

비선형 진동 외팔보의 1:1 내부공진 경우 정상 상태 응답 해석

○ 이수일*, 장서일**, 이장무***

Steady State Amplitude Analysis for a Nonlinear Oscillating Cantilever Beam in Case of 1:1 Internal Resonance

Soo H Lee, Seo H Chang, Jang Moo Lee

1. 서론

보(beam)는 기계 구조 및 항공 우주 구조물의 기본적인 요소로서, 특히 큰 동적 거동을 하는 경우는 비선형성이 두드러지게 나타나는 것으로 알려져 있고[4], 헬리콥터의 회전날개(rotor blade)나 두께가 얇은 고속 회전 축 등의 경우에는 비틀림(torsion)과 굽힘(bending) 운동이 비선형 연성되어 나타나게 된다. 이러한 비선형 연성 효과를 갖는 경우에는 운동의 양상이 복잡하게 전개된다. 따라서 본 연구에서는 비선형 연성 운동이 생기는 이러한 단순 외팔보에 대해 비선형 진동 특성을 파악하고 각 비틀림(torsion)-굽힘(bending)진동 모드 간의 내부공진(internal resonance) 현상[5]에 따른 정상상태 진폭 응답의 해석을 그 목적으로 한다.

최근 3차원 연성 모드를 갖는 보의 비선형 진동 해석은 크게 두가지 방향으로 연구가 진행되고 있다.

첫째로는 해석적인 접근법을 들 수 있다. 이 해석적인 방법의 연구는 주로 M. R. M. Crespo da Silva 등과 A. H. Nayfeh등에 의해 주도되어 왔는데, 이 방법은 고전 보(beam) 이론 및 해밀턴 원리(Hamilton's Principle)에 입각해서 굽힘(bending)-굽힘(bending)-비틀림(torsion)-인장(extension)이 완전 연성된 전체 3차원 자유도를 갖는 연속체인 보의 운동방정식인 편미분방정식으로 유도하고, 이를 갤러킨(Galerkin)방법을 이용하여 고려하고자 하는 고유모드 개수만큼의 자유도를

갖는 다자유도계로 근사화 한다. 이 근사화된 상미분방정식을 다중시간준척(multiple time scale)방법이나 평균(averaging)방법과 같은 섭동(perturbation)법을 적용해 안정해(stable solution)와 불안정해(unstable solution) 및 분기(bifurcation)되는 각 경우에 대한 해석을 수행하는 연구가 진행되었다.[6~12]

두번째로는 실험적인 접근법을 들 수 있다. 이 접근법은 주로 F. C. Moon과 J. P. Cusumano가 상당한 연구를 진행하였으며[4,13,14], 위의 해석적인 방법에서와 같은 얇은 보(elastica)모델에 대해서 길이 방향 및 수직 방향으로 가진시켜 응답을 측정하고 이 때 나타나는 연성된 비선형 모드를 설명하기 위해 이론 해석을 도입하였다. 실제로 가진 진폭을 증가시키면 특정 주파수에서는 비선형 연성 효과가 커져서 선형 이론으로 설명할 수 없는 소위 비국소(non-local)모드[13]가 나타나게 된다. 이러한 비국소 모드는 동적 좌굴(dynamic buckling)현상[2]의 일종으로 생각 할 수 있으며 일반적인 평형상태가 불안정해지면서 새로이 분기된 안정된 새로운 두 상태를 불규칙적으로 운동하게 된다. 계속해서 이러한 상태를 진행시키면 소위 혼돈(chaotic)운동이라 할 수 있는 단계에 이르게 된다[4,13,14].

따라서 본 연구에서는 기존의 연구자들과는 같은 모델로부터 비틀림 가진을 받는 구조에 대하여, 굽힘진동 모드가 불안정해지면서 비틀림진동 모드가 연성되는 것과 같이 비틀림진동이 불안정해지면서 굽힘진동 모드가 나타나는 과정을 해석하고자 한다.

* 서울대학교 대학원 기계설계학과 silee@alliant.snu.ac.kr

** 삼성자동차 연구소

*** 서울대학교 기계설계학과

2. 운동방정식의 근사화

Fig.1 과 같은 비선형 진동 외팔보의 내부공진 연성 모드 해석을 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

(1) 외팔보의 단면 형상은 길이방향에 따른 변화가 없으며 재질(E, G, ρ)도 일정하다.

(2) 기본 정식화를 Bernoulli-Euler 보 이론으로 전개하고 보의 길이방향 인장(elongation)이나 주로 굽힘이 일어나는 방향(y 방향)에 대한 전단변형은 무시한다.

