

# 수직운동하는 지지대 상에서 직진운동하는 보의 진동해석

정찬교\* · 김창부\*\*

## Vibration Analysis of a Beam Translating over Supports in Vertical Motion

Chan-Kyo Chung\* · Chang-Boo Kim\*\*

### ABSTRACT

Vibration of a beam translating over supports in vertical motion is investigated in this paper. Equations of motion are formulated using the virtual work principle by regarding the supports as kinematical constraints imposed on an unrestrained beam and by discretizing the beam via the assumed mode method. Differential-algebraic equations of motion are derived and reduced to differential equations in independent generalized coordinates by the generalized coordinate partitioning method. Geometric stiffness of the beam due to translating motion is considered and how the geometric stiffness of beam affects dynamic stability is also investigated. Instability of the beam in various conditions is also investigated using Floquet theory and then the results are verified through the dynamic response analysis. Results of numerical simulation are presented for various prescribed motions of the beam.

### 1. 서론

일반적으로 Pick and place transfer device와 같은 기구에 사용되는 이동 보는 이동속도에 따라서 횡방향으로 불안정한 진동상태를 가질 수 있으므로 위와 같은 기구는 설계시에 보의 이동속도에 따르는 횡방향 진동특성이 고려되어야만 정확하고 안정된 작업을 수행할 수 있다.

Buffinton et als(1)은 두 개의 정지된 단순지지대 위를 수평으로 움직이는 보의 동적 응답과 안정성을 해석하였는데 보가 길이방향으로 늘어나지 않는다는 가정하에서 Kane's Method를 사용하여 보의 운동방정식을 선형화 하였으며, 안정성 해석 부분에서는 본 논문에서 사용한 방법과 같은 Floquet 이론을 적용하였다. Lee(2)는 여러 개의 정지된 지지대 위를 수평이동하는 보의 동적 응답을 해석하였는데 지지대의 구속을 강한 스프링으

로 대체하여 해석을 하였으며, 지지대를 형태에 따라서 로울러와 단순 지지대로 구분하여 지지대에서 발생하는 마찰을 고려하였으며, 구동자는 로울러 혹은 단순 구동의 형태를 사용하였다.

Tabarrok(3)은 길이가 변화하는 외팔보의 운동에 대해서 연구하였으며, Yuh(4)는 Tabarrok과 같은 형태의 외팔보에 대해서 연구하였는데, 여기에 지지대의 회전을 더 고려하였다. 현상학 등(5)은 길이가 일정한 외팔보의 축방향운동에 대해서 섭동법(Perturbation Method)을 2차까지 고려하여 안정성 해석을 하였다.

본 논문에서는 수직운동하는 지지대 위를 수평으로 운동하는 직선보에 대하여 연구하였으며, 보의 수평방향 가속으로 인한 기하학적 강성을 고려하였다. 또한, 가상일의 원리를 이용하여 미분대수 운동방정식을 체계적으로 유도하고 일반화 좌표 분할방법(6)을 사용하여 독립된 일반화좌표로 표현되는 축소된 운동방정식을 유도하였다. Floquet이론(7)을 이용하여 안정성 해석을 하였으며, 진동응답해석을 통해 안정성 문제에 대한 검증을 하였다.

\* 인하대학교 대학원 자동화공학과

\*\* 인하대학교 공과대학 자동화공학과

## 2. 운동방정식

### 2.1 시스템 구조

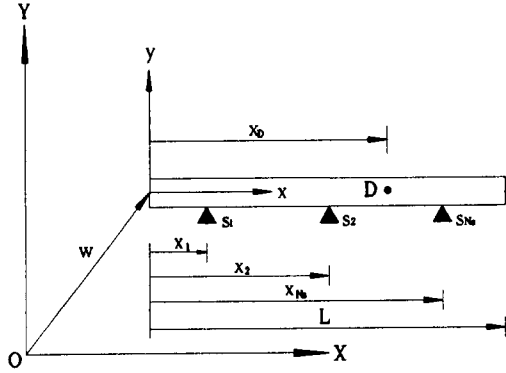


Fig. 1 Geometry of the system

수직방향으로 움직이는 강체지지부에 설치되어 있는  $N_s$ 개의 지지대  $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, N_s$ )상에서 구동자(Driver)에 의하여 상대적으로 수평으로 움직이는 길이  $L$ , 단위길이당 질량  $\rho S$ , 굽힘강성계수  $EI_z$ , 종강성계수  $ES$ 인 양단 자유인 직선보의 기하학적 구조는 Fig. 1과 같다. 보의 왼쪽 단에 위치하면서 보와 함께 고정좌표계  $X$ - $Y$ 에 대하여 병진 운동하는 병진 좌표계  $x$ - $y$ 의 위치는

$$\mathbf{w} = w_x(t)\mathbf{i} + w_y(t)\mathbf{j} \quad (1)$$

로 주어지며 보의 강체병진운동을 나타낸다.

