

강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 진동해석기법

문덕홍* · 최명수** · 홍승수**

Vibration Analysis Algorithm of a Beam-like Structure Using Transfer Stiffness Coefficient

D.H. Moon · M.S. Choi · S.S. Hong

ABSTRACT

The authors has developed the transfer influence coefficient method(TICM) which is an algorithm for the analysis of vibration suitable for a personal computer and applied to many structures such as straight-line beam, plate and shell structures. But TICM can't be applied to the closed loop system and is required extremely much time on the computation of complicate and large structures.

Therefore, We now suggest the transfer stiffness coefficient method(TSCM) overcoming these two problems, which consists on the concept of the substructure synthesis method and transfer influence coefficient method.

TSCM is formulated for the free vibration analyses of a straight-line distributed beam structure and confirmed by the results of numerical computation to the numerical high accuracy and the high speed.

1. 서 론

저자들은 고속, 고정도의 진동해석기법인 전달영향계수법을 개발하고, 직선형 구조물, 판 구조물, 셸 구조물 등 공학적으로 중요한 여러 구조물에 적용하여 그 유효성을 입증해 왔다⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾. 이 기법은 페루프 구조물에 적용할 수 없다는 점 그리고 복잡, 거대 구조물에 대해서는 계산량이 매우 증가하므로 좀 더 빠른 새로운 계산기법의 개발이 요망되고 있다.

따라서, 본 연구에서는 내부 자유도를 소거하는 부분구조합성법⁽⁷⁾과 같은 개념과 강성계수의 전달 영향계수법적 전달의 개념을 도입한 전달강성계수법을 새로이 제안한다.

우선, 계산능률면을 검토하기 위하여, 회전축과

같은 일정단면 직선형 구조물에 대하여 굽힘 자유진동 해석 알고리즘을 정식화한다. 간단한 수치계산 실험을 통하여 계산정도 및 계산시간의 양면에서 본 해석기법의 유효성을 제시한다. 페루프를 갖는 계에 대해서는 다음 기회에 보고하기로 한다.

2. 전달강성계수법의 기본 개념

2.1 해석모델

Fig. 1과 같은 다수의 일정단면 직선보로 구성된 구조물의 면내 굽힘 자유진동을 해석한다. 해석 알고리즘의 일반화를 위하여 좌단, 우단 및 직선보 사이의 모든 결합부에는 전단 및 회전스프링으로 구성된 기초 지지요소가 존재하는 것으로 가정한다. 실제 계산에 있어서는 해당 스프링상수 값에 실제값을 대입(스프링이 존재하지 않을 때는 영으로 대입)하여 처리한다. 해석대상 구조물에서 기초 지지요소가 존재하는 곳을 절점이라 하고, 좌단에

* 정희원, 부산수산대학교 제어기계공학과

** 정희원, 부산수산대학교 기관학과 대학원

서 우단에 걸쳐 각각 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n 이라고 부른다. 또 절점 $j-1$ 과 절점 j 사이의 직선 보를 j 번째 부분구조(substructure)라 하고, 또 각각의 부분구조를 분할수로 등분할한 것을 기본요소(Fundamental element)라 한다(Fig. 2 참조). 기본요소는 그 중심에 대하여 좌우대칭인 분포계로 모델링되고, 좌우의 상태량을 첨자 "L", "R"로 구별한다.

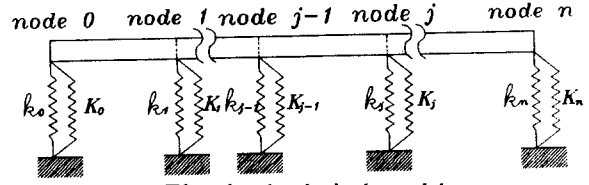


Fig. 1 Analytical model

2.2 자체 및 상대 동적강성계수행렬

기본요소 양단의 횡변위(y^L, y^R), 각변위(θ^L, θ^R), 전단력(F^L, F^R) 및 모멘트(M^L, M^R)의 정방향을 Fig. 2와 같이 정의한다. 구조물이 가진동수 ω 의 조화진동을 할 때 기본요소 양단에 관한 상태량 벡터 사이의 관계는 전달행렬⁽⁸⁾로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}^L \quad (1)$$