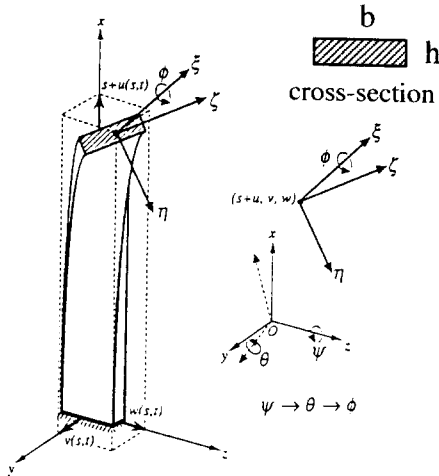


Fig.1 Configuration of Cantilever Beam

이상의 가정으로부터 Hamilton 원리를 이용해 일반적인 3차원 운동 방정식을 유도하고 구속조건등을 이용해 3차항까지 근사화된 비선형 연성된 편미분 운동방정식으로 간략화한다.[6,8] 위와 같은 과정을 통해 유도된 일반적인 식에 감쇠와 비틀림 외력을 도입하고 보의 길이 차원에 대하여 각 변위를 무차원화하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + c_v \dot{v} + \beta_y v'''' \\ &= \left\{ -\beta_y \gamma w'' + (1 - \beta_y) \left[(w'' \gamma)' - (v'' \gamma^2)' + w'' \int_0^s v' w'' ds \right] \right. \\ & \quad - \beta_y v' (v''^2 + w''^2) \\ & \quad + v' \left[-\beta_y v' v'''' - w' w'''' + j_\zeta \ddot{v}' v' + j_\eta \ddot{w}' w' \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_1^s \int_0^s (v'^2 + w'^2)'' ds ds \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + j_\zeta \dot{w}' \left(\dot{\gamma} + \int_0^s (v' w'')' ds - v' \dot{w}' \right) \\ & + \left[(j_\eta - j_\zeta) \left(\dot{v}' \gamma^2 - \dot{w}' \gamma - \dot{w}' \int_0^s v' w'' ds \right) + j_\zeta \dot{v}' \right]' \\ & + v' \left(j_\zeta \dot{v}'^2 + j_\eta \dot{w}'^2 \right) - j_\zeta c_\gamma w' \dot{\gamma} \left. \right\} + \left[w' q_y(s) \cos(\Omega t) \right]' \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + c_w \dot{w} + w'''' \\ &= \left\{ \beta_y \gamma v'' + (1 - \beta_y) \left[(v'' \gamma)' - (w'' \gamma^2)' + v'' \int_0^s v' w'' ds \right] \right. \\ & \quad - w' (v''^2 + w''^2) \\ & \quad + w' \left[-\beta_y v' v'''' - w' w'''' + j_\zeta \ddot{v}' v' + j_\eta \ddot{w}' w' \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_1^s \int_0^s (v'^2 + w'^2)'' ds ds \right] \\ & \quad - j_\zeta \dot{v}' \left(\dot{\gamma} + \int_0^s (v' w'')' ds - v' \dot{w}' \right) \\ & \quad - \left[(j_\eta - j_\zeta) \left(\dot{w}' \gamma^2 - \dot{v}' \gamma - \dot{v}' \int_0^s v' w'' ds \right) + j_\eta \dot{w}' \right]' \\ & \quad + w' \left(j_\zeta \dot{v}'^2 + j_\eta \dot{w}'^2 \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} & j_\zeta \ddot{\gamma} + j_\zeta c_\gamma \dot{\gamma} - \beta_y \gamma'' \\ &= -(1 - \beta_y) \left[\gamma (v''^2 + w''^2) - v'' w'' \right] \\ & - j_\zeta \left[\int_0^s (v' w'')' ds - v' \dot{w}' \right]' \\ & + (j_\eta - j_\zeta) \left[(v'^2 + w'^2) \gamma - v' \dot{w}' \right] \\ & + q_y(s) \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (1c)$$

여기서 v, w, γ 는 각각 y 방향 굽힘, z 방향 굽힘, ϕ 방향 비틀림 변위를 나타내며 β_y, β_z 는 굽힘방향에 대한 각 방향의 주장성 비율, $()'$ 는 길이좌표(s)에 대한 미분,

$()^\bullet$ 는 시간(t)에 대한 미분을 나타낸다.

