한국소음진동공학회 1996년도 춘계학술대회논문집 pp. 322-327.

축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 동적 안정성 해석

[0]현 상 학*, 유 홍 희**

(Dynamic Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams)

(Sang-Hak Hyun, Hong-Hee Yoo)

ABSTRACT

Dynamic stability of an axially oscillating cantilever beam is investigated in this paper. The equations of motion are derived and transformed into non-dimensional ones. The equations include harmonically oscillating parameters which originate from the motion-induced stiffness variation. Using the equations, the multiple scale perturbation method is employed to obtain a stability diagram. The stability diagram shows that relatively large unstable regions exist around the frequencies of the first bending natural frequency, twice the first bending natural frequency, and twice the second bending natural frequency. The validity of the diagram is proved by direct numerical simulations of the dynamic system.

1. 서론

축방향 왕복운동을 하는 대표적인 외팔보 구조물로 재봉기의 바늘이 있다. 고급의류의 재단시 바늘의 단면두께는 매우 가늘며 따라서 그 강성이 작아 상당히 유연한 구조가 된다. 바늘은 재단을 위해 축방향 왕복운동을 하는데 이 때 횡방향 변위가 크게 발생한다면 재단의 정확도는 물론 작업수행에 상당한 영향을 미치게 된다. 특히 재봉기가 생산성 향상을 위해 고속으로 작업을 수행해야 하는 경우에는 바늘의 동적 안정성은 재봉기의 전체적 성능에 결정적인 요소가 될 것이므로 시스템 설계시 이를 고려하는 것은 필수적인 사항이라 할 수 있다.

외팔보가 지지점에 대해 강체운동을 하면 그 횡방향 굽힘강성이 종종 변화하게 된다. 그 대표적인 예가 회전운동이며 이 때 외팔보의 굽힘강성은 회전 각속도에 따라 일정하게 변화한다. 회전운동을 하는 경우와 달리 외팔보가 축방향 왕복운동을 하게되면 외팔보의 굽힘강성은 일정한 값을 갖게되는 것이 아니고 운동방향에 따라 변화하는 값을 갖게된다. 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속될 때는 강성이 감소하고 반대방향으로 가속되면 강성이 증가하는, 굽힘강성이 연속적으로 변화하는 현상이 발생하게 된다. 따라서 이러한 굽힘강성의 변화가 외팔보의 운동방정식에서 매개변수가 변화하는 형태로 나타나게 되는 것이다.

강체운동을 하는 외팔보에 관한 연구는 주로 회전운동에 국한되어 왔다. 외팔보가 그 축에 수직방향으로 회전운동을 하는 경우는 원심력이 발생하여 강성이 증가하고 그 결과로 고유진동수가 증가하는 현상이 발생한다. 참고문헌 [1-3]은 이와 관련된 많은 연구문헌 중 일부이다. 참고문헌 [4]와 [5]는 외팔보가 강체운동을 하는 경우의 일반적인 동적 모델링을 제시하고 있으나 여기서도 역시 회전운동을 하는 예제만을 다루고 있다. 참고문헌 [6]에서는 회전운동뿐만 아니라 축방향 병진운동을 할 때도 강성이 변하는 것을 보여주고 동적 반응 해석을 수행하였으나 운동의 안정성은 고려하지 않았다. 매개변수가 변화하는 시스템에 대한 연구는 그 역사가 참고문헌 [7]에 까지 거슬러 올라갈 수 있으며 이에 대한 수학적 이론을 처음 수립한 것은 참고문헌 [8, 9]이다. 그 후 이에 관한 연구가 많이 이루어지다가 본격적으로 구조물로 적용된 것은 참고문헌 [10, 11]과 같은 연구에서이며 참고문헌 [12]에는 안정성 해석을 위한 여러 가지 해석방법이 자세히 소개되어 있다.