여기서, 첨자 "t"는 행렬의 전치를 뜻하고, $d^L = (y, \theta)^L$, $d^R = (y, \theta)^R$, $f^L = (F, M)^L$, $f^R = (F, M)^R$ 이고, A, B, C 및 D 는 일정한 등분포질량을 갖는 오일러 보(Euler beam)로 해석할 경우에 상당하는 부분매트릭스(2×2)이며, 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} C_0 & iC_1 \\ \beta^4 C_3 / l & C_0 \end{bmatrix} \\ B_i &= \begin{bmatrix} -alC_3 & aC_2 \\ -aC_2 & aC_1 / l \end{bmatrix} \\ C_i &= \begin{bmatrix} -\beta^4 C_1 / al & -\beta^4 C_2 / a \\ \beta^4 C_2 / a & \beta^4 iC_3 / a \end{bmatrix} \\ D_i &= \begin{bmatrix} C_0 & -\beta^4 C_3 / l \\ -iC_1 & C_0 \end{bmatrix} \\ C_0 &= (\cosh \beta + \cos \beta) / 2 \\ C_1 &= (\sinh \beta + \sin \beta) / 2\beta \\ C_2 &= (\cosh \beta - \cos \beta) / 2\beta^2 \\ C_3 &= (\sinh \beta - \sin \beta) / 2\beta^3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$a = l^2 / EI, \quad \beta^4 = \mu \omega^2 l^4 / EI$$

그리고 l, μ 및 EI 는 기본요소의 길이, 선밀도 및 굽힘 강성 이고, ω 는 고유 각진동수이다.

식(1)의 역의 관계로부터 다음식이 성립한다.

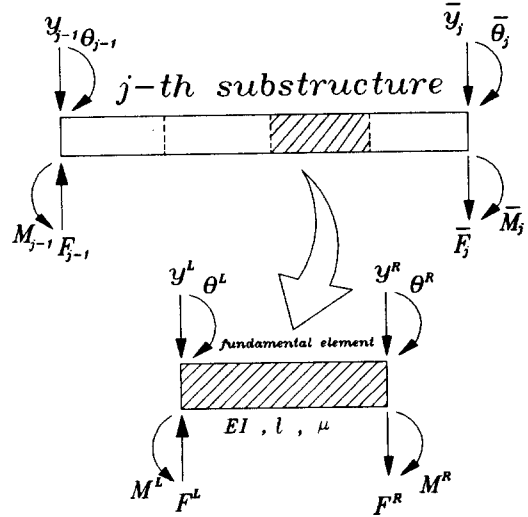


Fig. 2 Substructure and fundamental element

$$\begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}^R \quad (3)$$

식(1), (3)으로부터 기본요소 양단의 힘벡터를 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$f^R = S^a d^R + S^c d^L, \quad f^L = s^c d^R + s^a d^L \quad (4)$$

$$S^a = DB^{-1}, \quad s^a = -B^{-1}A, \quad s^c = -{}^tS^c = B^{-1} \quad (5)$$

앞으로는 S^a, s^a 를 자체 동적강성계수행렬(2×2 대칭), S^c, s^c 를 상대 동적강성계수행렬(2×2 비대칭; 단, 비대각요소는 서로 부호만 다를 뿐 절대치는 일치)라고 한다. 식(5)를 풀어보면 기본요소는 좌우대칭이므로 S^a 와 s^a 의 관계 및 S^c 와 s^c 의 관계는 각각 대각요소의 부호만이 다르다는 것을 알 수 있다.

2.3 직렬결합법칙

임의의 갯수($2^0 \sim 2^m$)의 기본요소로 구성된 일정 단면 보(부분구조) 내부의 부분계를 분계라고 하자. 분계는 좌우대칭이다.

먼저 분계 A의 우단에 분계 B를 직선상에 강하게 결합해서 새로운 분계 C를 구성하는 것을 생각한다. 이때 분계 A와 B의 양단의 동적강성계수행렬로부터 분계 C의 동적강성계수행렬을 구하기 위한 직렬결합칙은 다음과 같이 구해진다. 단 각 분계에 관한 물리량을 하첨자 "A, B, C"로 구별한다.