다음으로 식(1)을 내부공진 상태 해석을 위하여 굽힘-굽힘-비틀림의 각 1개 모드에 대해서만 고려하고 다음과 같이 자유도에 해당하는 변수를 좌표에 대한 모드와 시간에 대한 항으로 분리한다.

$$\begin{aligned} v(s, t) &= F_v(s) v_i(t) \\ w(s, t) &= F_w(s) w_i(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\gamma(s, t) = F_\gamma(s)\gamma_i(t)$$

각 모드에 대하여 모드직교성과 외팔보의 경계조건을 적용하면 다음과 같이 길이좌표(s)에 대한 미분이 제거된 시간에 대한 상미분 방정식이 얻어진다. 이때 각 적분계수의 값은 Appendix 식(A.1)과 같다.

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_i + c_v \dot{v}_i + \omega_v^2 v_i \\ &= \alpha_{v_1} \gamma_i w_i + \alpha_{v_2} v_i \gamma_i^2 + \alpha_{v_3} v_i w_i^2 + \alpha_{v_4} v_i^3 \\ &+ \alpha_{v_5} (v_i^2)^{\bullet} v_i + \alpha_{v_6} (w_i^2)^{\bullet} v_i \\ &+ \alpha_{v_7} v_i^2 \ddot{v}_i + \alpha_{v_8} v_i w_i \ddot{w}_i + \alpha_{v_9} \dot{\gamma}_i \dot{w}_i \\ &+ \alpha_{v_{10}} (v_i w_i)^{\bullet} \dot{w}_i + \alpha_{v_{11}} v_i \dot{w}_i^2 \\ &+ \alpha_{v_{12}} (\dot{v}_i \gamma_i^2)^{\bullet} + \alpha_{v_{13}} (\dot{w}_i \gamma_i)^{\bullet} + \alpha_{v_{14}} (v_i w_i \dot{w}_i)^{\bullet} \\ &+ \alpha_{v_{15}} v_i \dot{v}_i^2 + \alpha_{v_{16}} \dot{\gamma}_i \dot{w}_i \\ &+ w_i \cdot f_{v\gamma} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_i + c_w \dot{w}_i + \omega_w^2 w_i \\ &= \alpha_{w_1} \gamma_i v_i + \alpha_{w_2} w_i \gamma_i^2 + \alpha_{w_3} w_i v_i^2 + \alpha_{w_4} w_i^3 \\ &+ \alpha_{w_5} (w_i^2)^{\bullet} w_i + \alpha_{w_6} (v_i^2)^{\bullet} w_i \\ &+ \alpha_{w_7} w_i^2 \ddot{w}_i + \alpha_{w_8} w_i v_i \ddot{v}_i + \alpha_{w_9} \dot{\gamma}_i \dot{v}_i \\ &+ \alpha_{w_{10}} (v_i w_i)^{\bullet} \dot{v}_i + \alpha_{w_{11}} v_i \dot{v}_i \dot{w}_i \\ &+ \alpha_{w_{12}} (\dot{w}_i \gamma_i^2)^{\bullet} + \alpha_{w_{13}} (\dot{v}_i \gamma_i)^{\bullet} + \alpha_{w_{14}} (v_i \dot{v}_i w_i)^{\bullet} \\ &+ \alpha_{w_{15}} w_i \dot{v}_i^2 + \alpha_{w_{16}} w_i \dot{w}_i^2 \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\gamma}_i + c_\gamma \dot{\gamma}_i + \omega_\gamma^2 \gamma_i \\ &= \alpha_{\gamma_1} \gamma_i v_i^2 + \alpha_{\gamma_2} \gamma_i w_i^2 + \alpha_{\gamma_3} v_i w_i \\ &+ \left[\alpha_{\gamma_4} (v_i w_i)^{\bullet} + \alpha_{\gamma_5} v_i \dot{w}_i \right]^{\bullet} \\ &+ \alpha_{\gamma_6} \gamma_i \dot{v}_i^2 + \alpha_{\gamma_7} \gamma_i \dot{w}_i^2 + \alpha_{\gamma_8} \dot{v}_i \dot{w}_i \\ &+ f_{\gamma\gamma} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3c)$$

그러나, 본 연구에서 대상으로하는 모델의 실제 형상으로부터, 즉, $b/h = 48$, $L/b = 9$, $G/E = 0.4$ 에 대하여 계수를 계산하여 비교해 보면 관성 항(j)의 크기

