한국소음진동공학회 1996년도 춘계학술대회논문집 pp. 298-305.

비선형 최적화 기법을 이용한 압전 세라믹의 복소 재료 정수 규명

o조 치 영*, 서 희 선*, 김 대 환*

An Identification Method for Complex-Valued Material Properties of Piezoelectric Ceramics Using Nonlinear Optimization Technique

Chee-Young Joh*, Hee-Seon Seo*, Dae-Hwan Kim*

Abstract

The common practice for the identification of piezoelectric properties is based on the use of immittance behavior of a resonator with a certain geometry and poling direction. In this paper, a new method is suggested to identify the complex-valued piezoelectric material constants. This method is based on the minimization of differences between the analytical immittance and the experimental measurement of resonator. Non-linear minimization problems are formulated to find out the unknown properties relevant to the resonators. The immittance data used for identification are measured at a number of frequencies which cover the vicinity of resonance frequency and the low frequency region. To illustrate the proposed technique, the complex-valued coefficients are identified for a typical PZT4 ceramic composition.

1. 서론

압전 세라믹은 오늘날 초음파 세척기, 음파 탐지기 등 트랜스듀서 응용 분야에 뿐만 아니라, 시간 지연기, 여러 가지 필터 등에도 광범위하게 사용되고 있다. 그런데 이러한 각종 압전 세라믹 응용 부품들을 설계하는데 있어서 정확한 동특성의해석이 필수적인데 이를 위하여 부품에 사용된 압전 세라믹 진동체의 수학적 모델을 잘 확립하여야 한다. 그러나 재료 정수의 정확한 값을 몰라서 실제 측정된 동특성과 이론적으로 예측한 동특성 사이에 차이가 발생한다. 따라서 정확한 재료 정수를 규명하는 것이 무엇보다 중요하다. 압전 재료 정수 규명의 일반적인 방법은 어떤 형상과 분극 방향을 가진 진동체의 동특성을 이용하는 것이다. 진동체의 이미턴스(Immittance)의 크기만을 측정하여 재료 정수를 추출하는 Resonance-antiresonance method 라 불리는 두개

* 국방과학연구소 수중음향센서 연구실

의 IRE Standards[1],[2]가 발표되었다. 이 방법은 복잡한 장비 없이 재료 정수를 빠르게 찾을 수 있는 널리 알려진 방법이다. 그러나 이미턴스의 위상에 대한 정보를 이용하지 못하므로 압전 재료의 손실 영향을 추출하지 못한다. 측정한 이미턴스의 실수와 허수를 모두 이용하여 재료 정수를 복소수로 추출하는 Gain-bandwidth method가 Holland와 EerNisse[3],[4]에 의해서 제안되었다. 또 하나는 이미턴스 정식을 선형 방정식으로 변형하고 반복적인 계산을 통하여 압전 재료 정수를 추출하는 Iteration method가 Smits[5]에 의해 제안되었다. 그러나 이 두 가지 방법은 Half-power Bandwidth와 공진 주파수 부근의 두개의 주파수를 신중히 선택하여야 한다. 다시 말해 위의 방법의 정확도는 선택한 두개의 주파수에서 측정된 이미턴스 값의 오차 정도에 달려 있다.

본 논문에서는 압전 재질의 재료 정수를 추출하는 방법을 제시하고자 한다. 여기서 제시하는 방법은 해석적인 해와 실험으로 측정된 값과의 오차가 최소화 되도록 하는 비선형 최적화 기법을 사용하여 손실이 고려된 복소 압전 재료 정수를 규명하였다.