지지점  $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, N_s$ )의 수평위치는 고정좌표계에 대하여 일정한 위치  $X_i$ 에 있으나, 병진좌표계에 대해서는 다음과 같이 보의 이동에 따라서 변하게 된다.

$$x_i = X_i - w_x(t) \quad (2)$$

또한 구동자의 구동작용점  $D$ 가 보 상의 고정된 위치에 있는 경우는 구동작용점의 병진좌표계에 대한 수평위치  $x_D$ 는 일정하고, 구동작용점이 지지부상의 고정된 위치에 있는 경우에는 구동작용점의 고정좌표계에 대한 수평위치  $X_D$ 는 일정하나 병진좌표계에 대한 수평위치는 다음과 같이 보의 수평위치에 따라서 변하게 된다.

$$x_D = X_D - w_x(t) \quad (3)$$

### 2.2 보의 탄성변위 및 구속

강체운동하는 보와 함께 병진운동하고 있는 병진좌표계에 상대적인 보의 탄성변위는 중립면의  $x$

방향변위  $u_x(x, t)$ ,  $y$ 방향변위  $u_y(x, t)$  및 수직단면의 회전각  $\theta_z(x, t)$ 를 가지고 표현된다.

구동작용점  $D$ 에서의 탄성변위 구속은 다음과 같고

$$u_x(x_D, t) = 0 \quad (4)$$

이에 대응하는 구속력 즉, 구동력은  $R_D(t)$  이다.

또한, 지지점  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_s$ )에서의 탄성변위구속은  $y$ 방향 변위가 구속되는 경우에는

$$u_y(x_i, t) = 0 \quad (5)$$

이며 이에 대응하는 구속력 즉, 지지력은  $R_{y_i}(t)$  이고, 회전각이 구속되는 경우에는

$$\theta_z(x_i, t) = 0 \quad (6)$$

이며 이에 대응하는 구속력 즉, 지지모우멘트는  $\Gamma_{z_i}(t)$  이다.

### 2.3 운동 방정식

주어진 강체 병진운동과 함께 구동 작용점 및 지지점에서 구속조건을 만족하면서 탄성운동하는 직선보에서 전단효과 및 회전관성을 무시하고  $x$ 방향 탄성변위에 의한 관성을 무시하면 회전각  $\theta_z(x, t)$ , 구동력  $R_D(t)$ , 인장력  $T_x(x, t)$  및  $x$ 방향 탄성변위  $u_x(x, t)$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_z = u_{y,x} \quad (7)$$

$$R_D = \rho S L \ddot{w}_x \quad (8)$$

$$T_x = \rho S \ddot{w}_x (x - L \langle x - x_D \rangle^0) \quad (9)$$

$$u_x = \int_{x_D}^x \left( \frac{1}{ES} T_x - \frac{1}{2} u_{y,x}^2 \right) dx \quad (10)$$

여기서

$$\langle x - x_D \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{if } x < x_D \\ 1 & \text{if } x \geq x_D \end{cases}$$

$y$ 방향 탄성변위  $u_y(x, t)$ 에 관한 가상일의 원리를 나타내는 변분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta A_y + \delta E_{dy} = \delta W_{ey} \quad \text{for } \forall \delta u_y \quad (11)$$

상기식에서  $\delta A_y$ 는 가속도량에 의한 가상일,  $\delta E_{dy}$ 는 가상변형에너지,  $\delta W_{ey}$ 는 외력 즉, 구속력 및 분포하중  $p_y(x, t)$ 에 의한 가상일로서 다음과 같다.

$$\delta A_y = \int_0^L \delta u_{y,\rho} S (\bar{w}_y + \bar{u}_y) dx \quad (12)$$

$$\delta E_{dy} = \int_0^L \{ \delta u_{y,x} T_{x,y,x} + \delta u_{y,xx} EI_z u_{y,xx} \} dx \quad (13)$$

$$\delta W_{ey} = \sum_{i=1}^{N_s} \delta \psi_i \lambda_i + \int_0^L \delta u_y p_y dx \quad (14)$$

여기서  $\psi_i(t)$ 는 지지대  $S_i$ 에서 구속되는 탄성변위이고  $\lambda_i(t)$ 는 대응하는 구속력으로 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_i = (1 - s_i) u_y(x_i) + s_i u_{y,x}(x_i) \quad (15)$$

$$\lambda_i = (1 - s_i) R_{y_i} + s_i \Gamma_{z_i} \quad (16)$$

상기식에서  $s_i$ 는 지지대에서  $y$ 방향 변위가 구속되면 0,  $z$ 방향 회전각이 구속되면 1인 정수를 갖는 지지대 지수이다.