가 강성에 비해 상대적으로 매우 작으므로(약 $1/1000 \sim 1/10000$ order) 관성이 들어 있는 계수의 값은 무시할 수 있으며, 위의 상미분 운동방정식 (3)은 다음과 같이 더욱 간단한 모양으로 근사시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_i + c_v \dot{v}_i + \omega_v^2 v_i \\ &= \alpha_{v_1} \gamma_i w_i + \alpha_{v_2} v_i \gamma_i^2 + \alpha_{v_3} v_i w_i^2 + \alpha_{v_4} v_i^3 \\ &+ \alpha_{v_5} (v_i^2)^{\bullet} v_i + \alpha_{v_6} (w_i^2)^{\bullet} v_i + w_i \cdot f_{v\gamma} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_i + c_w \dot{w}_i + \omega_w^2 w_i \\ &= \alpha_{w_1} \gamma_i v_i + \alpha_{w_2} w_i \gamma_i^2 + \alpha_{w_3} w_i v_i^2 + \alpha_{w_4} w_i^3 \\ &+ \alpha_{w_5} (w_i^2)^{\bullet} w_i + \alpha_{w_6} (v_i^2)^{\bullet} w_i \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\gamma}_i + c_\gamma \dot{\gamma}_i + \omega_\gamma^2 \gamma_i \\ &= \alpha_{\gamma_1} \gamma_i v_i^2 + \alpha_{\gamma_2} \gamma_i w_i^2 + \alpha_{\gamma_3} v_i w_i + \left[\alpha_{\gamma_4} (v_i w_i)^{\bullet} + \alpha_{\gamma_5} v_i \dot{w}_i \right]^{\bullet} \\ &+ f_{\gamma\gamma} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4c)$$

이와 같이 근사화된 상미분 운동방정식(4)를 자발적 (autonomous) 방정식으로 바꾸기 위해 평균(averaging) 방법을 적용한다. 먼저 각 항의 크기 차수에 따라 재준척(rescaling)을 하기 위해 식(5)와 같이 변위와 외력에 ε 파라미터를 도입하고, ε 차수별로 방정식을 정리하여 나타내면 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} v_i &= \varepsilon v, w_i = \varepsilon w, \gamma_i = \varepsilon \gamma \\ c_v &= \varepsilon^2 c_v, c_w = \varepsilon^2 c_w, c_\gamma = \varepsilon^2 c_\gamma \\ f_{v\gamma} &= \varepsilon^3 f_{v\gamma}, f_{\gamma\gamma} = \varepsilon^3 f_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + \omega_v^2 v + \varepsilon \cdot A_1 \gamma w \\ &+ \varepsilon^2 [A_2 v^3 + A_3 v w^2 + A_4 v \gamma^2 + A_5 v v^2 + A_6 v w^2 + c_v \dot{v}] \\ &+ \varepsilon^3 [A_7 \gamma^2 w - w f_{v\gamma} \cos(\Omega t)] + O(\varepsilon^4) = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + \omega_w^2 w + \varepsilon \cdot B_1 \gamma v \\ &+ \varepsilon^2 [B_2 w^3 + B_3 w v^2 + B_4 w \gamma^2 + B_5 w w^2 + B_6 w v^2 + c_w \dot{w}] \\ &+ \varepsilon^3 [B_7 \gamma w^2] + O(\varepsilon^4) = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\gamma} + \omega_\gamma^2 \gamma + \varepsilon [C_1 v \dot{w} + C_2 \dot{v} w] \\
& + \varepsilon^2 [C_3 v^2 \dot{\gamma} + C_4 w^2 \dot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} - f_\gamma \cos(\Omega t)] \\
& + \varepsilon^3 \{ [C_5 v^2 + C_6 w^2 + C_7 \gamma^2] v \dot{w} + [C_8 \dot{v}^2 + C_9 \dot{w}^2] v w \\
& + c_v \dot{v} w + c_w v \dot{w} \} + O(\varepsilon^4) = 0
\end{aligned} \tag{6c}$$

이때 정의된 각 계수들은 Appendix의 식(A.2)와 같다. 식(6)에서는 ε^3 항까지 전개하여 표시하였지만 본 해석에서는 ε^2 항까지, 즉 3차 비선형 항까지만 해석에 적용하기로 한다. ε^3 항이상을 무시하면 굽힘 모드 v 에 작용하는 매개 가진(parametric excitation)항의 차수가 무시할 만큼 작게 된다. 식(6)을 1차 미분 방정식 형태로 다시 쓰면 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned}
x_1 &= v, & x_2 &= \dot{v}, \\
y_1 &= w, & y_2 &= \dot{w}, \\
z_1 &= \gamma, & z_2 &= \dot{\gamma}
\end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_v^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_w^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_\gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \varepsilon \mathbf{f}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{f}_2 \\
&= \mathbf{A} \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{f}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{f}_2,
\end{aligned} \tag{7b}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -A_1 y_1 z_1 \\ 0 \\ -B_1 x_1 z_1 \\ 0 \\ -C_1 x_1 y_1 - C_2 x_2 y_2 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(A_2 x_1^3 + A_3 x_1 y_1^2 + A_4 x_1 z_1^2 + A_5 x_1 x_2^2 + A_6 x_1 y_2^2 + c_v x_2) \\ 0 \\ -(B_2 y_1^3 + B_3 x_1^2 y_1 + B_4 y_1 z_1^2 + B_5 y_1 y_2^2 + B_6 z_1 y_2^2 + c_w y_2) \\ 0 \\ -(C_3 x_1^2 z_1 + C_4 y_1^2 z_1 + c_\gamma z_2 - f_\gamma \cos(\Omega t)) \end{Bmatrix}$$

