 이해를 갖고 있을 경우, 특별한 노력이 없이도 기존의 유한요소법의 수치해석 기법을 응용하여 쉽게 동적응답을 구할 수 있다. 우선, 계산할 주파수에 대해서 스펙트럴요소 행렬과 힘벡터를 계산한다. 이때, 모든 행렬과 벡터들은 주파수에 따라 계산된다. 집중하중의 경우에, 간단히 고속푸리에 변환을 통해서 힘벡터를 구할 수 있다. 그러나, 분포하중의 경우에는 식(21)을 이용하여 힘벡터를 계산한다.

푸리에 변환을 식(3)에 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(x, \omega_i) = \hat{p}(x)\, r(\omega_i) \qquad (22)$$

식(22)를 식(21)에 대입하여 분포하중에 대한 힘벡터를 각 주파수에 대해 계산할 수가 있다. 이렇게, 계산되어진 스펙트럴요소행렬과 힘벡터를 각각 결합하여 전체스펙트럴행렬과 전체 힘벡터를 얻을 수 있다. 이 과정은 유한요소법의 경우와 동일하다. 그리고, 경계조건을 전체스펙트럴행렬과 전체 힘벡터에 적용한 다음, 선형대수방정식의 해를 구함으로서 해당하는 주파수에서의 변위를 구할 수 있다. 이러한 과정을 전체 주파수영역에 대해 수행하고 난 후, 각 변위별로 역 고속 푸리에 변환을 통해 실제 시간축 상의 동적응답을 얻을 수 있다.

3.2 0 Hz의 영향

위의 계산과정에서 주파수가 0 Hz일 때는 식(17)에서 알 수 있듯이 계산과정에서 0으로 나누는 경우가 생긴다. 이럴 경우, 식(17)의 스펙트럴요소행렬로는 계산을 할 수가 없다. 만약, 0 Hz를 무시하고 동적응답을 계산하면 마치 초기변위가 있는 것

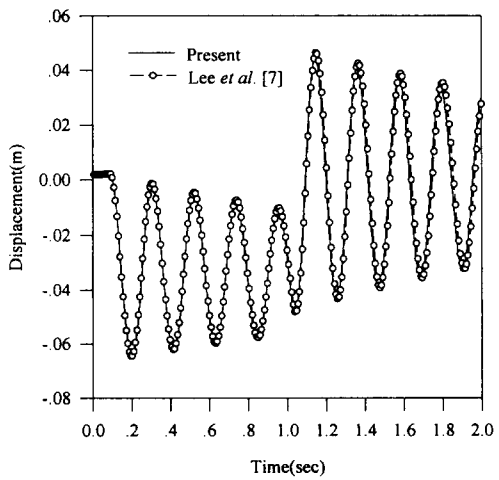

Fig. 5 Comparison of the dynamic response by the present and Lee's method

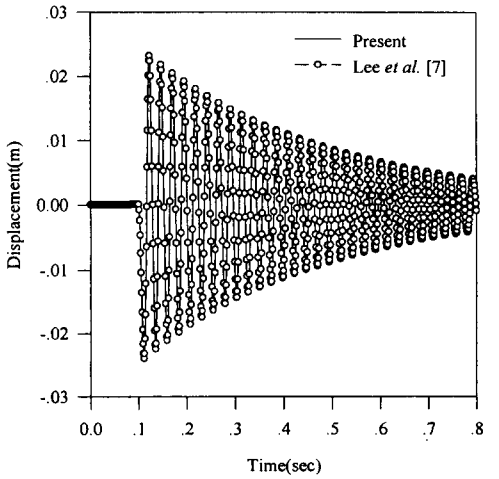

Fig. 6 Comparison of the dynamic response by the present and Lee's method

처럼 나타난다. 이러한 문제를 피하기 위해 주파수가 0 Hz일 때는 계산을 하지 않는다. 그러나, 외력이 정적하중의 특성을 가지거나, 초기 변형이 있을 경우에는 반드시 0 Hz에 대한 계산을 해야만 한다. 이러한 경우에는 시간창을 길게 할수록 계산결과가 정확해 진다. 따라서, 이러한 단점을 극복하기 위해 주파수가 0 Hz일 경우에도 계산이 가능한 새로운 스펙트럴요소행렬이 필요하다.