또한, 탄성변위 구속식은 다음과 같다.

$$\psi_i(x_i, t) = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N_s \quad (17)$$

### 3. 미분대수방정식

#### 3.1 가정모드

연속계인 보의 횡방향 즉  $y$ 방향 변위  $u_y(x, t)$ 를 양단 자유인 보의 굽힘진동모드 중에서 최저차  $N$ 개의 모드를 가정모드로 사용하여 이산화시키면 다음과 같다.

$$u_y = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) q_j(t) = \phi(x) q(t) \quad (18)$$

여기서  $\phi(x)$ 는 보간함수행렬,  $q(t)$ 는 일반화좌표 변수행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$$

$\phi_1, \phi_2$ 는 강체모드로서  $\zeta = x/L$ 라고 하면 다음과 같고

$$\phi_1 = 1 \quad (19)$$

$$\phi_2 = \sqrt{3}(2\zeta - 1) \quad (20)$$

$\phi_j$  ( $j = 3, 5, \dots, \text{odd}$ )는 보 중앙에서 대칭모드 (Symmetric modes)로서 다음과 같고

$$\phi_j = \frac{\cosh \frac{\beta_j}{2}(2\zeta - 1)}{\cosh \frac{\beta_j}{2}} + \frac{\cos \frac{\beta_j}{2}(2\zeta - 1)}{\cos \frac{\beta_j}{2}}$$

with

$$\beta_j: \tanh \frac{\beta_j}{2} = -\tan \frac{\beta_j}{2} \quad (21)$$

$\phi_j$  ( $j = 4, 6, \dots, \text{even}$ )는 보 중앙에서 역대칭모드 (Antisymmetric modes)로서 다음과 같다.

$$\phi_j = \frac{\sinh \frac{\beta_j}{2}(2\zeta - 1)}{\sinh \frac{\beta_j}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta_j}{2}(2\zeta - 1)}{\sin \frac{\beta_j}{2}}$$

with

$$\beta_j: \tanh \frac{\beta_j}{2} = \tan \frac{\beta_j}{2} \quad (22)$$

또한 상기의 굽힘진동모드는 다음과 같은 직교성을 가지고 있다.

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = L \delta_{ij} \quad (23)$$

$$\int_0^L \phi_{i,xx} \phi_{j,xx} dx = \frac{\beta_j^4}{L^3} \delta_{ij} \quad (24)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이다.

#### 3.2 미분방정식

가상일  $\delta A_y, \delta E_{dy}, \delta W_{ey}$ 를 일반화좌표로 표현하면 다음과 같다.

$$\delta A_y = \delta q^T \{ \bar{w}_y f_A + M \bar{q} \} \quad (25)$$

with

$$f_A = \int_0^L \phi^T \rho S dx$$

$$M = \int_0^L \phi^T \rho S \phi dx$$

$$\delta E_{dy} = \delta q^T [ \bar{w}_x K_G + K ] q \quad (26)$$

with

$$K_G = \int_0^L \phi_{,x}^T \rho S (x - L \langle x - x_D \rangle^0) \phi_{,x} dx$$

$$K = \int_0^L \phi_{,xx}^T EI_z \phi_{,xx} dx$$

$$\delta W_{ey} = \delta q^T \{ C^T \lambda + f_E \} \quad (27)$$

with

$$f_E = \int_0^L \phi^T p_y dx$$

$$C = (C_1^T, C_2^T, \dots, C_{N_s}^T)^T$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_s})^T$$

$$C_i = (1 - s_i)\phi(x_i) + s_i\phi_{,x}(x_i)$$

따라서 가상일의 원리로부터 다음과 같은 q에 대한 2차 선형 미분방정식의 운동방정식이 얻어진다.

$$M\ddot{q} + (K + \ddot{w}_x K_G)q = C^T \lambda - \ddot{w}_y f_A + f_E \quad (28)$$

상기식에서 M, K는 일정한 대각행렬, K<sub>G</sub>는 x<sub>D</sub>에 종속적인 대칭행렬, C는 w<sub>x</sub>에 종속적인 직각행렬, f<sub>A</sub>는 일정한 열행렬이고, f<sub>E</sub>는 시간의 함수인 열행렬이다.

### 3.3 대수방정식

지지대 S<sub>i</sub> (i=1,2,...,N<sub>s</sub>)에서 구속되는 탄성변위  $\phi_i$ , 탄성속도  $\dot{\phi}_i$ , 탄성가속도  $\ddot{\phi}_i$ 를 이산화식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\phi_i = C_i q \quad (29)$$

$$\dot{\phi}_i = -\dot{w}_x D_i q + C_i \dot{q} \quad (30)$$

$$\ddot{\phi}_i = -\dot{w}_x D_i \dot{q} + \dot{w}_x^2 E_i q - 2\dot{w}_x D_i \dot{q} + C_i \ddot{q} \quad (31)$$

상기식에서

$$C_i = (1 - s_i)\phi(x_i) + s_i\phi_{,x}(x_i)$$

$$D_i = (1 - s_i)\phi_{,x}(x_i) + s_i\phi_{,xx}(x_i)$$

$$E_i = (1 - s_i)\phi_{,xx}(x_i) + s_i\phi_{,xxx}(x_i)$$

그런데 지지대 S<sub>i</sub>에서의 구속을 만족하기 위해서는  $\phi_i$ ,  $\dot{\phi}_i$ ,  $\ddot{\phi}_i$ 가 전부 영이 되어야 하므로 q,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$ 는 다음과 같은 선형 대수방정식인 구속식을 만족해야 한다.