한편 위 비선형 미분방정식 (7b)의 해를 다음 식(8)과 같이 가정하고 이를 비선형 방정식에 대입하면 다음과 같은 표준형(standard form)[1]을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\Omega t} \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= \varepsilon e^{-i\Omega t} \mathbf{f}_1 + \varepsilon^2 e^{-i\Omega t} \mathbf{f}_2 \\
&= \varepsilon \mathbf{g}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2
\end{aligned} \tag{9}$$

그리고 이 식(9)를 전개하면 조화 항들(harmonic terms)을 소거시키는 조건으로부터 다음과 같은 내부 공진 조건들을 찾을 수 있다.

$$\omega_\gamma - \omega_v \approx 0, \quad \omega_\gamma - \omega_w \approx 0, \quad \omega_v - \omega_w \approx 0 \tag{10}$$

$$\omega_\gamma - \omega_v - \omega_w \approx 0 \tag{11}$$

$$\omega_\gamma + \omega_v - \omega_w \approx 0$$

$$\omega_\gamma - \omega_v + \omega_w \approx 0$$

본 연구에서는 일단 비틀림과 굽힘모드의 1:1 내부 공진 상태에 대한 해석을 수행한다. 식(10)으로부터 다음 식(12)와 같이 비틀림 가진 주파수와 비틀림 선형 1차 고유진동수, 굽힘 선형 3차 고유진동수가 근접한 경우에 대하여 해석을 수행한다.

$$\Omega \approx \omega_\gamma \approx \omega_v \tag{12}$$

우선 식(12)의 내부 공진 조건으로부터 다음과 같이 외부(external), 내부(internal) 조절 매개변수(detuning parameter) σ_1, σ_2 를 도입하고 식(14)와 같은 변환을 거치면, 식(15)와 같이 1:1 내부공진 경우의 변환된 비선형 운동방정식을 얻을 수 있다. K 는 각 선형 굽힘 고유진동수 간의 비이다.

$$\frac{\omega_\gamma^2}{\Omega^2} = 1 - \varepsilon^2 \sigma_1 \tag{13a}$$

$$\frac{\omega_v^2}{\Omega^2} = \frac{\omega_v^2}{\Omega^2} - \varepsilon^2 \sigma_2 = 1 - \varepsilon^2 (\sigma_1 + \sigma_2) \tag{13b}$$

$$\frac{\omega_w^2}{\Omega^2} = K^2 \frac{\omega_v^2}{\Omega^2} = K^2 - \varepsilon^2 K^2 (\sigma_1 + \sigma_2) \tag{13c}$$

$$\tau = \Omega t, \quad \frac{d}{dt}(\) = \Omega \frac{d}{d\tau}(\) = \Omega(\)' \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & v'' + v + \varepsilon \cdot \frac{1}{\omega_v^2} A_1 \gamma w \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{\omega_v^2} A_2 v^3 + \frac{1}{\omega_v^2} A_3 v w^2 + \frac{1}{\omega_v^2} A_4 v \gamma^2 + A_5 v w'^2 \right. \\ & \left. + A_6 v w'^2 + \frac{1}{\omega_v} c_v v' - (\sigma_1 + \sigma_2) v \right] = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} & w'' + K^2 w + \varepsilon \cdot \frac{K^2}{\omega_w} B_1 \gamma w \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{K^2}{\omega_w^2} B_2 w^3 + \frac{K^2}{\omega_w^2} B_3 w v^2 + \frac{K^2}{\omega_w^2} B_4 w \gamma^2 + B_5 w w'^2 \right. \\ & \left. + B_6 w v'^2 + B_6 w v'^2 + \frac{K}{\omega_w} c_w w' - K^2 (\sigma_1 + \sigma_2) w \right] = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & \gamma'' + \gamma + \varepsilon \left[\frac{1}{\omega_\gamma^2} C_1 v w + C_2 v' w' \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{\omega_\gamma^2} C_3 v^2 \gamma + \frac{1}{\omega_\gamma^2} C_4 w^2 \gamma + \frac{1}{\omega_\gamma} c_\gamma \gamma' \right. \\ & \left. - \sigma_1 \gamma - \frac{1}{\omega_\gamma} f_\gamma \cos(\tau) \right] = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

