

# 스펙트럴요소법을 이용한 평판의 동적거동해석

°이 상 희\* · 이 준 근\* · 이 우 식\*\*

## Spectral Element Method for the Dynamic Behaviors of Plate

°Sanghee Lee, Joonkeun Lee, and Usik Lee

### Abstract

Finite Element Method(FEM) is the most popularly used method in analyzing the dynamic behaviors of structures. But unless the number of finite elements is large enough, the results from FEM are somewhat different from exact analytical solutions, especially at high frequency range. On the other hand, as the Spectral Element Method(SEM) deals directly with the governing equations of structures, the results from this method cannot but be exact regardless of any frequency range. However, despite two dimensional structures are more general, the SEM has been applied only to the analysis of one dimensional structures so far. In this paper, therefore, new methodologies are introduced to analyze the two dimensional plate using SEM. The results from this new method are compared with the exact analytical solutions by letting the two dimensional plate be one dimensional one and showed the dynamic responses of two dimensional plate by including various waves propagated into x-direction.

### 1. 서론

구조물의 동적거동을 해석하기 위한 여러 방법들중에서 가장 일반적으로 사용되는 방법으로는 유한요소법을 들 수 있다. 그러나 유한요소법은 저주파에서 신뢰성 있는 결과를 제시할 수 있으나 고주파로 갈수록 엄밀해와는 상당한 차이를 갖게 된다. 이것은 관심있는 주파수의 범위가 고주파수 영역일수록 구조물내를 흐르는 탄성파의 파장(wave length)이 점점 짧아지기 때문에 발생하는 현상으로 만일 유한요소의 길이를 관심있는 주파수에 해당하는 파장보다 충분히 작게 하지 않는다면 엄밀해에 가까운 값을 얻을 수 없게 된다. 따라서 유한요소법으로 엄밀해에 가까운 구조물의 동적응답을 얻기 위해서는 일반적으로 매우 많은 수의 요소분할이 요구되므로 많은 전산시간과 컴퓨터 용량이 필요하게 되어 이를 해결하기 위한 과제가 여전히 남아있다.

구조물이 갖는 동적거동으로서 진동을 파동역

학(wave propagation mechanics)의 관점에서 본다면 진동현상은 수많은 이동 탄성파(travelling elastic wave)가 모여서 형성된 정재파(standing wave)의 한 형태로 볼 수 있다. 따라서 구조물의 진동해석을 기존의 모우드해석법 대신에 파동역학의 관점에서도 다룰 수 있음은 분명하다. 파동역학의 개념을 이용하여 구조물을 해석할 경우 구조물의 지배방정식을 통해 얻게 되는 정확한 탄성파동 특성, 즉 파수(wave number)와 주파수(frequency)와의 관계인 분산관계(dispersive relation)[1]를 풀이과정에서 사용하기 때문에 모드해석법에서와는 달리 일반적으로 주파수 범위에 구애됨이 없이 엄밀해에 가까운 좋은 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있다.[2]

일찍이, Doyle[3]은 구조물내의 탄성파동의 분산관계를 이용하여 파수와 주파수의 함수로 유도된 파동해를 모두 주파수의 함수로 표현한 후 고속 푸리에변환(Fast Fourier Transform : FFT)과 역 고속 푸리에변환(inverse FFT : IFFT) 알고리즘을 해석과정에서 적용시켜 구조물의 동적응답을 시간축상 혹은 주파수축상에서 정확하게 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 이와같이 파동해를 이용

\* 인하대학교 기계공학과 대학원

\*\* 인하대학교 기계공학과, 정회원

하여 구조물의 동적거동을 해석하는 과정에서 FFT와 IFFT를 적용하는 해석기법을 스펙트럴 해석법(Spectral Analysis Method : SAM[2]) 이라고 한다.

지금까지 스펙트럴 해석법은 1차원 구조물에 대한 적용이 주로 이루어졌고 2차원 구조물에 대한 적용은 거의 없었다. 이는 2차원 구조물에서는 몇몇 경우를 제외하고 엄밀해가 존재하지 않고 또 스펙트럴 해석법을 직접 지배방정식에 적용했을 경우 1차원 구조물과는 달리 일반적인 해를 얻을 수 없기 때문이다. 하지만 2차원 구조물은 1차원 구조물보다 더 실제적인 구조물 형태에 가깝기 때문에 스펙트럴 해석법을 이러한 2차원 구조물에 적용하여 동적해석을 수행하는 것은 중요한 의미가 있다.