우선 분계 A와 분계 B의 자체 및 상대 동적강성계수행렬을 이미 알고 있을 때, 양분계의 양단에 걸쳐서 상태량 벡터의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} f_A^R &= S_A^a d_A^R + S_A^c d_A^L \\ f_A^L &= s_A^c d_A^R + s_A^a d_A^L \\ f_B^R &= S_B^a d_B^R + S_B^c d_B^L \\ f_B^L &= s_B^c d_B^R + s_B^a d_B^L \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

양분계의 결합은 연속이므로, 결합부에 있어서 상태량 벡터 사이의 관계는 $d_A^R = d_B^L$ 및 $f_A^R = f_B^L$ 이다. 또 양분계와 결합후의 분계 C의 상태량 벡터 사이의 관계는, 명확히 $d_C^L = d_A^L$, $d_C^R = d_B^R$ 및 $f_C^L = f_A^L$, $f_C^R = f_B^R$ 이다. 이들의 관계를 이용해서 식(6)으로부터 결합부의 상태량을 소거함에 따라 동적강성계수행렬의 직렬결합법칙으로서 다음 식을 얻는다. 이것은 $S_{A,B}^a, S_{A,B}^c, s_{A,B}^a, s_{A,B}^c$ 로부터 $S_C^a, S_C^c, s_C^a, s_C^c$ 를 구하기 위한 관계식이다.

$$\left. \begin{aligned} f_C^R &= S_C^a d_C^R + S_C^c d_C^L \\ f_C^L &= s_C^c d_C^R + s_C^a d_C^L \\ S_C^a &= S_B^a + S_B^c T_{AB} s_B^c \\ S_C^c &= -S_B^c T_{AB} S_A^a \\ s_C^a &= s_A^a - s_A^c T_{AB} S_A^a \\ s_C^c &= s_A^c T_{AB} s_B^c \\ T_{AB} &= (S_A^a - s_B^a)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

기본요소로부터 일정단면 보를 재구성할 때, 2개의 동일한 분계 A, B를 직렬결합해서 얻어진 분계 C를 새로운 동일한 분계 A, B로서 이들을 재결합한다고 하는 직렬결합칙을 재귀적으로 적용하면 일정단면 보 양단간의 자체 및 상대 동적강성계수

행렬의 계산 효율을 좋게 할 수 있다. 따라서 일정단면 보의 기본요소를 2의 멱수로 분할하는 것이 가장 좋다.

3. 면내 굽힘 자유진동해석

3.1 진동수방정식

지금 각 일정단면 보에 대해서 2장에서 유도한 직렬결합법칙을 적용함에 따라서 j 번째 및 $j+1$ 번째 일정단면 보 양단간에 있어서의 자체 및 상대 동적강성계수행렬이 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= S_j^a d_j + S_j^c d_{j-1} \\ f_{j-1} &= s_j^c d_j + s_j^a d_{j-1} \\ \bar{f}_{j+1} &= S_{j+1}^a d_{j+1} + S_{j+1}^c d_j \\ f_j &= s_{j+1}^c d_{j+1} + s_{j+1}^a d_j \\ S_j^a &= {}^t S_j^a, \quad s_j^a = {}^t s_j^a \\ S_j^c &= -{}^t s_j^c, \quad S_{j+1}^a = {}^t S_{j+1}^a \\ s_{j+1}^a &= {}^t s_{j+1}^a, \quad S_{j+1}^c = -{}^t s_{j+1}^c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

이하의 논의에서는 하첨자 "j"는 절점 j 또는 j 번째 일정단면 보의 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 "-"를 붙인 것은 절점 좌측의 물리량, 붙이지 않은 것은 절점의 우측의 물리량을 나타낸다.

절점 j 양측간의 힘의 평형은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_j d_j &= f_j - \bar{f}_j \\ \hat{P}_j &= \text{diag} [\hat{k}_j, \hat{K}_j] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

여기서 \hat{k}_j, \hat{K}_j 는 절점 j 에 있는 기초지지 전단 스프링상수 및 회전 스프링상수이다.