$$Cq = 0 \quad (32)$$

$$C\dot{q} = \dot{w}_x Dq \triangleq \nu \quad (33)$$

$$C\ddot{q} = \ddot{w}_x Dq - \dot{w}_x^2 E q + 2\dot{w}_x D\dot{q} \triangleq \gamma \quad (34)$$

상기식에서 C, D, E는 w<sub>x</sub>에 종속적인 직각행렬이며 다음과 같다.

$$C = (C_1^T, C_2^T, \dots, C_{N_s}^T)^T$$

$$D = (D_1^T, D_2^T, \dots, D_{N_s}^T)^T$$

$$E = (E_1^T, E_2^T, \dots, E_{N_s}^T)^T$$

## 4. 축소된 운동방정식

### 4.1 일반화좌표 분할

일반화좌표 q를 N<sub>s</sub>개의 종속좌표 q<sub>D</sub>와 (N-N<sub>s</sub>)개의 독립좌표 q<sub>I</sub>로 분할하면 q는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$q = L_I q_I + L_D q_D \quad (35)$$

상기식을 미분방정식인 운동방정식(28)에 대입하여 운동방정식을 q<sub>I</sub>와 q<sub>D</sub>에 대해서 분할하면 다음과 같다.

$$M_{II}\ddot{q}_I + (K_{II} + \ddot{w}_x K_{GII})q_I + \ddot{w}_x K_{GID}q_D = C_I^T \lambda - \ddot{w}_y f_{AI} + f_{EI} \quad (36)$$

$$M_{DD}\ddot{q}_D + (K_{DD} + \ddot{w}_x K_{GDD})q_D + \ddot{w}_x K_{GDI}q_I = C_D^T \lambda - \ddot{w}_y f_{AD} + f_{ED} \quad (37)$$

상기식에서

$$M_{II} = L_I^T M L_I, \quad M_{DD} = L_D^T M L_D,$$

$$K_{II} = L_I^T K L_I, \quad K_{DD} = L_D^T K L_D,$$

$$K_{GII} = L_I^T K_G L_I, \quad K_{GDD} = L_D^T K_G L_D,$$

$$K_{GID} = L_I^T K_G L_D, \quad K_{GDI} = L_D^T K_G L_I,$$

$$f_{AI} = L_I^T f_A, \quad f_{AD} = L_D^T f_A, \quad f_{EI} = L_I^T f_E,$$

$$f_{ED} = L_D^T f_E, \quad C_I = C L_I, \quad C_D = C L_D$$

또한, 대수방정식인 구속식을 독립변수와 종속변수로 표현하면 다음과 같다.

$$C_I q_I + C_D q_D = 0 \quad (38)$$

$$C_I \dot{q}_I + C_D \dot{q}_D = \nu = \dot{w}_x (D_I q_I + D_D q_D) \quad (39)$$

$$C_I \ddot{q}_I + C_D \ddot{q}_D = \gamma = \ddot{w}_x (D_I q_I + D_D q_D) - \dot{w}_x^2 (E_I q_I + E_D q_D) + 2\dot{w}_x (D_I \dot{q}_I + D_D \dot{q}_D) \quad (40)$$

상기식에서

$$D_I = D L_I, \quad D_D = D L_D,$$

$$E_I = E L_I, \quad E_D = E L_D$$

### 4.2 축소된 운동방정식

구속식(38~40)으로부터 q<sub>D</sub>,  $\dot{q}_D$ ,  $\ddot{q}_D$ 를 q<sub>I</sub>,  $\dot{q}_I$ ,  $\ddot{q}_I$ 의 선형함수로 표현하면 다음과 같다.

$$q_D = -C_D^{-1} C_I q_I \quad (41)$$

$$\dot{q}_D = C_D^{-1} (C_I \dot{q}_I - \nu) \quad (42)$$

$$\ddot{q}_D = C_D^{-1}(C_I \dot{q}_I - \gamma) \quad (43)$$

상기식에서  $\nu$ 는  $q_I$ 의 선형함수,  $\gamma$ 는  $q_I, \dot{q}_I$ 의 선형함수로 표현된다.