Doyle[4]은 직선 모서리를 갖는 반 무한 평판에 대해서 스펙트럴해석법을 적용하였다. 그는 논문에서 여러 경계조건을 갖는 평판의 한쪽 끝단에서의 가진력에 의한 1차 반사파를 중첩함으로써 평판을 해석하는 방법을 제안하였다. 그러나 그의 방법을 실제 구조물에 적용하기에는 상당한 애로점이 있다. 왜냐하면 크기가 유한한 평판의 경우 그 내부에서는 무수히 많은 반사파가 발생하게 되며 따라서 Doyle이 제시한 방법인 1차 반사파만의 고려만으로는 충분한 운동양상을 표현하기가 어렵기 때문이다.

따라서, 본 논문에서는 스펙트럴 해석법을 이용하여 보다 현실성 있는 2차원 평판 구조물의 해석을 위해서 먼저 1) 1차원 구조물인 베르누이-오일러 보에 스펙트럴 해석법을 적용하여 그 정확성을 확인하고, 2) Kirchhoff의 가정에 바탕을 둔 2차원 평판의 지배방정식[5]에 평판의 정규모드(normal mode)를 이용한 스펙트럴 해석법을 적용하여 엄밀해가 존재하는 평판의 동적응답과 비교하였으며, 3) 평판의 지배방정식으로부터 유도된 분산관계와 파동해를 이용하여 평판의 엄밀한 동적응답을 구할 수 있는 새로운 스펙트럴 해석기법을 제시하였다.

## 2. 스펙트럴 해석법의 개요

본 장에서는 베르누이-오일러 보를 대상으로 하여 Doyle[2]이 소개한 바 있는 스펙트럴 해석법에 대해 간단히 소개하도록 한다. 베르누이-오일러 보의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [ EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} ] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

외력이 없는 경우  $p(x, t)$ 를 식(1)로부터 소거하고 식(1)의 지배방정식을 풀기위해 파동해를  $x$  방향으로 진행하는 형태로 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ &= \bar{v}(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\omega$ 는 주파수이며  $k$ 는 파수(wave number) [6]다. 파동해 (2)를 지배방정식 (1)에 대입하면 다음과 같이 오일러 보에 대한 분산 관계식을 유도할 수 있다.

$$EIk^4 - \omega^2 \rho A = 0 \quad (3)$$

따라서 식(2)와 (3)으로부터 보의 일반해는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{v}(x) = Ae^{-ikx} + Be^{-kx} + Ce^{ikx} + De^{kx} \quad (4)$$

여기서,  $k = \sqrt{\omega(\rho A / EI)^{1/4}}$  이다. 힘과 변위와의 관계식

$$V = EI \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3}, \quad M = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \quad (5)$$

을 이용하여 Fig. 1에 나타낸 외팔보의 경계조건을 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik & -k & ik & k \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} & -k^2 e^{ikL} & k^2 e^{kL} \\ EIk^3 i e^{-ikL} & -EIk^3 e^{-kL} & -EIk^3 i e^{ikL} & EIk^3 e^{kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ P(\omega) \}^T. \quad (6)$$

네 개의 미지수  $A, B, C, D$ 는 위의 행렬식으로부터 구할 수 있다. 그 결과를 식(4)의 파동해에 대입하여 수직변위  $\bar{v}(x)$ 를 구하고, 이를 다시 식(5)에 대입하면 전단력과 모멘트를 주파수의 함수로 구할 수 있다. Table 1은 본 연구에서 사용된 구조

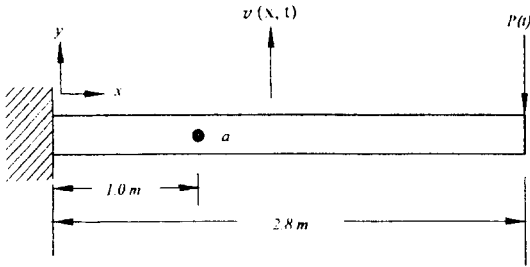


Fig. 1 Cantilever beam with a concentrated load :  $a$  indicate the observation point of the dynamic response