2. 재료 정수 규명

IRE Standards 표기법에 따라 일반적인 압전 세라믹 진동체의 응력 T와 전기장 E를 독립 변수로 하는 압전 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s^{E}_{ijkl} T_{kl} + d_{mij} E_m \\ D_n &= d_{nkl} T_{kl} + \varepsilon^{T}_{mn} E_m \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 변형률 S와 전기장 E, 전기 변위 D는 변위 $u(x_1,x_2,x_3)$와 전기 포텐셜 ϕ로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ E_i &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad \sum \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

그리고 Newton의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \tag{3}$$

일반적으로 압전 세라믹의 물성치를 규명하기 위해서 실험적으로 측정된 이미턴스 (임피던스 또는 어더미턴스) 값과 이론적으로 유도된 이미턴스 식으로 부터 각종 재료 정수를 추정한다. 그런데 임의 형태의 압전 세라믹 진동체에 대하여 이론적인 이미턴스를 식(1), (2), (3)으로부터 간단한 식으로 직접 유도하기가 용이하지 않다. 따라서 이론적 해석이 가능한 여러 가지 단순한 형태의 진동체로 제작하여 특정한 방향으로 분극화하여 이미턴스를 실험적으로 측정하고 1차원 파동 방정식으로 부터 이미턴스 식을 유도하여 이로부터 이에 관련된 몇 개의 재료 정수를 규명하게 된다. 따라서 압전 세라믹에 관련된 모든 재료 정수를 규명하려면 4~5가지의 진동체가 필요하게 된다.[5] 본 연구에서는 그 중 그림(1) 에서와 같이 길이에 비해 두께와 폭이 아주 작은 길이

방향으로 거동하는 압전 세라믹 진동체를 이용하여 이에 관련된 복소 재료 정수 규명법을 제안, 설명하기로 한다. 먼저 그림(1)에 정의된 표기를 참고로 전기적 어드미턴스를 구하자. 그런데 길이에 비해 두께 및 폭이 무시할 수 있을 만큼 작고 전기적 손 실을 무시하면 다음과 같은 가정이 성립한다.[6]

$$\begin{aligned} &T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0 \\ &E_1 = E_2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

따라서 식(1)로 부터 압전 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 &= d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{aligned} \tag{5}$$

또한 길이 방향(x_1 방향) 의 변위 $\xi_1(x,t)$에 대한 식(3)의 운동 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \tag{6}$$

그런데 식(5), (6)에서 $S_1 = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}$ 과 $\dfrac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$ 임을 고려하면 운동 방정식은 아래와 같다.

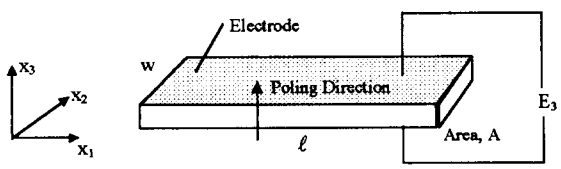

Fig 1. Length-expander bar with electric field perpendicular to length

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho s_{11}^E} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \left(v_b^E\right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2}$$

$$\left(v_b^E = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}} \right) \tag{7}$$

조화 가진 $E_3 = E_0 e^{j\omega t}$를 가정하면 정상상태의 해는 다음과 같다.

$$\xi_1 = \left[A \sin \frac{\omega x}{v_b^E} + B \cos \frac{\omega x}{v_b^E} \right] e^{j\omega t} \tag{8}$$

여기서 양 자유단에 대한 경계 조건 $\left.\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \left.\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=\ell} = 0$ 을 식(8)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\xi_1 = \frac{v_b^E}{\omega} \left\{ \sin \frac{\omega x_1}{v_b^E} + \frac{\left[\cos\left(\omega \ell / v_b^E\right) - 1\right]}{\sin\left(\omega \ell / v_b^E\right)} \cos \frac{\omega x_1}{v_b^E} \right\} d_{31} E_0 e^{j\omega t} \tag{9}$$

또한 식(5), (9)로 부터 전기적 변위 D_3는 아래와 같다.

$$D_3 = \left\{ \varepsilon_{33}^T \left(1 - k_{31}^2\right) + \varepsilon_{33}^T k_{31}^2 \left[\cos \frac{\omega x_1}{v_b^E} - \frac{\cos\left(\omega \ell / v_b^E\right) - 1}{\sin\left(\omega \ell / v_b^E\right)} \sin \frac{\omega x_1}{v_b^E} \right] \right\} E_0 e^{j\omega t} \tag{10}$$