분할된 운동방정식에서 종속좌표를 소거하여 가상일  $\delta A_y, \delta E_{dy}, \delta W_{ey}$ 를 독립변수만으로 표현하면 다음과 같다.

$$\delta A_y = \delta q_I^T (\hat{M}_I \dot{q}_I + \ddot{w}_y \hat{f}_{AI} - \ddot{w}_x \hat{M}_{DI} q_I + \dot{w}_x^2 \hat{M}_{EI} q_I - 2 \dot{w}_x \hat{M}_{DI} \dot{q}_I) \quad (44)$$

with

$$\hat{M}_I = M_{II} + C_I^T C_D^{-T} M_{DD} C_D^{-1} C_I$$

$$\hat{f}_{AI} = f_{AI} - C_I^T C_D^{-T} f_{AD}$$

$$\hat{M}_{DI} = C_I^T C_D^{-T} M_{DD} C_D^{-1} (D_I - D_D C_D^{-1} C_I)$$

$$\hat{M}_{EI} = C_I^T C_D^{-T} M_{DD} C_D^{-1} [ -2 D_D C_D^{-1} (D_I - D_D C_D^{-1} C_I) + (E_I - E_D C_D^{-1} C_I) ]$$

$$\delta E_{dy} = \delta q_I^T (\hat{K}_I + \ddot{w}_x \hat{K}_{GI}) q_I \quad (45)$$

with

$$\hat{K}_I = K_{II} + C_I^T C_D^{-T} K_{DD} C_D^{-1} C_I$$

$$\hat{K}_{GI} = K_{GI} + C_I^T C_D^{-T} K_{GD} C_D^{-1} C_I - K_{GD} C_D^{-1} C_I - C_I^T C_D^{-T} K_{GD}$$

$$\delta W_{ey} = \delta q_I^T \hat{f}_{EI} \quad (46)$$

with

$$\hat{f}_{EI} = f_{EI} - C_I^T C_D^{-T} f_{ED}$$

따라서 가상일의 원리로부터 얻어지는 축소된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{M}_I \ddot{q}_I - 2 \dot{w}_x \hat{M}_{DI} \dot{q}_I + (\hat{K}_I + \ddot{w}_x \hat{K}_{GI} - \ddot{w}_x \hat{M}_{DI} + \dot{w}_x^2 \hat{M}_{EI}) q_I \\ = -\ddot{w}_y \hat{f}_{AI} + \hat{f}_{EI} \end{aligned} \quad (47)$$

축소된 운동방정식은  $q_I$ 에 대하여 선형미분 방정식이며 Non-autonomous이다.

지지점에서의 구속력  $\lambda(t)$ 는 분할된 운동방정식의 두 번째식(37)을 사용하여 구해진다.

축소된 운동방정식을 상태변수  $x = (\dot{q}_I^T, q_I^T)^T$ 의 1차 미분방정식인 상태방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\dot{\{x\}} = [ A(t) ] \{x\} + \{b(t)\} \quad (48)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 2 \dot{w}_x \hat{M}_I^{-1} \hat{M}_{DI} & -\hat{M}_I^{-1} Q \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = (\hat{K}_I + \ddot{w}_x \hat{K}_{GI} - \ddot{w}_x \hat{M}_{DI} + \dot{w}_x^2 \hat{M}_{EI})$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{M}_I^{-1} (-\ddot{w}_y \hat{f}_{AI} + \hat{f}_{EI}) \end{bmatrix}$$

## 5. 모의실험

### 5.1 실험모델

모의실험에서의 실험모델은 다음과 같다.

$$L = 10 \text{ m}, \rho S = 1.0 \text{ kg/m}, EI_z = 1.0 \text{ Nm}^2,$$

$$Ns = 2, X_1 = 0.375 \text{ m}, X_2 = 0.625 \text{ m}$$

$$X_D = 0 \text{ 혹은 } 0.5 \text{ m}, p_y(x, t) = 0,$$

$$w_x = A \sin \omega x t, w_y = H(1 - \cos \omega y t)$$

### 5.2 고유진동

$w_x$ 가 일정한 자유진동 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{M}_I \ddot{q}_I + \hat{K}_I q_I = 0 \quad (49)$$

$w_x$ 가 0일때의 고유진동수를 사용된 가정모드의 개수  $N$ 을 변화시켜가면서 계산한 결과는 Table 1과 같다. Table 1에서 가정모드를 사용하여 계산된 고유진동수는  $N$ 이 증가함에 따라 고전해로 수렴됨을 알수 있고  $N$ 이 작은 경우에도 고전해에 매우 근접함을 알 수 있다.

### 5.3 안정성해석

상태방정식의 동차방정식은 다음과 같고

$$\dot{\{x\}} = [ A(t) ] \{x\} \quad (50)$$

$w_x$ 가 주기  $T(=2\pi/\omega_x)$ 를 갖는 시간에 대하여 연속적인 주기함수이므로  $w_x, \dot{w}_x, \ddot{w}_x$ 행렬  $A(t)$ 는 주기  $T$ 를 갖는 주기함수이다. 따라서 Floquet 이론을 사용하여 모델의 안정성을 해석할 수 있다.

$x_D = 0, N = 4$ 인 경우에  $x$ 방향 운동진동수  $\omega_x$ 를 10에서 50 rad/sec까지 2 rad/sec씩 증가시키면서,  $x$ 방향 운동진폭  $A$ 를 0.002에서 0.050 m까지 0.002 m씩 증가시키면서 안정성 해석을 수행하여 얻어진 매개변수의 불안정 점은 Fig. 2와 같고 참고문헌(1)의 결과와 일치한다.