본 논문에서는 현재까지 기존 연구문헌 상에서 다루어진 적이 없는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보 구조물의 동적 모델링을 유도하고 이에 근거한 안정성 해석을 수행하여 이러한 구조물들의 동적 안정성 설계에 필요한 기본적인 데이타를 추출하는데 연구의 목적을 두었다. 이러한 연구는 앞서 언급된 바와 같이 고속 재봉기와 같은 실제적인 적용예제의 설계에 매우 유용한 기초 자료가 되리라고 판단되며 앞으로 이와 유사한 구조시스템의 안정성 해석을 위한 연구에도 참고자료가 되리라고 사료된다. 또한 이와 유사한 강체운동을 하는 구조시스템들의 해석연구를 위한 참조자료가 될 것이라 판단된다.

* 한양 대학교 대학원
** 한양 대학교 기계설계학과

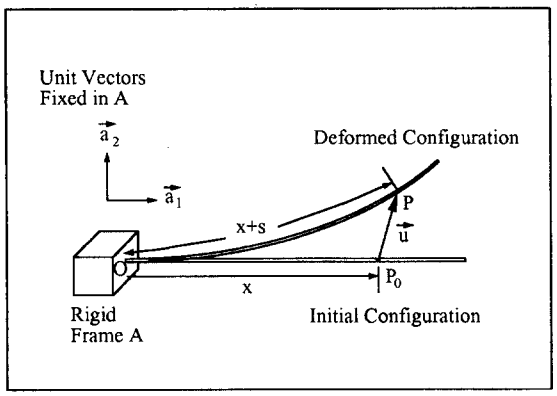


Figure 1. Configuration of a Cantilever Beam

2. 운동 방정식

본 절에서는 축방향 운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하려 한다. 본 연구에서는 2차원 평면 운동을 하는 보를 해석대상으로 정하였다. 그림 1은 강체 A에 고정된 외팔보의 모습을 보여준다. P_0는 외팔보상 임의 질점의 변형전 위치를 나타내며 F는 변형후 위치를 나타낸다. 여기서 $\vec{a}_1$과 $\vec{a}_2$는 강체 A에 부착된 서로 수직인 단위벡터들을 나타내며, x는 보의 고정점 O로부터 변형전 임의점 P_0까지의 거리를, $\vec{u}$는 탄성변위를, s는 임의 질점의 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 강체 운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하기 위해 s와 u_2를 다음과 같이 근사화한다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{1j}(x)\ q_j(t) \tag{1}$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{2j}(x)\ q_j(t) \tag{2}$$

여기서 $\phi_{1j}(x)$와 $\phi_{2j}(x)$는 보의 인장방향과 굽힘방향 모드함수들을 나타내며 $q_j(t)$는 시간의 함수인 일반좌표들이고 μ는 일반좌표의 수이다. 변형이 일어날 때 보의 임의점 F점의 속도 $\vec{v}^F$는 다음의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + \vec{v}^{P/A} \tag{3}$$

여기서 $\vec{v}^O$는 외팔보의 축방향으로 운동을 하는강체 A상의 (외팔보의 고정단 점) O점의 속도이며 $\vec{v}^{P/A}$는 강체 A에서 관찰한 F점의 속도를 나타내는데 이들은 다음의 식과 같이 $\vec{a}_1$과 $\vec{a}_2$방향 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{v}^O = v_1 \vec{a}_1 \tag{4}$$

$$\vec{v}^{P/A} = \dot{u}_1 \vec{a}_1 + \dot{u}_2 \vec{a}_2 \tag{5}$$

따라서

$$\vec{v}^P = (v_1 + \dot{u}_1)\vec{a}_1 + \dot{u}_2 \vec{a}_2 \tag{6}$$

여기서 F점의 가속도 $\vec{a}^F$는 $\vec{v}^F$를 시간으로 미분하여 쉽게 구할 수 있다. 그런데 식 (6)에 나타난 $\dot{u}_1$은, 앞에서 u_1이 근사화 된 것이 아니므로, s와 u_2로 표시돼야 한다. 이를 위해 필요한 s와 u_1, u_2의 관계식은 다음과 같이 주어진다 (참고문헌 [13] 참조).

$$x+s = \int_0^x \left[\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \tag{7}$$