이 방정식을 식(7)에서와 같이 1차 미분방정식의 표준형으로 바꾸고 최소 주기에 대하여 시간 평균을 하면 시간에 대하여 천천히 변하는(slowly time-varying) 항만 남게 된다. 즉 최종적으로 얻어진 평균된 자발적(autonomous) 방정식으로부터 본 연구 대상 시스템의 경우와 같이 w 방향의 굽힘 강성이 다른 방향에 비하여 상대적으로 커서 그 운동이 무시할 만하다고 생각하면 다음과 같이 2자유도 방정식으로 근사화할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_1' &= \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2} c_v X_1 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) X_2 + a_1 X_2^3 + a_1 X_1^2 X_2 \right. \\ & \left. + a_2 (X_2 Z_1^2 + 2X_1 Z_1 Z_2 + 3X_2 Z_2^2) \right] \end{aligned} \quad (16a)$$

$$X_2' = \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2} c_v X_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) X_1 - a_1 X_1^3 - a_1 X_1 X_2^2 \right]$$

$$-a_2 (3X_1 Z_1^2 + 2X_2 Z_1 Z_2 + X_1 Z_2^2) \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2} c_\gamma Z_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 Z_2 \right. \\ & \left. + a_3 (X_1^2 Z_2 + 2X_1 X_2 Z_1 + 3X_2^2 Z_2) \right] \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2} c_\gamma Z_2 + \frac{1}{2} \sigma_1 Z_1 \right. \\ & \left. - a_3 (3X_1^2 Z_1 + 2X_1 X_2 Z_2 + X_2^2 Z_1) + \frac{1}{2} F_\gamma \right] \end{aligned} \quad (16d)$$

여기에서 X_1, X_2 는 평균된 굽힘모드의 변위와 속도이고, Z_1, Z_2 는 평균된 비틀림모드의 변위와 속도를 나타내며 이때 각 항의 계수($a_1 \sim a_3$)의 정의는 Appendix 식(A.3)에 표시되어 있다.

또한 이 방정식을 다음과 같이 극좌표 변환을 통하면,

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1 \cos(\phi_1) \\ X_2 &= R_1 \sin(\phi_1) \\ Z_1 &= R_3 \cos(\phi_3) \\ Z_2 &= R_3 \sin(\phi_3) \end{aligned} \quad (17)$$

다음과 같이 모드의 진폭과 위상에 대한 방정식도 얻을 수 있다.

$$R_1' = -\frac{1}{2} c_v R_1 - a_2 R_1 R_3^2 \sin(2\phi_1 - 2\phi_3) \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} R_1 \phi_1' &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) R_1 - a_1 R_1^3 \\ & - a_2 R_1 R_3^2 [2 + \cos(2\phi_1 - 2\phi_3)] \end{aligned} \quad (18b)$$

$$R_3' = -\frac{1}{2} c_\gamma R_3 + a_2 R_1^2 R_3 \sin(2\phi_1 - 2\phi_3) + \frac{1}{2} F_\gamma \sin(\phi_3) \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} R_3 \phi_3' &= \frac{1}{2} \sigma_1 R_3 - a_2 R_1^2 R_3 [2 + \cos(2\phi_1 - 2\phi_3)] \\ & + \frac{1}{2} F_\gamma \sin(\phi_3) \end{aligned} \quad (18d)$$

3. 해석 및 결과

이상의 운동방정식의 유도 및 근사화 과정을 거쳐 다음과 같은 해석을 수행하였다.

우선 식(18)로부터 비틀림 가진되는 정상상태 단일(single)모드해($R_1 = 0, R_3 \neq 0$)는 다음과 같다.

$$R_3 = \frac{F_H}{\sqrt{\sigma_1^2 + C_\gamma^2}}, \tan \phi_3 = -\frac{C_\gamma}{\sigma_1} \quad (19)$$

다음으로 정상상태 연성(coupled) 모드 해를 살펴보면 ($R_1 \neq 0, R_3 \neq 0$), 비감쇠로 가정하여도 R_1^2 과 R_3^2 에 대한 3차 연립 방정식의 형태로 전개된다. 따라서 일반적인 대수식의 해법으로는 해석이 어렵기 때문에 대표적 비선형 수치해석 프로그램인 AUTO와 dstool을 이용하여 전반적인 해석을 수행하였다.