식(8), (9)로부터 힘벡터를 소거하면

$$\left. \begin{aligned} S_j^c d_{j-1} + \hat{S}_j d_j - s_{j+1}^c d_{j+1} &= 0 \\ \hat{S}_j &= {}^t \hat{S}_j = \hat{P}_j + S_j^a - s_{j+1}^a \\ &(j=0, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$S_0^{a,c} = {}^t s_{n+1}^{a,c} = 0$$

를 얻는다. 또한 식(10)을 $j=0 \sim n$ 에 관해서 정리하면, 다음식이 구해진다.

$$Qd = 0 \quad (11)$$

$$Q = {}^t Q = \begin{pmatrix} S_0 - s_1^c & 0 & \cdots & 0 \\ S_1^c & S_1 & -s_2^c & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & S_{n-1}^c & S_{n-1} & -s_n^c \\ 0 & \cdots & 0 & S_n^c & S_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$d = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

따라서 진동수방정식은 다음과 같이 된다.

$$\det Q = 0 \quad (13)$$

식(11)~(13)에 있어서 주목해야할 점은 각 일정 단면 보 내부의 상태량은 완전히 소거되어 절점만의 자유도로 축소된 것이다. 또 식(13)의 $\det Q$ 는 각진동수 ω 의 함수이므로, 이 식으로 직접 고유진동수를 구할 수 있다.

3.2 전달강성계수법의 적용

식(13)의 차원은 일정단면 보의 내부자유도를 소거하지않은 경우보다는 꽤 축소되어 있지만 식(12)에 나타난 Q 는 블록 삼중 대각행렬인 것에 주목해서 전달강성계수법의 제2단계로서 전달영향계수법적인 계산법을 도입하여, $\det Q$ 의 계산능률을 한층 더 향상시킨다.

강성계수의 전달법칙 및 진동수방정식

절점 j 의 좌측과 우측의 힘과 변위의 관계는 좌단으로부터 절점 j 까지의 부분구조물을 생각할 때 좌단의 경계조건을 이미 안다면 동적강성계수행렬 $\bar{S}_j, S_j(2 \times 2$ 대칭)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{f}_j = \bar{S}_j d_j, \quad f_j = S_j d_j \quad (14)$$

절점 $j-1$ 의 우측에 있어서의 동적강성계수행렬 S_{j-1} 로부터 절점 j 좌측의 동적강성계수행렬 \bar{S}_j 를 구하는 필드전달법칙은 식(14)의 제2식에서 하첨자 j 를 $j-1$ 로 변경한 식과 식(8)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_j &= S_j^a + S_j^c V_j, & V_j &= G_j^{-1} s_j^c \\ G_j &= {}^t G_j = S_{j-1} - s_j^a & (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

단 $j=1$ 의 경우에 대한 전달계산의 초기치 S_0 는

계의 좌단의 경계조건으로부터 구해진다.

$$S_0 = \hat{P}_0 \quad (16)$$

또한 절점 j 양측에 있어서의 동적강성계수 사이의 포인트전달칙은 식(9) 및 식(14)로부터 다음과 같이 된다.

$$S_j = \bar{S}_j + \hat{P}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

그리고 식(17)에 식(15)를 대입해서 \bar{S}_j 를 소거하면, S_{j-1} 로부터 S_j 를 직접 계산하는 필드-포인트전달칙이 다음식과 같이 구해진다.

$$S_j = \hat{P}_j + S_j^a + S_j^c V_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

상기의 전달 계산과정에서 구해진 G_j 및 S_n 을 이용하면, 식(13)의 $\det Q$ 는 다음 식과 같은 작은 차원의 행렬식의 곱으로 분해하는 것이 가능하다.

$$\det Q = \left(\prod_{j=1}^n \det G_j \right) \cdot \det S_n \quad (19)$$

고유모드의 계산

고유진동수를 구한 후, 절점 n 의 벡터는 d_n 종의 요소의 하나를 기준으로 다음식으로부터 구해진다.

$$S_n d_n = 0 \quad (20)$$

다음으로 식(9)에 식(8) 및 식(14)를 대입하고, \bar{f}_j 및 f_j 를 소거하면,

$$(S_j - \hat{P}_j) d_j = S_j^a d_j + S_j^c d_{j-1} \quad (21)$$

그리고 식(18)을 대입하고 S_j 를 소거하면 다음식을 얻는다.

$$d_{j-1} = V_j d_j, \quad (j=n, \dots, 1) \quad (22)$$

고유진동수에 대한 전달계산과정에서 구해진 V_j 를 기억해 두면, 식(22)보다 계의 우단으로부터 좌단에 걸쳐서 각 절점의 변위벡터 d_j 를 순차적으로 계산할 수 있다. 또 이 변위벡터 d_j 를 이용하면, 식(8)로부터 각 절점의 힘벡터 \bar{f}_j, f_j 가 구해진다. 또한 고유진동수의 계산과정에서 소거한 일정단면 보의 내부절점의 상태량 벡터도 j 번째 일정단면 보 내의 기본요소 양단간의 관계식(4)를 이용하면 각절점의 d_j 및 f_j 로부터 계산할 수 있