Taylor 급수전개를 이용하여 식 (7)을 2차항까지 전개하여 정리하면

$$s = u_1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma + H.D.T. \tag{8}$$

따라서

$$\dot{u}_1 = \dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma}\right) d\sigma + H.D.T. \tag{9}$$

식 (9)를 이용하여 $\vec{v}^F$의 $\dot{q}_i$에 대한 미분값을 (편속도) 변형변수에 대한 2차항까지 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} = (\phi_{1i} - \phi^*_{1i})\vec{a}_1 + \phi_{2i}\vec{a}_2 \tag{10}$$

여기서

$$\phi^*_{1i} = \sum_{j=1}^{\mu} \left(\int_0^x \phi_{2i,\sigma}\phi_{2j,\sigma}\, d\sigma\right) q_j \tag{11}$$

이상에서 구한식들과 다음식을 이용하여 운동방정식의 일반관성력을 (참고문헌 (14) 참조) 구할 수 있다.

$$F^*_i = -\int_0^L \rho \vec{a}^P \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i}\right) dx \tag{12}$$

여기서 L과 ρ는 외팔보의 길이와 단위길이당 질량을 각각 나타낸다.

외력이 작용하지 않는 경우에 운동방정식의 일반작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘효과만 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{13}$$

여기서 E는 영의 계수 A는 단면적, I는 2차면적모멘트를 나타낸다. 식 (13)과 다음식을 이용하여 일반작용력을 구할 수 있다.

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{14}$$

이상의 결과를 종합하면 축방향 운동을 하는 외팔보의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\sum_{j=1}^{n}[M_{ij}^{11}\ddot{q}_j+K_{ij}^{S}q_j]=P_i \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[M_{ij}^{22}\ddot{q}_j+(K_{ij}^{B}-\dot{v}_1K_{ij}^{G})q_j]=0 \tag{16}$$

여기서

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho\ \phi_{ai}\ \phi_{bj}\ dx \tag{17}$$

$$K_{ij}^{S} = \int_0^L EA\ \phi_{1i,x}\ \phi_{1j,x}\ dx \tag{18}$$

$$K_{ij}^{B} = \int_0^L EI\ \phi_{2i,xx}\ \phi_{2j,xx}\ dx \tag{19}$$

$$K_{ij}^{G} = \int_0^L \rho(L-x)\phi_{2i,x}\ \phi_{2j,x}\ dx \tag{20}$$

$$P_i=-\dot{v}_1\int_0^L \rho\phi_{1i}\ dx \tag{21}$$

운동방정식 (15)와 (16)은 서로 연성되지 않는다. 또한 식 (15)에서 우변항에 의한 강제진동 주파수가 외팔보의 축방향 고유진동수와 같다면 불안정한 동적 반응을 얻게 되겠으나 보의 축방향은 횡방향에 비해 훨씬 높은 고유진동수의 값을 가지므로 실제적인 고려가치가 별로 없다. 따라서 본 연구에서는 외팔보의 축방향 운동시 발생할 수 있는 횡방향 변위의 안정성 해석을 유도된 식 (16)에 근거해 수행하려 한다.

3. 안정성 해석모델

식 (16)에서 강성항에 나타나는 $\dot{v}_1$는 외팔보가 축방향으로 왕복운동을 하면 일정한 값을 가지지 않는다. 외팔보의 축방향 왕복운동을 나타내기 위해 v_1을 다음 함수로 나타낸다.

$$v_1=v\ (1-\cos\omega t) \tag{22}$$

따라서

$$\dot{v}_1=v\omega\ \sin\omega t \tag{23}$$

식 (22)와 (23)에서 ω는 왕복운동 회전 주파수를 나타낸다. 따라서 식 (16)은 다음 형태로 변환시켜 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n}[M_{ij}^{22}\ddot{q}_j+(K_{ij}^{B}-v\omega\sin\omega t\ K_{ij}^{G})q_j]=0 \tag{24}$$

식 (24)에는 강성항이 조화함수로 나타나는데 이 식과 같은 방정식으로 대표되는 시스템들을 매개변수 진동 시스템이라 부른다.