Table 1 Material and structural properties of beam and plate

	Beam	Plate
Young's modulus (E) [GPa]	$72.2 \times 10^9$	$72.2 \times 10^9$
Structural damping factor ( $\eta$ )	0.03	0.03
Density ( $\rho$ ) [ $\text{kg/m}^3$ ]	$2.8 \times 10^3$	$2.8 \times 10^3$
Poisson's ratio ( $\nu$ )	-	0.33
Width [m]	1	2.8
Length [m]	2.8	-
Height [m]	$1.58 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$

Table 2 Comparisons of natural frequencies by the analytical method, SAM, and FEM(NISA ; No. of element 100)

Mode Number	Analytical (Exact)	SAM	FEM (NISA)
1	1.67	1.67	1.67
2	10.5	10.5	10.4
3	29.3	29.3	29.1
4	57.6	57.6	57.0
5	95.0	95.0	94.0
16	987	987	911
17	1129	1129	1016
18	1277	1278	1113

물의 물성치이고, Table 2는 엄밀한 이론해와 스펙트럴 해석법 그리고 유한요소의 개수를 충분히 사용하여 수행한 유한요소법으로 구한 고유진동수를 상호 비교한 것이다. 관심있는 주파수의 범위가 증가할수록 유한요소법으로 구한 결과는 엄밀한 이론해의 결과와 비교하여 점차 오차가 커지고 있으나 스펙트럴 해석법에 의한 결과는 고주파 영역에서도 엄밀한 이론해와 거의 일치하고 있음을 보여 줌으로써 스펙트럴 해석법의 정확성을 보여주었다.

### 3. 2차원 평판 구조물의 스펙트럴 해석

#### 3.1 정규모드(normal mode)를 이용한 단순지지 평판의 해석

이 장에서는 집중하중을 받는 단순지지 평판을 정규모드를 이용하여 스펙트럴 해석법을 적용하고 이를 엄밀해와 비교함으로써 스펙트럴 해석법의 타당성을 제시하였다. Fig. 2는 시간  $t = t_0$  에서 임의의 위치  $x = a/2, y = b/2$  에서 순간집중하중을 받는 단순지지 평판을 그림으로 나타낸 것이다. Kirchhoff의 가정에 바탕을 둔 평판의 지배방정식 [5]은 다음과 같다.

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (7)$$

여기서  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  이다. 평판의 네 끝단이 단순지지되어 있는 경우 정규모드와 고유진동수[7]는 다음과 같다.

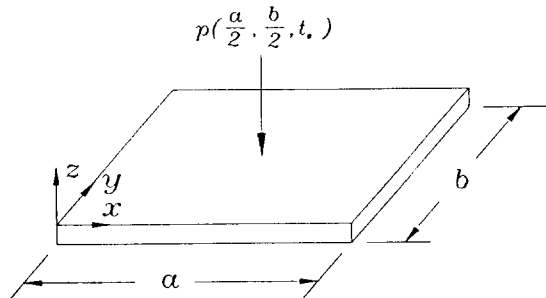


Fig. 2 Simply supported plate under impulse concentrated load

$$\Phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\rho ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (9)$$

변위  $w(x, y, t)$ 를 정규모드와 일반좌표(general coordinate)로 나타내면

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(x, y) q_{mn}(t) \quad (10)$$

이고, 순간집중하중은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$p\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right) = \bar{p}(t) \delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) \quad (11)$$

이들 식(10), (11)을 식(7)에 대입하고 정규모드의 직교성을 이용하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_{mn} + \omega_{mn}^2 q_{mn} = \alpha \bar{p}(t) \quad (12)$$

여기서  $\alpha = \frac{2}{\sqrt{\rho ab}} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$  이다.