결국 전기적 어드미턴스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= w \int_0^\ell \dot{D}_3 dx_1 \Big/ \int_0^t E_3 dx_3 \\ &= j\omega \frac{\ell w}{t} \varepsilon_{33}^T \left\{ \left(1 - k_{31}^2\right) + k_{31}^2 \frac{\tan\left(\omega \ell / 2 v_b^E\right)}{\omega \ell / 2 v_b^E} \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 $k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}$ 이다. 위의 수식으로부터 공진 주파수는

$$\tan\left(\frac{\omega \ell}{2 v_b^E}\right) = \infty \text{ , 즉 } f_r = \frac{1}{2\ell\sqrt{\rho s_{11}^E}} \qquad (12)$$

반공진 주파수 f_a 는 $Y(j\omega) = 0$ 에서 다음의 관계식을 갖는다.

$$\frac{\tan\left[(\pi/2)(f_a/f_r)\right]}{(\pi/2)(f_a/f_r)} = \frac{k_{31}^2 - 1}{k_{31}^2} \qquad (13)$$

그런데 식(11)에서 어드미턴스는 정적인 성분과 동적인 성분의 합으로 나누어 진다. 즉,

$$Y(j\omega) = Y_{low}(j\omega) + Y_{mot}(j\omega) \qquad (14)$$

공진 주파수에서 훨씬 떨어진 주파수에서는 Y_{mot}이 Y_{low}에 비해 작고 공진 주파수 근처의 주파수에서는 Y_{mot}이 Y_{low}에 비해 훨씬 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 저주파 영역에서의 어드미턴스 값은 주로 유전률(ε_{33}^T)에 의해 지배되고 공진 주파수 영역에서는 어드미턴스 값은 탄성 계수(s_{11}^E) 및 결합 계수(k_{31})에 의해 지배됨을 알 수 있다. 따라서 재료 정수의 규명에 사용될 실험적 어드미턴스 값은 공진 주파수 근처의 값 뿐만 아니라 저주파 부근의 어드미턴스 값을 측정하여 동시에 고려 되어야 한다. 전단 방향 거동을 하는 막대 모양의 압전 진동체에 대해서 식(11)에서 보면 모두 3개의 재료 정수, 즉, s_{11}^E, d_{31}, ε_{33}^T가 관련되어 있음을 알 수 있다. 재료의 손실 효과를 고려하면 모든 재료 상수와 어드미턴스 값은 다음과 같이 복소수 값으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= s_{11}'^E + j s_{11}''^E \\ d_{31} &= d_{31}' + j d_{31}'' \\ \varepsilon_{33}^T &= \varepsilon_{33}'^T + j \varepsilon_{33}''^T \\ k_{31} &= k_{31}' + j k_{31}'' \\ Y(j\omega) &= Y'(j\omega) + jY''(j\omega) \end{aligned} \qquad (15)$$

여기서 저주파 영역과 공진 주파수 근처에서 각각 n_{low}, n_{res}개의 가진 주파수에서 복소 어드미턴스 $\hat{Y}(j\omega)$를 측정 했다고 하자. 그러면 각 주파수에서의 어드미턴스의 차이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta Y(j\omega_i) &= \hat{Y}(j\omega_i) - Y(j\omega_i) \\ &= \Delta Y'(j\omega_i) + j\Delta Y''(j\omega_i) \\ &; i = 1,2,\cdots,N(=n_{low} + n_{res}) \end{aligned} \qquad (16)$$

여기서 $\hat{Y}(j\omega_i)$와 $Y(j\omega_i)$는 각 가진 주파수에 대한 측정 및 이론 어드미턴스이다. 그런데 $Y(j\omega_i)$는 미지의 재료 정수에 대해 비선형이므로 식(16)은 각 주파수에 대해 N개의 비선형 방정식이다. 따라서 N개의 주파수에서의 어드미턴스 오차 $\Delta Y(j\omega_i)$의 합을 최소화 하는 재료 정수를 구해야 한다. 그런데 오차가 복소수 값, 즉 실수부와 허수부로 구성되기 때문에 오차 크기의 합을 목적 함수로 하는 다음과 같은 비선형 최소화 문제(Non-linear Minimization Problem)를 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} &Minimize \;\; E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \left|\Delta Y(j\omega_i, \mathbf{x})\right| \\ &= w_{low} \sum_{i=1}^{n_{low}} \left|\Delta Y(j\omega_i, \mathbf{x})\right| + w_{res} \sum_{i=1}^{n_{res}} \left|\Delta Y(j\omega_i, \mathbf{x})\right| \end{aligned} \qquad (17)$$