우선 일반적 해석결과를 얻기 위해서 식 (24)를 무차원화 하기 위해 다음의 무차원 변수들을 정의한다.

$$\xi=\frac{x}{L} \tag{25}$$

$$\tau=\frac{t}{T} \tag{26}$$

$$\vartheta_i=\frac{q_i}{L} \tag{27}$$

여기서

$$T=(\frac{\rho L^4}{EI})^{1/2} \tag{28}$$

식 (25-27)을 이용하여 식 (24)를 정리하면,

$$\sum_{j=1}^{n}[\overline{M_{ij}^{22}}\ \vartheta_j'+(\overline{K_{ij}^{B}}-\lambda\gamma\sin\gamma\tau\ \overline{K_{ij}^{G}})\vartheta_j]=0 \tag{29}$$

여기서 ϑ_j'는 무차원 시간 τ에 대해 두 번 미분한 값을 나타내며, 위식에 나타난 행렬들은 다음과 같다.

$$\overline{M_{ij}^{22}}=\int_0^1 \phi_i(\xi)\phi_j(\xi)\,d\xi \tag{30}$$

$$\overline{K_{ij}^{B}}=\int_0^1 \phi_{i,\xi\xi}\ \phi_{j,\xi\xi}\ d\xi \tag{31}$$

$$\overline{K_{ij}^{G}}=\int_0^1 (1-\xi)\phi_{i,\xi}\ \phi_{j,\xi}\ d\xi \tag{32}$$

또한

$$\lambda=\frac{vT}{L} \tag{33}$$

$$\gamma=\omega T \tag{34}$$

식 (30-32)에서 $\phi_i(\xi)$는 $\phi_{2i}(x)$와 동일 값을 갖는 함수로 외팔보의 굽힘진동 고유모드함수들이 흔히 사용되며, 이 때 식 (30)의 질량행렬은 단위행렬이, 식 (31)의 강성행렬은 대각행렬이 된다. 따라서 식 (29)는 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\vartheta_i'+\omega_i^2\vartheta_i-\lambda\gamma\sin\gamma\tau\sum_{j=1}^{n}\overline{K_{ij}^{G}}\vartheta_j=0 \tag{35}$$

여기서 ω_i는 외팔보의 i번째 굽힘 고유진동수에 T를 곱한 무차원 값이다. 식 (35)로 대표되는 시스템에 대한 안정성 해석방법으로는 Multiple Scale Perturbation Method가 가장 적절하다. 여기서도 그 방법을 이용하여 안정성 해석을 수행하였다. 이 방법의 해석적 전개과정에 대한 상세한 내용은 참고문헌 [15]에 잘 나타나 있고 그 양이 방대하므로 본 논문에서는 그에 대한 기술을 생략하였다.

4. 수치 해석결과

그림 2는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 횡방향 운동안정성을 판별할 수 있는 그림들이다. 그림에서 2(a)와 2(b)는 각각 Multiple Scale Perturbation Method를 1st Order와 2nd Order까지 고려했을 때 얻어진 결과들로 그림에서 빗금친 부분들은 불안정한 영역을 그 외의 부분들은 안정한 영역을 각각 나타낸다. 안정영역과 불안정 영역을