스펙트럴 해석법을 식(12)에 적용하기 위해서  $q_{mn}$ 를  $q_{mn} = \bar{q}_{mn} e^{i\omega t}$ 과 같이 주파수의 함수로 나타내고 힘  $\bar{p}$ 도 고속 푸리에변환을 통해  $\bar{p} = \hat{p} e^{i\omega t}$ 의 주파수의 함수로 나타내면 식(12)를 모달좌표값  $q_{mn}$ 으로 구조감쇠를 고려하여 표현할 경우

$$\bar{q}_{mn} = \frac{\alpha \hat{p}}{-\omega^2 + \omega_{mn}^2 (1 + i\eta)} \quad (13)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $\eta$ 는 구조감쇠계수(structural damping factor)이다. 식(14)에 가진력  $\hat{p}$ 의 주파수 성분  $\omega$ 를 변화시키면서 각 모드  $m, n$ 에 해당하는 모드 변위  $q_{mn}$ 를 구하고 이를 식(8)과 함께 식(10)에 대입 전개하면 주파수 함수로 변위를 얻을 수 있다. Fig. 3은 이상의 과정을 통한 스펙트럴 해석법을 이용해 얻은 결과와 기존의 엄밀해를 비교한 그림이다. Fig. 3에서 보듯이 스펙트럴해석법을 이용해 해석한 평판의 동적거동 결과는 엄밀해와 매우 근접함을 알 수 있다.

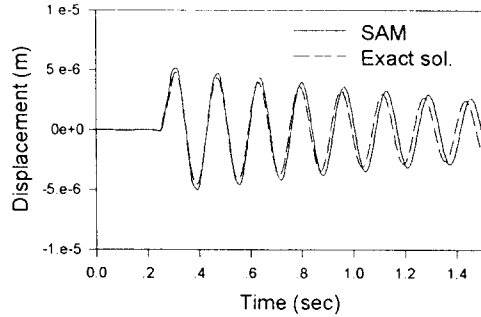


Fig. 3 Comparison of the dynamic responses by analytic method and SAM

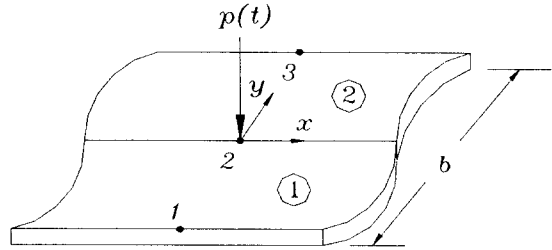


Fig. 4 Simply supported semi-infinite plate under impulse concentrated load

### 3.2 스펙트럴 요소법을 이용한 평행한 끝단을 갖는 반 무한평판(semi-infinite plate with parallel edge)의 해석

위에서 언급한 평판의 해석방법은 정규모드가 존재하는 제한적인 경우에만 적용할 수 있다. 따라서 좀더 일반적인 평판에 대한 해석을 위해서는 다른 방법이 고려되어야 한다. 그러나 임의의 경계를 갖는 유한한 평판의 이론적인 엄밀해는 일반적으로 존재하지 않는다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 4와 같은  $x$ 방향의 경계조건을 필요로 하지 않는 평행한 끝단을 갖는 반 무한 평판형태의 2차원 구조물을 스펙트럴 요소법으로 해석하기 위한 이론을 제시하려 한다.

식(7)에서 외력이 없는 경우  $x$ 와  $y$ 방향으로 진행되는 파동해를 식(14)와 같이 가정하고

$$w(x, y, t) = \hat{w} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (14)$$

이로부터 주파수와 파수와의 관계식을 유도하면 다음과 같다.

$$(k_x^2 + k_y^2)^2 = \beta^4 \quad (15)$$

$$k_{1,2y} = \pm i \sqrt{\beta^2 - k_x^2}, \quad k_{3,4y} = \pm \sqrt{\beta^2 - k_x^2}$$

여기서  $\beta^2 = \omega \sqrt{\rho h / D}$  이다. 식(14), (15)로부터 식(16)과 같은 네 개의 미지수를 갖는 해를 구할 수 있다.

$$\bar{w}(x, y, \omega) = e^{-ik_x x} [ Q ] [ A B C D ]^T \quad (16)$$

$$[ Q ] = [ e^{-ik_{1y}y} \quad e^{-ik_{2y}y} \quad e^{-ik_{3y}y} \quad e^{-ik_{4y}y} ]$$

여기서  $A, B, C, D$ 는 주파수와  $x$ 방향 파수( $k_x$ )의 함수이다. 평판을 두개의 스펙트럴 요소로 나누고 하나의 요소(①)에서의 노드점의 변위와 기울기를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}'_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$= [ N_e ] [ A B C D ]^T$$