상기한 경우의 안정성선도는 Fig. 3과 같다.

Table 1. Natural frequencies for  $w_x=0$

Mode No.	Classical Solution	Assumed Modes Solution (rad/sec)				
		N=4	N=6	N=8	N=10	N=22
1	16.2459	16.2681	16.2620	16.2549	16.2486	16.2461
2	20.7711	22.0507	20.9056	20.8283	20.8251	20.7742
3	117.928	—	118.292	118.131	117.991	117.993
4	136.075	—	138.376	137.000	136.946	136.124
5	247.472	—	—	260.975	251.479	247.773
6	386.113	—	—	388.977	388.785	386.263
7	422.584	—	—	—	437.375	423.530
8	703.445	—	—	—	707.161	703.677

A가 매우 작을 때는  $\omega_x$ 가  $\omega_1$  과  $\omega_2$  의 분수조합 공명진동수(Fractional combination resonant frequency)(8)인 다음과 같은 값 근처일 때 불안정성이 발생한다.

$$\begin{aligned} \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{3} = 10.8454, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{4} = 11.0254 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{3} = 12.7729, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{3} = 14.7005 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{2} = 16.2681, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 19.1594 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{2} = 22.0507, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{1} = 32.5362 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{1} = 38.3188, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{1} = 44.1014 \end{aligned}$$

Fig. 3의 불안정 영역은 Fig. 2의 불안정 점을 포함하고 있다.

$x_D = 0.5$ ,  $N = 4$ 인 경우에 대한 안정성 선도는 Fig. 4와 같다. A가 매우 작을 때는  $\omega_x$ 가 다음과 같은 값 근처일 때 불안정성이 발생한다.

$$\begin{aligned} \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{4} = 11.0254, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{3} = 12.7729 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{2} = 16.2681, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{2} = 22.0507 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{1} = 38.3188 \end{aligned}$$

수평방향 가속으로 인하여 생기는 인장력에 의한

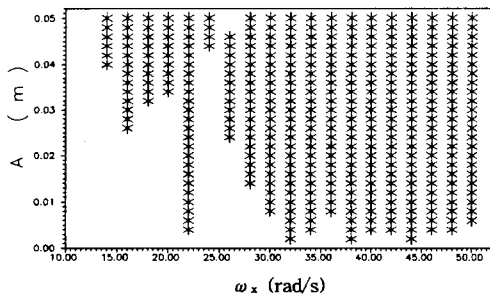


Fig. 2 Instability points for  $x_D = 0$ ,  $N = 4$

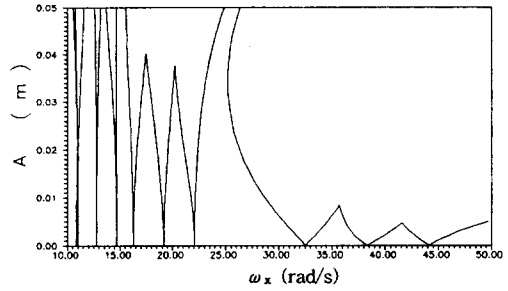


Fig. 3 Stability diagram for  $x_D = 0$ ,  $N = 4$

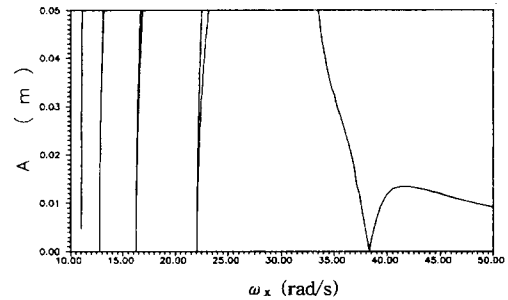


Fig. 4 Stability diagram for  $x_D = 0.5$ ,  $N = 4$

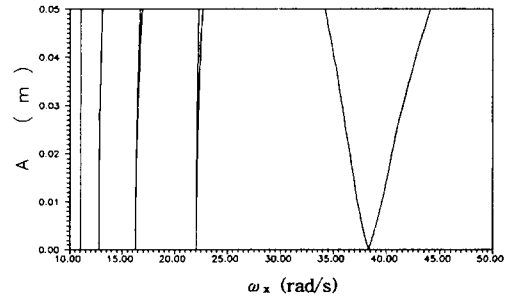


Fig. 5 Stability diagram for  $K_G = 0$ ,  $N = 4$

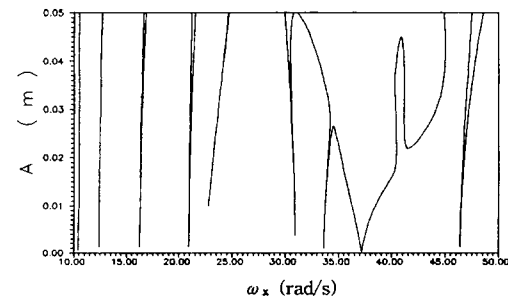


Fig. 6 Stability diagram for  $x_D = 0.5$ ,  $N = 6$

기하학적 강성  $\ddot{w}_x K_G$ 를 무시한 경우의 안정성 선도는 Fig. 5와 같다.