다. 그 계산법의 일례는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} d_j^0 &= d_{j-1}, f_j^0 = f_{j-1} \\ d_j^{n_j} &= d_j, f_j^{n_j} = f_j \\ d_j^k &= A d_j^{k-1} + B f_j^{k-1} \\ f_j^k &= S_j^a d_j^k + S_j^c f_j^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

($k=1, \dots, n_{j-1}$)

여기에서, n_j 는 j 번째 일정단면 보의 기본요소로서의 분할수, d_j^k, f_j^k ($k=0, \dots, n_j$)는 내부절점의 상태량벡터, A, B 는 식(2)에서 정의된 필드매트릭스내의 부분매트릭스, S_j^a, S_j^c 는 식(5)에서 정의된 자체 및 상대 동적강성계수행렬이다.

4. 수치계산 결과

본 장에서는 간단한 수치실험을 통하여 엄밀해, 전달행렬법 그리고 전달영향계수법의 결과와 전달강성계수법을 비교 검토한다. 본 계산에 사용된 컴퓨터는 Pentium-75 기종이고, 사용언어는 MS-FORTRAN 5.1 그리고 배열도 변수를 사용했다.

4.1 엄밀해와 비교

수치계산 모델을 Fig. 3과 같은 양단 고정 鋼製 원형 단면 보로 하고, 직경과 길이는 20mm, 960mm로 한다.

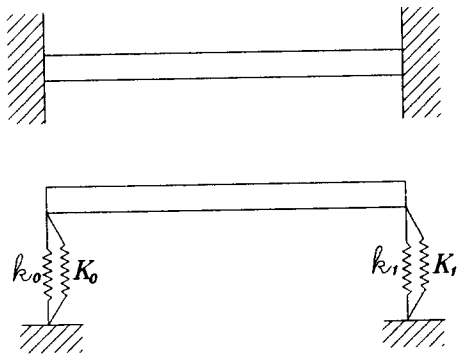


Fig. 3 Numerical Model I

경계조건을 스프링상수의 적절한 대입으로 처리할 수 있는 본 해석기법의 장점을 충분히 발휘하기 위하여 좌우단의 기초지지 전단 및 회전 스프

링상수 값에 수치상의 무한대에 해당하는 10^{20} 을 대입한다.

고유진동수 및 고유모드를 계산한 결과를 Table 1과 Fig. 4에 나타내었다.

Table 1 Natural Frequencies for model I [Hz]

Fixed - Fixed		
No.	Exact Solution	TSCM
1	98.90	98.90
2	272.62	272.62
3	534.45	534.45
4	883.48	883.48

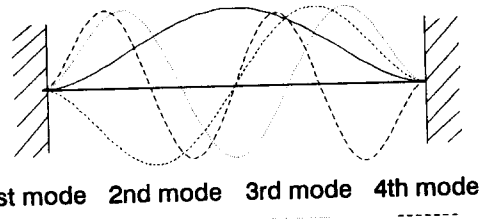


Fig. 4 Characteristic Modes for model I

4.2 전달행렬법 및 전달영향계수법과 비교

수치계산 모델 II는 직경 20mm, 길이 500mm, 분할수 2^5 인 강제 원형단면 직선보가 2개 직렬로 결합된 구조물이다. 절점 0, 1, 2의 기초지지 회전 스프링상수 (K)는 0 Nm/rad 이고, 기초지지 전단 스프링상수 (k)는 절점마다 각각 10^{12} N/m 이다.

계산정도

모델 II ($k = 10^{12} \text{ N/m}$)에 대하여 1~3,000Hz사이의 고유진동수를 Table 2에 나타내었다.