주파수영역에서 주파수가 0 Hz일 때의 응답은 시간에 대해서는 정지하고 있거나 강체모우드에 해당한다. 따라서, 식(17)의 스펙트럴요소행렬에 대해서 극한값을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{\omega \to 0}[\, D(\omega)\,] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

식(23)은 유한요소법에서 오일러 보의 강성행렬과 동일하다. 따라서, 주파수가 0 Hz일 때는 식(23)을, 그 외의 주파수에 대해서는 식(17)을 사용한다.

4. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구에서 개발된 분포하중을 받는 오일러 보에 대한 분포하중 처리기법을 이용하여 몇 가지 예제를 수행하였다.

우선, 강성이 72.2 GPa이고, 단면적이 0.0158 m^2, 길이가 2.8 m, 관성모멘트가 3.286×10^{-7} m^4, 구조감쇠가 0.03, 밀도가 2800 kg/m^3인 Fig. 3과 같은 단순지지보에 크기가 1000 N인 외력이 0.093초부터 1.023초까지 가해진다. 이 때의 동적응답이 Fig. 4에 나타나 있다. Fig. 4에서 알 수 있듯이 두 동적응답은 거의 일치하고 있다. 동적하중을 받는 보의 최대 처짐은 같은 크기의 정적하중이 가해질 때의 2배가 된다. 앞의 물성치들을 이용하여 보의 가운데에서 최대 처짐을 구하면 0.06745 m이며 이 값은 그림에서의 첫 번째 피크에서 잘 일치하고 있다. 두 번째로, Fig. 5와 같은 외팔 보에 분포하중이 작용하는 경우 동적응답을 계산하였다. 이 보는 강성이 210 GPa, 밀도가 7850 kg/m^3, 단면적이 0.02 m^2, 관성모멘트가 6.667×10^{-5} m^4, 길이가 2 m, 구조감쇠가 0.02일 때, 0.1 MN의 외력을 끝단에서 받고 있다. 이 때의 가진시간은 0.1초에서 시작해서 0.11초까지이다. 이때의 최대 처짐량은 2.440×10^{-5} m이다. 이 경우에도 역시 Fig. 6에 보이는 바와 같이 잘 일치하고 있다. 앞의 두 예제에서 0 Hz의 영향이 나타나지 않은 것은 각 시스템의 고유진동수와 비교해서, 가진시간이 짧기 때문이다. 그러나, Fig. 2와 같은 조건에서 가진이 끝나는 시간을 0.11초에서 0.6초로 틀렸을 때는 Fig. 7과 같은 동적응답을 얻을 수 있으며, 이 때의 최대 처짐은 2.440×10^{-5} m이

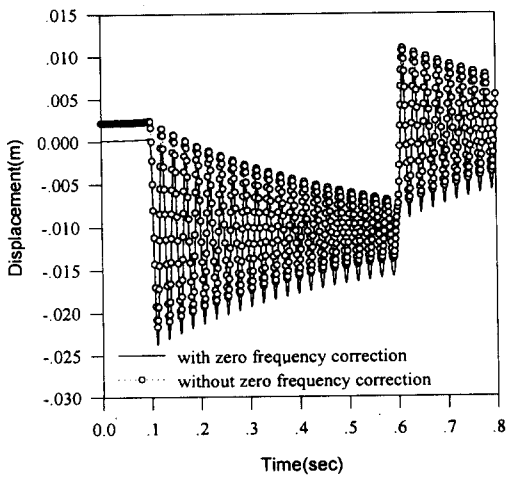

Fig. 7 Comparison of the dynamic responses by using the algorithms with zero frequency correction and without zero frequency correction