A가 매우 작을 때는  $\omega_x$ 가 다음과 같은 값 근처일 때 불안정성이 발생한다.

$$\begin{aligned}\omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{4} = 11.0254, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{3} = 12.7729 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{2} = 16.2681, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{2} = 22.0507 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{1} = 38.3188\end{aligned}$$

상기한 세 경우에는 기하학적 강성이 서로 다르므로 Fig. 3, 4, 5에서 보는 바와 같이 기하학적 강성이 안정성에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다.

$x_D = 0.5$ ,  $N = 6$ 인 경우의 안정성 선도는 Fig. 6과 같다. A가 매우 작을 때는  $\omega_x$ 가 다음과 같은 값 근처일 때 불안정성이 발생한다.

$$\begin{aligned}\omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{4} = 10.453, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{3} = 12.389 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_1}{2} = 16.2620, & \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_2}{2} = 20.9056 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_3}{6} = 22.4257, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_4}{5} = 30.9276 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_3}{4} = 33.6385, & \omega_x &\approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{1} = 37.1676 \\ \omega_x &\approx \frac{\omega_2 + \omega_3}{5} = 46.3992\end{aligned}$$

Fig. 4, 6에서 보는 바와 같이 N이 증가 할수록 고차 고유진동으로 인하여 폭이 좁은 불안정 영역이 추가로 나타남을 알 수 있다.

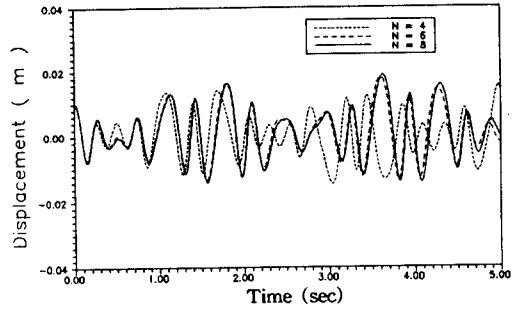
#### 5.4 동적응답해석

앞절에서 얻어진 안정성 해석 결과를 검증하기 위해서 동적응답 해석을 수행하였다

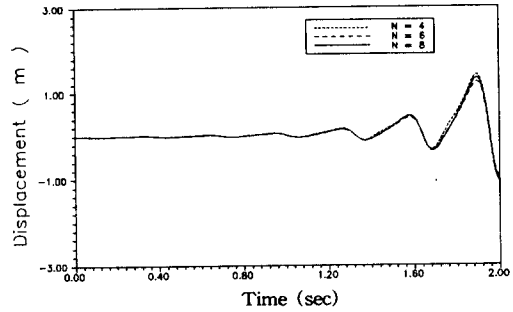
Fig. 7은 균일 하중에 의해서 양끝단이 0.05 m 처진 보의 정지된 상태를 초기조건으로 하고  $x_D = 0$ ,  $H = 0$ ,  $A = 0.05$ ,  $\omega_x = 10$  또는 20 rad/sec로 설정하여 N을 4, 6, 8로 변화시키면서 계산된 왼쪽 끝단 탄성변위의 동적응답이다.  $\omega_x = 10$  rad/sec인 경우에는 시스템은 안정하고  $\omega_x = 20$  rad/sec인 경우에는 시스템은 불안정하다.

Fig. 8은 처짐이 없는 보의 정지된 상태를 초기 조건으로하고  $x_D = 0.5$ ,  $H = A$ ,  $\omega_y = \omega_x$ ,  $A = 0.05$  m,  $\omega_x = 19$  또는 38 rad/sec로 설정하여 N을 4, 6, 8로 변화시켜가면서 계산된 왼쪽 끝단 탄성 변위의 동적응답이다.  $\omega_x = 19$  rad/sec인 경우에는 시스템은 안정하고,  $\omega_x = 38$  rad/sec인 경우에는 시스템은 불안정하다.

Fig. 9는  $\omega_y = 2\omega_x$ 를 제외하고는 Fig. 8의 경

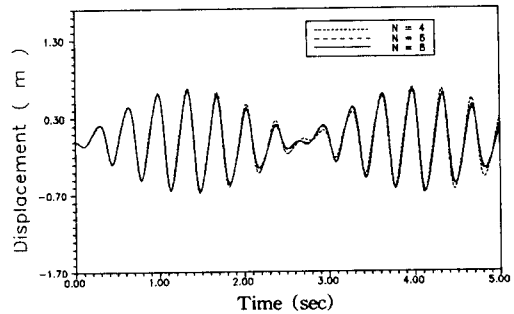


a)  $\omega_x = 10$  rad/s (Stable)