평판에서의 전단력과 모멘트의 관계식(18)은 식(16)으로부터

$$V_y = D \left[ \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (18)$$

$$M_x = D \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$= [ T_e ] [ A B C D ]^T$$

과 같은 각 노드점에서의 전단력과 모멘트의 행렬식[8]으로 나타낼 수 있다. 식(17)과 식(19)로부터 미지수  $A, B, C, D$ 를 소거하여 나타내면

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [ T_e ] [ N_e ] \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}'_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}'_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$= [ S_e ] [ \bar{w}_1 \quad \bar{w}'_1 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{w}'_2 ]$$

과 같이 노드점에서의 전단력과 모멘트를 변위와 기울기로 나타낼 수 있다. 여기서  $[ S_e ]$ 는 평판의 스펙트럴 요소행렬이다. 각 요소에서 얻은 스펙트럴 요소행렬을 유한요소법과 같은 방법으로 조합할 수 있다. Fig. 4에서 요소①과 요소②를 결합하고 노드점 1과 3에서의 변위가 '0'임을 이용하면

$$\begin{bmatrix} S_{22}^1 & S_{23}^1 & S_{24}^1 & 0 \\ S_{32}^1 & S_{33}^1 + S_{11}^2 & S_{34}^1 + S_{12}^2 & S_{14}^2 \\ S_{42}^1 & S_{43}^1 + S_{21}^2 & S_{44}^1 + S_{22}^2 & S_{24}^2 \\ 0 & S_{41}^2 & S_{42}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}'_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}'_2 \\ \bar{w}'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[ S_c ] \{ \bar{w} \} = \{ F \} \quad (21)$$

와 같이 축약된 스펙트럴 행렬식을 구할 수 있다. 순간집중하중에 의한 반 무한평판의 임의의 위치  $x, y$ 에서의 동적응답은 식(16), (17), (21)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{w} = e^{-ik_x x} [ Q ] [ N_e ]^{-1} [ S_c ]^{-1} \{ F \} \quad (22)$$

식(22)에서 구한 변위  $w(x, y, t)$ 는 파수  $k_x$ 와 주파수  $\omega$ 의 함수이므로 각각의 파수  $k_x$ 와 주파수  $\omega$ 의 중첩된 형태로 표현하면 다음과 같이 시간 영역에서의 동적응답을 구할 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \hat{w}_{mn} e^{-k_m x} e^{i\omega_n t} \quad (23)$$

여기서  $N$ 는 주파수의 개수,  $M$ 는  $x$ 방향 파수의 개수이다. FFT와 IFFT에 사용된 sampling time  $T$ 와 data 개수  $N$ 은 각각 16초와 1024개 이고,  $x$ 방향 sampling space  $S$ 와 data 개수  $M$ 은 각각 150m와 512개 이다. 이 경우 주파수  $\omega_n$ 는  $2\pi \times n/T$ 이고 파수  $k_{xn}$ 는  $2\pi m/S$ 이다. Fig. 5는  $x$ 방향 파수  $k_{xn}$ 를 16개와 128개를 중첩하여 얻은 반 무한 평판의 노드점 2에서의 동적거동을 각각의 경우에 대해 시간축상에서 본 것이다. (a)의 경우와 같이  $x$ 방향의 파수를 비교적 적게 고려하면 운동양상은  $y$ 방향의 반사파가 거의 고려되지 않은 1차원 평판의 운동양상을 보이고 있음을 알 수 있다. 반면  $x$ 방향의 파수를 상대적으로 많이 고려한 (b)의 경우, 처음 가진시에 나타나는 1차 공진주파수에 의한 운동 때문에 초기의 순간에는  $y$ 방향의 반사파가 보이지 않으나 1차 공진에 의한 운동이 감쇠될 수록  $y$ 방향의 반사파 효과가 나타나면서 다소 복잡한 양상을 갖게 됨을 알 수 있다.