Fig. 2 는 해석의 한 예인데 감쇠가 있고 비틀림과 굽힘의 1:1 내부공진 상태인 경우 외부 조절 매개변수 (external detuning parameter) $\sigma_1 \approx 0.3$ 근방에서 비틀림 단일(single) 모드가 불안정해지면서 새로운 연성된 모드가 발생되었다.

지금까지의 해석 과정을 토대로 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 연속계 외팔보 운동 방정식으로부터 비틀림 가진의 경우 1:1 내부공진 상태의 비틀림-굽힘 모드에 대하여 효과적인 모드 근사화 과정과 평균법을 적용하여 2자유도의 해석이 용이한 운동방정식으로 유도하였다. 둘째, 일정한 매개변수(가진력 크기, 가진 주파수, 내부공진 주파수 등)의 상태에 이르면 비틀림 가진의 경우에도 선형 모드가 불안정해지면서 연성된 새로운 모드가 나타났다. 이는 운동방정식의 비선형 항에 의해 내부공진시 모드의 에너지 전달(energy transfer) 현상으로 이해할 수 있다.

앞으로는 다양한 내부공진 상태의 해석과 실험을 병행하는 연구를 수행할 계획이다.

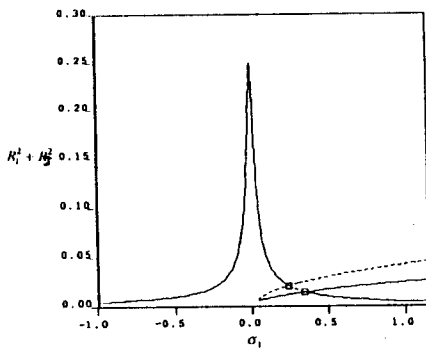


Fig. 2 Amplitude response plot of $R_1^2 + R_3^2$ in case of $\sigma_2 = 0.0, c_v = c_\gamma = 0.02, F_H = 0.005$

참고문헌

- [1] Guckenheimer, J., Holmes, P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, 1983
- [2] Bolotin, V. V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day, 1964
- [3] Love, A. E. H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover, 1944
- [4] Cusumano, J. P., "Low-Dimensional, Chaotic, Nonplanar Motions of the Elastica: Experiment and Theory", Ph. D. Dissertation, Cornell University, 1990
- [5] Chang, S. I., "Studies in Non-Linear Multi-Mode Responses of Harmonically Excited Rectangular Plates with Internal Responses", Ph. D. Dissertation, Purdue University, 1993
- [6] Crespo da Silva, M. R. M., Glynn, C. G., "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams-I.Equation of Motion", J. of Struct. Mechanics, Vol.6, No.4, pp437-448, 1978
- [7] Crespo da Silva, M. R. M., Glynn, C.G., "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams-II.Forced Motions", J. of Struct. Mechanics, Vol.6, No.4, pp449-461, 1978
- [8] Crespo da Silva, M. R. M., "Equations for Nonlinear Analysis of 3D Motions of Beams", Applied Mechanics Review, Vol.44, No.11, Part 2, 1991
- [9] Crespo da Silva, M. R. M., Zaretzky, C. L., "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Interactions in Beams including the Effect of Torsional Dynamics-I.Primary Response", Nonlinear Dynamics, Vol.5, pp3-23, 1994
- [10] Crespo da Silva, M. R. M., Zaretzky, C. L., "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Interactions in Beams including the Effect of Torsional Dynamics-II.Combination Response", Nonlinear Dynamics, Vol.5, pp3-23, 1994
- [11] Nayfeh, A. H., Pai, P. F., "Non-Linear, Non-Planar Parametric Responses of an Inextensional Beam", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol.24, No.2, pp139-158, 1989
- [12] Pai, P. F., Nayfeh, A. H., "Non-Linear, Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitations", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol.25, No.5, pp455-474, 1990
- [13] Cusumano, J. P., Moon, F. C., "Chaotic Non-Planar Vibrations of the Thin Elastica-I.Experimental Observation of Planar Instability", J. of Sound and Vibration, Vol.179, No.2, pp185-208, 1995
- [14] Cusumano, J. P., Moon, F. C., "Chaotic Non-Planar Vibrations of the Thin Elastica-II.Derivation and Analysis of a Low-Dimensional Model", J. of Sound and Vibration, Vol.179, No.2, pp209-226, 1995