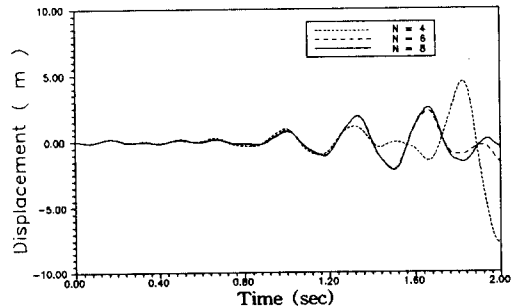


b)  $\omega_x = 20$  rad/s (Unstable)

Fig. 7 Dynamic response for  $x_D = 0$   
 $A = 0.05$ ,  $H = 0$

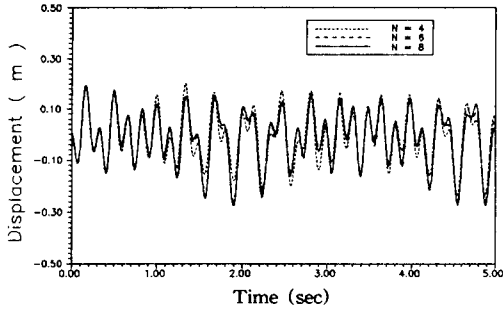


a)  $\omega_x = 19$  rad/s (Stable)

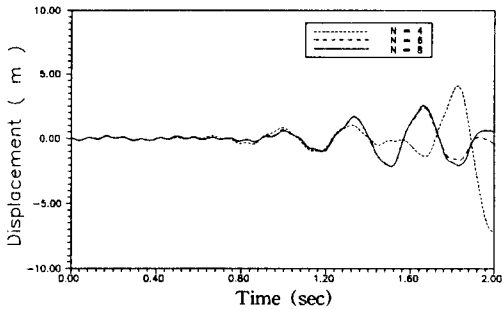


b)  $\omega_x = 38$  rad/s (Unstable)

Fig. 8 Dynamic response for  $x_D = 0.5$   
 $A = 0.05$ ,  $H = A$ ,  $\omega_y = \omega_x$



a)  $\omega_x = 19$  rad/s (Stable)



b)  $\omega_x = 38$  rad/s (Unstable)

Fig. 9 Dynamic response for  $x_D = 0.5$   
 $A = 0.05$ ,  $H = A$ ,  $\omega_y = 2\omega_x$

우와 같은 경우의 동적응답이다.

Fig. 7, 8, 9에서 보이는 바와 같이 사용된 가상 모드수  $N$ 이 증가함에 따라서 동적응답은 수렴하고 안정성 선도의 안정성 영역에 있는 경우에는 동적응답이 제한되고, 불안정 영역에 있는 경우에는 동적응답이 발산됨을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 수직운동하는 지지대 상에서 수평으로 운동하는 직선보의 안정성 및 동적응답 해석에 관한 연구를 수행하였다.

가상일의 원리를 이용하여 미분대수운동방정식을 체계적으로 유도하고 일반화좌표 분할방법을 사용하여 독립된 일반화좌표로 표현되는 축소된 운동방정식을 유도하였다.

안정성 해석으로부터 지지대의 구속조건 및 수평방향 가속으로 인한 기하학적 강성이 시스템의 안정성에 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있었다. 또한 고유 진동수의 분수조합으로 이루어지는 주파수 근처에서 불안정 영역이 발생하는데 진동수 분수

조합의 분모가 작은 경우에는 다른 영역보다 상대적으로 넓은 불안정 영역이 존재함을 알 수 있었다. 동적응답해석을 수행하여 안정성 해석에서 구해진 안정, 불안정 영역에서의 안정성 특성이 일치함을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) Buffinton, K.W. and Kane, T.R. 1985, " Dynamics of a Beam Moving over Supports ", Int. J.Solids Structures, 21(7), PP. 617~643.
- (2) Lee, H.P. , 1993, " Dynamics of a Beam Moving over Multiple Supports ", Int. J. Solid Structures, 30(2), PP. 199~209.
- (3) Tabarrok, B., Leech, C.M. and Kim, Y.I., 1974, " On the Dynamics of an Axially Moving Beam ", J. Frankl. Inst., 297(3), PP. 201~220.
- (4) Yuh, J. , Young, T. and Baek, Y.S., 1989, " Modelling of a Flexible Link Having a Prismatic Joint in Robot Mechanism - Experimental Verification ", Proc. Int. IEEE Conf. on Robot and Automation, PP. 722~727.
- (5) 현상학, 유희희, 1996, " 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 동적안정성해석 ", 한국소음진동공학회지, 6(4), PP. 469~474.
- (6) Haug, E.J, 1989, " Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems ", Allyn and Bacon, Boston.
- (7) Meirovitch, L., 1970, " Methods of Analytical Dynamics ", McGraw-Hill, New York.
- (8) Hsu, C.S., 1963, " On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom ", J. Appl. Mech. 30, PP. 367~372.