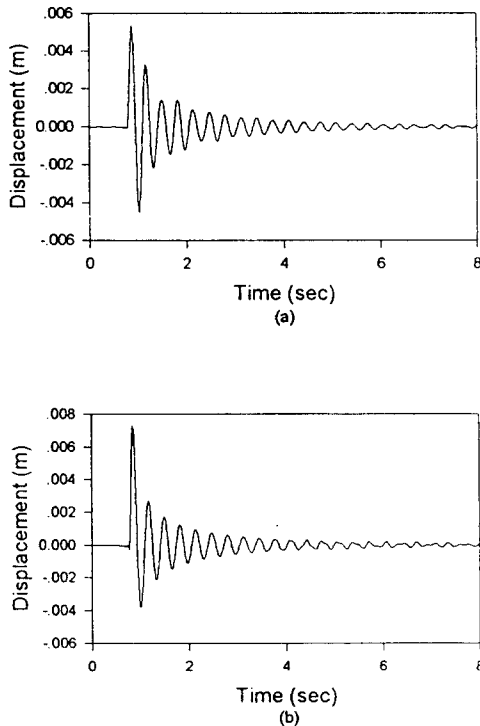


Fig. 5 Dynamic responses of the semi-infinite plate under impulse load : (a) No. of  $k_x = 16$  (b) No. of  $k_x = 128$

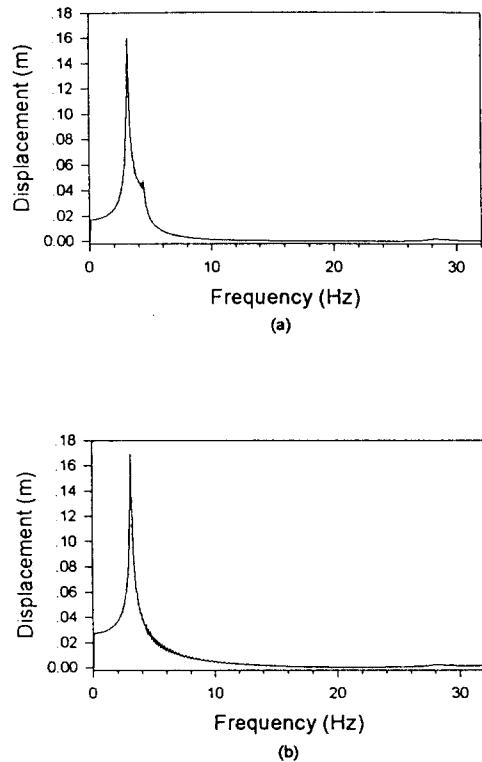


Fig. 6 Frequency responses of semi-infinite plate : (a) No. of  $k_x = 16$ , (b) No. of  $k_x = 128$

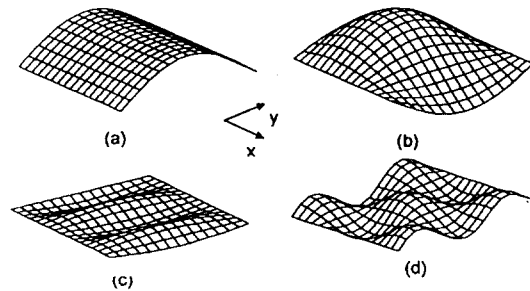


Fig. 7 Mode shapes of simply supported semi-infinite plate : (a)  $k_x = 0$ , 3.125 Hz (b)  $k_x = 0.0838$ , 3.125 Hz (c)  $k_x = 0.2094$ , 3.125 Hz (d)  $k_x = 0.0838$ , 28.125 Hz

Fig. 6은  $x$ 방향의 파수를 고려함으로써 나타나는 주파수 응답의 변화 양상이다. Fig. 7은 단순지지 보와  $x$ 방향의 파수와 주파수를 달리하면서 모드형

상을 그린 것이다. 첫 번째 그림에서는 x방향의 파수가 없기 때문에 1차원 보와 같은 운동양상을 보이고 파수가 커질수록 모드형상의 파장이 점차 짧아지는 양상을 보이고 있다. 그러나 Fig. 5 (a), (b)에서도 볼 수 있듯이 전체적인 운동양상은 저파수에 영향을 주로 받게 되므로 Fig. 7 (b)와 같은 저파수에 의한 모드형상을 중요시 여길 필요가 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 평판에 대한 동적거동을 예측하기 위한 스펙트럴 해석법을 개발하였다. 2차원 평판에 대한 스펙트럴 해석법의 적용 타당성을 검증하기 위해 해가 존재하는 단순지지 평판의 엄밀해를 이론적으로 구하고 이를 모드형상을 이용한 스펙트럴 해석법과 비교하였다. 또 일반적인 평판에 대해서도 스펙트럴 해석법의 적용을 위해 반 무한 평판에 대한 확장된 스펙트럴 요소법을 개발하여 검토하였다. 이 결과 본 연구에서 개발된 스펙트럴 해석법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