Appendix

(A.1)

$$\alpha_{v_1} = \int_0^1 \left[-\beta_\gamma F_v (F_\gamma' F_v'') + (1 - \beta_\gamma) F_v (F_w'' F_\gamma'') \right] ds$$

$$\alpha_{v_2} = -(1 - \beta_\gamma) \int_0^1 F_v (F_v'' F_\gamma'^2) ds$$

$$\alpha_{v_3} = \int_0^1 \left[(1 - \beta_\gamma) F_v \left(F_w'' \int_0^1 F_v F_w'' ds \right) - F_v (F_v' F_w' F_w''') - \beta_\gamma F_v (F_v' F_w''^2) \right] ds$$

$$\alpha_{v_4} = -\beta_\gamma \int_0^1 F_v \left[F_v' (F_v' F_v'') \right] ds$$

$$\alpha_{v_5} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_v \left[F_v' \int_1^s \int_0^s F_v'^2 ds ds \right] ds$$

$$\alpha_{v_6} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_v \left[F_v' \int_1^s \int_0^s F_w'^2 ds ds \right] ds$$

$$\alpha_{v_7} = j_\zeta \int_0^1 F_v (F_v'^3) ds$$

$$\alpha_{v_8} = j_\eta \int_0^1 F_v (F_v' F_w'^2) ds$$

$$\alpha_{v_9} = j_\xi \int_0^1 F_v (F_\gamma' F_w') ds$$

$$\alpha_{v_{10}} = j_\xi \int_0^1 F_v \left(F_w' \int_0^1 F_v' F_w'' ds \right) ds$$

$$\alpha_{v_{11}} = (j_\eta - j_\xi) \int_0^1 F_v (F_v' F_w'^2) ds$$

$$\alpha_{v_{12}} = (j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_v (F_v' F_\gamma'^2) ds$$

$$\alpha_{v_{13}} = -(j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_v (F_w' F_\gamma') ds$$

$$\alpha_{v_{14}} = -(j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_v \left(F_w' \int_0^1 F_v' F_w'' ds \right) ds$$

$$\alpha_{v_{15}} = j_\zeta \int_0^1 F_v (F_v'^3) ds$$

$$\alpha_{v_{16}} = -j_\xi c_\gamma \int_0^1 F_v (F_w' F_\gamma') ds$$

$$\alpha_{w_1} = \int_0^1 \left[\beta_\gamma F_w (F_\gamma' F_v'') + (1 - \beta_\gamma) F_w (F_v'' F_\gamma'') \right] ds$$

$$\alpha_{w_2} = -(1 - \beta_\gamma) \int_0^1 F_w (F_w'' F_\gamma'^2) ds$$

$$\alpha_{w_3} = \int_0^1 \left[(1 - \beta_\gamma) F_w \left(F_v'' \int_0^1 F_w' F_v'' ds \right) + F_w (F_w' F_v''^2) + \beta_\gamma F_w (F_v' F_w' F_v'') \right] ds$$

$$\alpha_{w_4} = -\int_0^1 F_w \left[F_w' (F_w' F_w'') \right] ds$$

$$\alpha_{w_5} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_w \left[F_w' \int_1^s \int_0^s F_w'^2 ds ds \right] ds$$

$$\alpha_{w_6} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_w \left[F_w' \int_1^s \int_0^s F_v'^2 ds ds \right] ds$$

$$\alpha_{w_7} = j_\eta \int_0^1 F_w (F_w'^3) ds$$

$$\alpha_{w_8} = j_\zeta \int_0^1 F_w (F_w' F_v'^2) ds$$

$$\alpha_{w_9} = -j_\xi \int_0^1 F_w (F_\gamma' F_v') ds$$

$$\alpha_{w_{10}} = -j_\xi \int_0^1 F_w \left(F_v' \int_0^1 F_v' F_w'' ds \right) ds$$

$$\alpha_{w_{11}} = j_\xi \int_0^1 F_w (F_w' F_v'^2) ds$$

$$\alpha_{w_{12}} = -(j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_w (F_w' F_\gamma'^2) ds$$

$$\alpha_{w_{13}} = -(j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_w (F_v' F_\gamma') ds$$

$$\alpha_{w_{14}} = (j_\eta - j_\zeta) \int_0^1 F_w \left(F_v' \int_0^1 F_w' F_v'' ds \right) ds$$

$$\alpha_{w_{15}} = j_\zeta \int_0^1 F_w (F_w' F_v'^2) ds \int_0^1 F_v (F_v'^3) ds$$

$$\alpha_{w_{16}} = j_\eta \int_0^1 F_w (F_w'^3) ds$$

$$\alpha_{\gamma_1} = -\frac{(1 - \beta_\gamma)}{j_\xi} \int_0^1 F_\gamma'^2 F_v'^2 ds$$