구분하는 선을 전이 곡선이라 (Transition Curves) 하는데 1st Order 전이곡선들은 $\gamma=\omega_p+\omega_q$ 근처에 나타나고 2nd Order 전이곡선들은 $\gamma=(\omega_p+\omega_q)/2$ 근처에 나타난다. 그림 2(b)가 보여주듯이 2nd Order까지를 고려했을 때는 1st Order만을 고려했을 때 나타나지 않는 불안정 영역이 추가로 나타나는데 고차 Order 영역은 매우 협소한 것을 알 수 있다. 그림 3에는 고차 Order를 고려할 때 1st Order의 전이 곡선들에 의한 불안정 영역 변화를 보여주고 있다. 보통 3rd Order 이상은 불안정 영역에 거의 영향을 미치지 않으므로 고려하지 않는다. 물론 축방향 운동의 주파수가 두 고유진동수의 합을 임의의 정수로 나눈 값에서는 불안정 영역들이 존재하나 이들은 모두 거의 폭이 없으므로 그 값과 운동주파수가 정확히 일치하지 않으면 불안정한 운동을 하지 않는다. 실제로 2nd Order 결과인 $\gamma=(\omega_1+\omega_3)/2$의 결과가 불안정 영역의 폭이 없이 거의 연직선처럼 보인다. 그림 3에는 또한 동적 반응 수치해석을 수행할 8개 점들의 위치들이 표시되어 있는데, 그림 4에는 이 점들의 매개변수 값들을 사용한 동적반응 수치해석 결과들이 나타나 있다. 해석에 사용된 모드수는 10개이고 초기조건은 외팔보 자유단에서 횡방향 변위를 0.01로 주었다. 그림 4(a)는 그림 3의 A점에 대한 동적반응 수치해석결과를 보여주는데 그림 3에서 예측되는 대로 안정된 운동을 하고 있다. 그림 4(b)와 (c)에서 보듯이 그림 3의 B점과 C점의 경우는 발산하는 횡방향 변위를 보여주고 있다. 여기서 특히 B점은 First Order만을 고려한 안정성 해석에서는 안정된 영역에 속한 점으로 Second Order까지를 고려할 때만 정확히 판별될 수 있음을 보여준다. 그림 3의 D점은 First Order만 고려할 때는 불안정 영역에 속한 것으로 판단되나 Second Order까지 고려하면 안정 영역에 속한 것을 보여주는데 이에 해당하는 동적 반응인 그림 4(d)는 안정된 결과를 보여주고 있다. 그림 3의 E점과 F점은 서로 근접해 있으나 각각 불안정 영역의 안과 바깥쪽에 위치하고 있으며 따라서 그 해석 결과인 그림 4(e)와 (f)는 각각 발산과 수렴하는 것을 보여준다. 그림 3의 G점은 폭이 매우 작은 영역 부근에 위치한 점이다. 이 점의 수치해석 결과에 해당하는 그림 4(g)는 그러나 안정된 결과를 보여준다. 이는 앞에서 언급된대로 불안정 영역의 폭이 너무 작아 상당한 유효숫자까지 정확하게 값이 고려되지 않으면 불안정한 동적반응이 생기지 않음을 보여준다. 그림 4(h)는 G점보다 더 정확한 값을 (유효숫자 4자리까지 정확한 값을 사용함) 가지고 수치해석을 수행한 것으로서 시간이 지나면서 진폭이 약간씩 점점 증가하는 것을 보여주고 있다. 그림 4(i)는 더 긴 시간대까지 수치해석을 수행한 결과이며 이 그림에서 비로서 동적 반응이 발산하고 있는 것이 뚜렷이 보인다. 따라서 이러한 위치에서의 발산은 감쇄효과 등을 고려할 때 실제적으로 발생할 가능성이 별로 없다고 판단되어 진다.

5. 결론

본 논문에서는 조화함수로 축방향 왕복운동을 하는 외팔보형 구조물의 동적 안정성을 규명하기 위한 연구가 수행되었다. 축방향 왕복 조화운동에 따른 운동방정식 상의 강성변화가 규명되었으며 이를 근거로 Multiple Scale Perturbation Method를 이용한 안정성 해석이 수행되었다. 이 해석결과 $\gamma=\omega_1$, $\gamma=2\omega_1$, 그리고 $\gamma=2\omega_2$ 근처에서 큰 폭의 불안정 영역을 갖는 것을 알 수 있었으며, 그 외의 영역에서는 상당히 작은 폭의 불안정 영역들만을 갖는 것을 알 수 있었다. 이러한 안정성 해석 결과를 확인하기 위해 동적반응 해석을 수행하였으며 안정성 해석의 정확성을 확인할 수 있었다.

[참고문헌]

[1] Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.

[2] Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28-30.

[3] Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and* vibratoire d'une membrane de forme elliptique," *J. Math.*, 13, pp.137-203.