1. Achenbach, J. D., 1989, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, New York, pp. 33-35.
2. Doyle, J. F., 1989, *Wave Propagation in Structure FFT-based Spectral Analysis Methodology*, Springer-Verlag, Inc., New York, pp. 32-57.
3. Doyle, J. F., 1989, *Wave Propagation in Structure FFT-based Spectral Analysis Methodology*, Springer-Verlag, Inc., New York, pp. 7-31.
4. Danial, A. N. and Doyle, J. F., *Transverse Impact of a Damped Plate near a Straight Edge*, Journal of Vibration and Acoustics, 1995, vol. 117, pp. 103-108.
5. Szilard, R., 1974, *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp.

28-48.

6. Graff, K. F., 1973, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publication, Inc., New York, pp. 9-13.
7. Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing co., Inc., New York, pp. 287-298.
8. 이준근, 이우식, 박철희, 1996, *스펙트럴 요소를 이용한 곡선보 구조물의 동적거동 해석*, 한국 소음진동공학회지, 제6권 1호, pp. 83-88.

#### 부록

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= e^{\frac{ik_1 b}{2}}, & a_{12} &= e^{\frac{ik_2 b}{2}} \\
 a_{13} &= e^{\frac{ik_3 b}{2}}, & a_{14} &= e^{\frac{ik_4 b}{2}} \\
 a_{21} &= -ik_{1y} e^{\frac{ik_1 b}{2}}, & a_{22} &= -ik_{2y} e^{\frac{ik_2 b}{2}} \\
 a_{23} &= -ik_{3y} e^{\frac{ik_3 b}{2}}, & a_{24} &= -ik_{4y} e^{\frac{ik_4 b}{2}} \\
 a_{31} &= e^{\frac{-ik_1 b}{2}}, & a_{32} &= e^{\frac{-ik_2 b}{2}} \\
 a_{33} &= e^{\frac{-ik_3 b}{2}}, & a_{34} &= e^{\frac{-ik_4 b}{2}} \\
 a_{41} &= -ik_{1y} e^{\frac{-ik_1 b}{2}}, & a_{42} &= -ik_{2y} e^{\frac{-ik_2 b}{2}} \\
 a_{43} &= -ik_{3y} e^{\frac{-ik_3 b}{2}}, & a_{44} &= -ik_{4y} e^{\frac{-ik_4 b}{2}} \\
 b_{11} &= iDk_{1y} \{k_{1y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{ik_1 b}{2}} \\
 b_{12} &= iDk_{2y} \{k_{2y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{ik_2 b}{2}} \\
 b_{13} &= iDk_{3y} \{k_{3y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{ik_3 b}{2}} \\
 b_{14} &= iDk_{4y} \{k_{4y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{ik_4 b}{2}} \\
 b_{21} &= D(k_{1y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{ik_1 b}{2}}, & b_{22} &= D(k_{2y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{ik_2 b}{2}} \\
 b_{23} &= D(k_{3y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{ik_3 b}{2}}, & b_{24} &= D(k_{4y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{ik_4 b}{2}} \\
 b_{31} &= -iDk_{1y} \{k_{1y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{-ik_1 b}{2}} \\
 b_{32} &= -iDk_{2y} \{k_{2y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{-ik_2 b}{2}} \\
 b_{33} &= -iDk_{3y} \{k_{3y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{-ik_3 b}{2}} \\
 b_{34} &= -iDk_{4y} \{k_{4y}^2 + (2-\nu)k_x^2\} e^{\frac{-ik_4 b}{2}} \\
 b_{41} &= -D(k_{1y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{-ik_1 b}{2}}, & b_{42} &= -D(k_{2y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{-ik_2 b}{2}} \\
 b_{43} &= -D(k_{3y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{-ik_3 b}{2}}, & b_{44} &= -D(k_{4y}^2 + \nu k_x^2) e^{\frac{-ik_4 b}{2}}
 \end{aligned}$$