Table 2 Comparison of computation accuracy of natural frequency for model II [Hz]

No.	TSCM & TICM	TMM
1	160.8319	160.8319
2	251.2499	251.2499
3	643.3273	643.3273
4	814.2087	814.2088
5	1447.486	1447.477
6	1698.776	1698.788
7	2573.305	2573.066
8	2904.993	—

전달강성계수법(TSCM)은 이미 그 정확도가 널리 입증된 전달영향계수법(TICM)과 잘 일치하고 있으나, 전달행렬법(TMM)은 고차 진동수를 구할 때와 구조물에 硬탄성지지가 존재할 때 문제가 발생했다.

계산시간

모델 II에 대하여 분할수가 2^5 이고, 1~2,600Hz 사이의 고유진동수 7개를 모두 구하는데 걸린 시간을 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5에서 TICM은 부분구조합성법의 개념을 도입하지 않은 전달영향계수법을 뜻하고, TSCM1, TSCM2는 부분구조합성법의 개념을 도입한 전달강성계수법을 뜻하나, TSCM1은 부분구조 각각에 대해서 자체 및 상대 동적강성계수를 모두 계산한 방법이고, TSCM2는 반복되는 동일한 부분구조에 대해서는 앞에서 계산한 결과를 그대로 이용하여 계산량을 줄인 방법이다. 전달매트릭스법도 계산시간을 줄이기 위하여 부분구조합성법의 개념을 도입하였고, TMM1, TMM2의 표기도 TSCM1, 2와 같다.

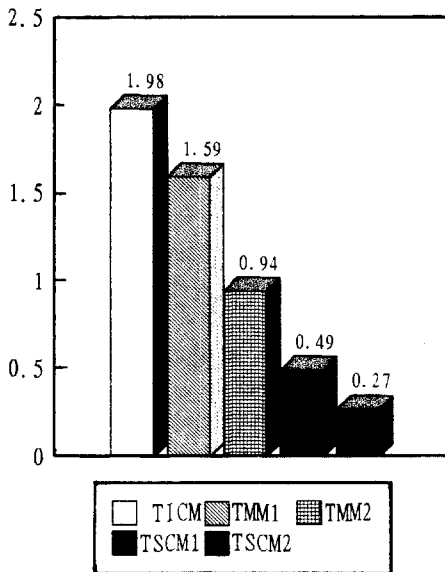


Fig. 5 Computation time [sec]

계산시간은 전달강성계수법이 과거의 전달영향계수법보다 훨씬 빠르다는 것을 확인했고, 분할수가 커질수록, 부분부재의 수가 많을수록 그 차이는 더욱 커질 것이다.

5. 결 론

개인용 컴퓨터에 적합한 진동해석기법인 전달영향계수법에 부분구조합성법의 개념을 도입하여 만든 새로운 진동해석기법인 전달강성계수법을 제안했다. 간단한 수치계산 모델에 대하여 수치실험을 행한 후, 본 해석기법이 전달영향계수법보다 계산 속도면에서 훨씬 뛰어나면서도 전달영향계수법의 우수한 계산정도를 계속 유지하고 있음을 확인했다.

참 고 문 헌

- (1) A.Sueoka, T.Kondou, D.H.Moon, and K.Yamashita, 1988, "A method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer - A Suggested Transfer Influence Coefficient Method", The Memoirs fo the Faculty of Engineering Kyushu University, 48 (1), 31~46.
- (2) 近藤, 末岡, 文, 綾部, 1990, "變形傳達影響係數法による可變パラメータ系の自由振動解析(變断面ばりに對する定式化)", 日本機械學會論文集, 56卷, 522号(C編), pp.284~291.
- (3) 近藤, 末岡, 安田, 文, 1991, "傳達影響係數法による樹狀構造物の自由振動解析(第1報, 二次元樹狀構造物に對する定式化)", 日本機械學會論文集, 57卷, 536号(C編), pp.1091~1098.
- (4) 文, 末岡, 近藤, 呂, 1991, "傳達影響係數法에 의한 원판구조물의 自由振動解析", 대한기계학회 논문집, 15(5), 1439~1446
- (5) 문, 여, 1993, "傳達影響係數法에 의한 사각형 평판구조물의 自由振動解析", 대한기계학회 논문집, 17(3), 559~567
- (6) 문, 여, 1994, "傳達影響係數法에 의한 彈性支持를 갖는 원통형 쉘구조물의 自由振動解析", 한국소음진동공학회지, 4(4), 469~478
- (7) 長松, 大熊, 1991, "부분구조합성법", 培風館
- (8) E.C.Pestel and F.A.Leckie, 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-hill