[9] Hill, G., 1886, "On the Part of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon," *Acta Math.*, 8, pp.1-36.

[10] Beal, T., 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *AIAA J.*, 3, pp.486-494.

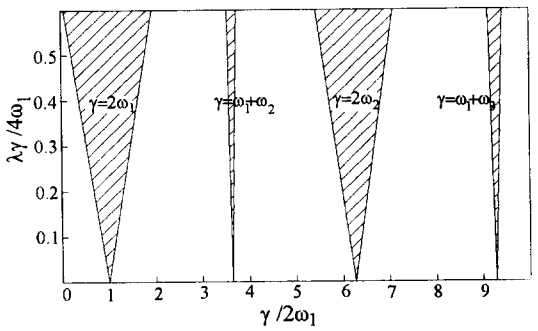
[11] Iwatsubo, T., Saigo, M., and Sugiyama, Y., 1973, "Parametric Instability of Clamped-Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," *J. of Sound and Vibration*, 30, pp.65-77.

[12] Nayfeh, A. and Mook, D., 1979, Nonlinear Oscillation, John Wiley & Sons, Inc.

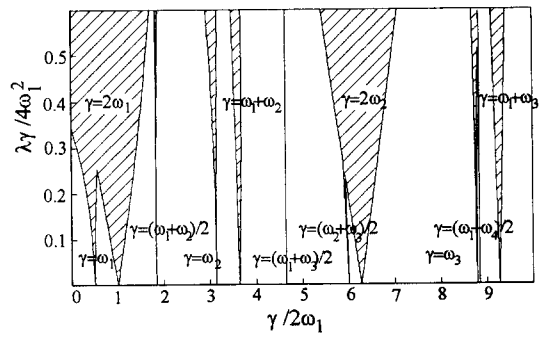
[13] Eisenhart, L., 1947, An Introduction to Differential Geometry, Princeton University Press.

[14] Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics, Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co.

[15] Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, 62, pp.375-381.



(a) The First Order Perturbation Results



(b) The Second Order Perturbation Results

Figure 2. Dynamic Stability Diagrams for Axially Oscillating Cantilever Beams

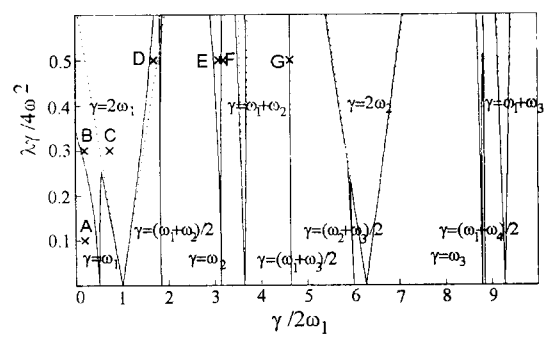
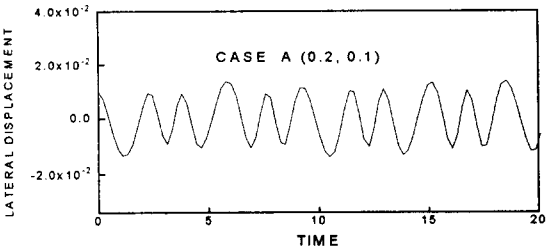
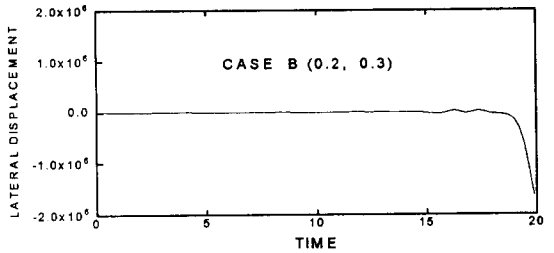


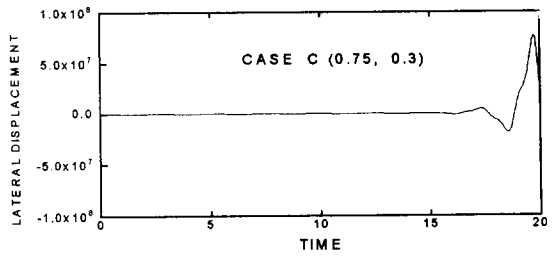
Figure 3. Seven Parameter Positions in the Stability Diagram