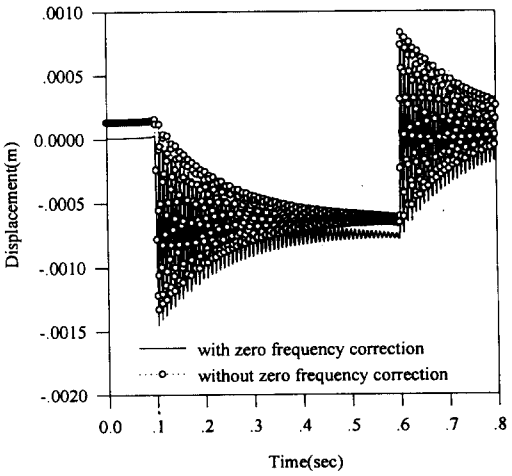

Fig. 8 Comparison of the dynamic responses by using the algorithms with zero frequency correction and without zero frequency correction

고, 첫 번째 피크에서 최대 처짐이 정확히 일치함을 알 수 있다. 이 경우에는 0 Hz의 영향을 고려할 때와 그렇지 않을 때의 차이가 명백히 나타나고 있다. 본 연구에서 제시한 알고리듬을 이용하였을 경우에는 초기변위가 없는 정확한 동적응답을 얻을 수 있지만, 그렇지 않은 경우에는 0 Hz 에서의 주파수 응답을 고려하지 않았기 때문에 마치 초기 변형이 존재하는 것처럼 동적응답이 나타나고 있다. 이것은 가진력이 긴 시간동안 작용할 경우에 나타날 수 있는 현상이다. 즉, 외력이 정적하중의 특성을 가지는 경우라 할 수 있다. 이러한 현상을 제거하기 위해서는 계산에 필요한 시간창을 길게 해야하나 이것은 효율적이지 못하다. 그러나, 식(23)에서 제시한 스펙트럴요소행렬을 0 Hz에서 이용하면 이러한 문제를 근본적으로 해결할수 있다. Fig. 8에 나타낸 동적응답은 세 번째 예제에서 경계조건만을 단순지지 형태로 바꾼 경우이다. 빔의 최대 처짐량은 1.488×10^{-6} m이며, 앞서와 마찬가지로 정확하게 첫 번째 피크에서 변위량과 예측된 최대 처짐량이 일치함을 알 수 있다. 이때에도, 0 Hz의 영향을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 동적분포하중을 받는 구조물의 동적응답을 계산하기 위한 새로운 해석기법을 개발하였다. 가상일의 원리를 이용하여 스펙트럴요소행렬을 유도하였고, 기존의 해석기법과는 달리 정확한 동적분포하중을 빠르게 계산할 수 있는 새로운 해석기법을 개발하였다. 특히, 주파수가 0 Hz일 때의 계산기법을 보완개발함으로서 정적인 하중특성을 갖는 외력이 가해질 때에 정확한 해석이 가능하였다. 또한, 개발된 해석기법에 대한 신뢰성과 정확성을 예제를 통해 확인하였다.

후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME95-D-14)에 의하여 연구되었습니다.

참고문헌

(1) Doyle, J. F., 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave propagation," International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 3, No. 1, pp. 1 ~ 5

(2) Doyle J. F., 1989, Wave Propagation in Structures, Springer-Verlag, New York

(3) Gopalakrishnan, S. and Doyle, J. F., 1992, "A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiple Connected Timoshenko Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, No. 1, pp. 11 ~ 24

(4) Rizzy, S. A. and Doyle, J. F., 1992, "A Spectral Element Approach to Wave Motion in Layered Solids," Journal of Vibrations and Acoustics, Vol. 114, pp. 569 ~ 577

(5) Lee, U. and Lee, J. K., 1996, "dynamic Continuum Modeling of Truss-Type Space Structures Using Spectral Elements." Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 33, No. 3, pp. 404 ~ 409

(6) 이준근, 이우식, 박철희, 1996, "스펙트럴요소를 이용한 곡선 보 구조물의 동적거동해석," 한국소음진동학회지, 제6권, 제1호, pp. 83 ~ 88

(7) 이우식, 이준근, 오진우, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 동적분포하중을 받는 구조물의 동적해석," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제6호, pp. 1773 ~ 1783