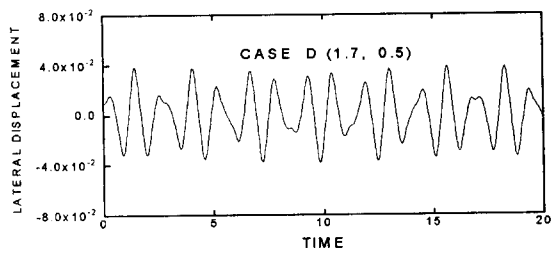
(a) Position A with Parametric Values (0.20, 0.10)



(b) Position B with Parametric Values (0.20, 0.30)



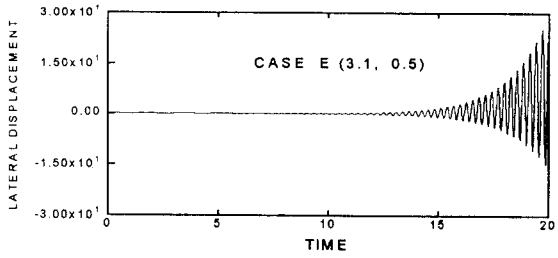
(c) Position C with Parametric Values (0.75, 0.30)



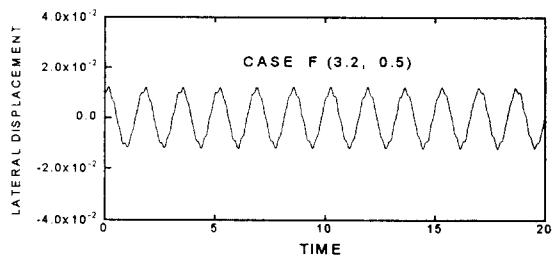
(d) Position D with Parametric Values (1.70, 0.50)

Figure 4. Dynamic Response Simulation Results

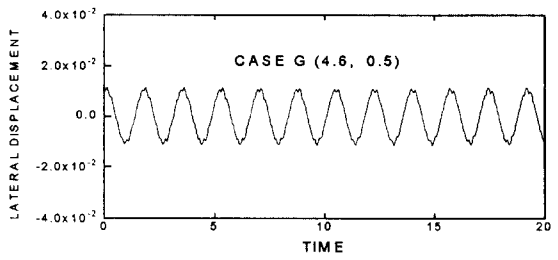
(Continued to the Next Page)



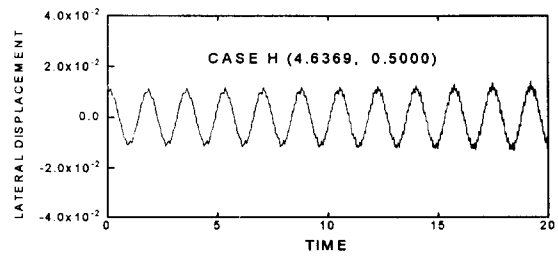
(e) Position E with Parametric Values (3.10, 0.50)



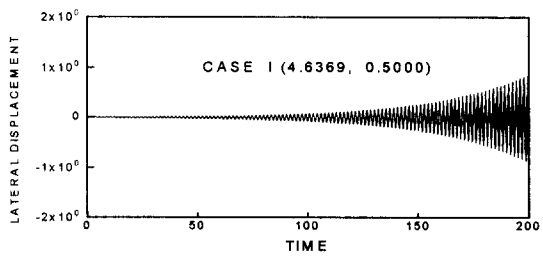
(f) Position F with Parametric Values (3.20, 0.50)



(g) Position G with Parametric Values (4.64, 0.50)



(h) Position G with Parametric Values (4.6369, 0.5)



(i) Position G with Parametric Values (4.6369, 0.5)

Figure 4. Dynamic Response Simulation Results
(Continued from the Previous Page)