여기서 w_{low}와 w_{res}는 각각의 두 영역에서 오차의 정도를 보상 해 주는 가중치(weighting factor)로서 각 영역의 오차의 크기가 같은 정도 (order)가 되도록 설정하면 된다. 또 벡터 **x**는 규명하고자 하는 재료 상수의 실수와 허수 성분으로 구성되어 있다. 즉,

$$\mathbf{x}^t = \left\{ s_{11}'^E,\ s_{11}''^E,\ \varepsilon_{33}'^T,\ \varepsilon_{33}''^T,\ d_{31}',\ d_{31}'' \right\} \qquad (18)$$

본 연구에서는 식(17)의 비선형 최적화 문제를 비교적 적용이 쉬운 *Hooke-Jeeves Direct Search Algorithm*[7]을 적용하였다.

여기서 일반적인 최적화 기법에서 요구되는 미지 변수의 초기치는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 실험으로 부터 측정된 어드미턴스에서 공진 주파수 $\tilde{f}_r$과 반공진 주파수 $\tilde{f}_a$를 구하면 식(13)으로 부터 결합 계수의 실수 성분 $\tilde{k}_{31}'$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\tilde{k}_{31}'^2 - 1}{\tilde{k}_{31}'^2} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\tilde{f}_a}{\tilde{f}_r}\right)}{\frac{\pi}{2}\frac{\tilde{f}_a}{\tilde{f}_r}} \qquad (19)$$

그리고 식(12)로 부터 역시 측정된 공진 주파수 $\tilde{f}_r$을 이용하면 탄성 계수의 실수부 $\tilde{s}_{11}'^E$을 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\tilde{s}_{11}'^E = \frac{1}{4\ell^2 \rho \tilde{f}_r^2} \qquad (20)$$

그리고 저주파 영역에서 어드미턴스 특성이 유전율 ε_{33}^T에 의해 지배적으로 영향을 받으므로 저주파 영역에서 특정 주파수 ω_0에서의 측정 어드미턴스의 허수부 $\hat{Y}''(j\omega_0)$를 이용하면 식(11)으로 부터 유전율의 실수부 $\tilde{\varepsilon}_{33}'^T$를 다음과 같이 예측할 수 있다.

$$\tilde{\varepsilon}_{33}'^T = \frac{\hat{Y}''(j\omega_0)t}{\omega_0\left(1-\tilde{k}_{31}'^2\right)\ell w} \qquad (21)$$

마지막으로 전기-기계 결합 계수의 실수부 $\tilde{d}_{31}'$은 식(11)의 정의식에서 식 (19), (20), (21)로 부터 구한 값들을 이용하여 다음과 같이 예측할 수 있다.

$$\tilde{d}_{31}' = -\sqrt{\tilde{s}_{11}'^E \tilde{\varepsilon}_{33}'^T \tilde{k}_{31}'^2} \qquad (22)$$

그리고 미지수 $s_{11}^E, d_{31}, \varepsilon_{33}^T$의 허수부의 초기치는 직접 계산식으로 추정하기가 곤란하므로 실수부의 수% 정도의 값으로 사용하면 적당할 것이다.

3. 재료 정수 규명 실험 결과

그림(2)는 예제로 선택한 전단 방향 거동을 하는 막대 모양 압전진동체의 모양및 크기를 나타낸다. 시편 세라믹의 종류 는 PZT4 로서

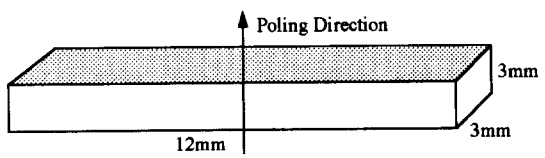

Fig 2. Dimension of Length-expander bar

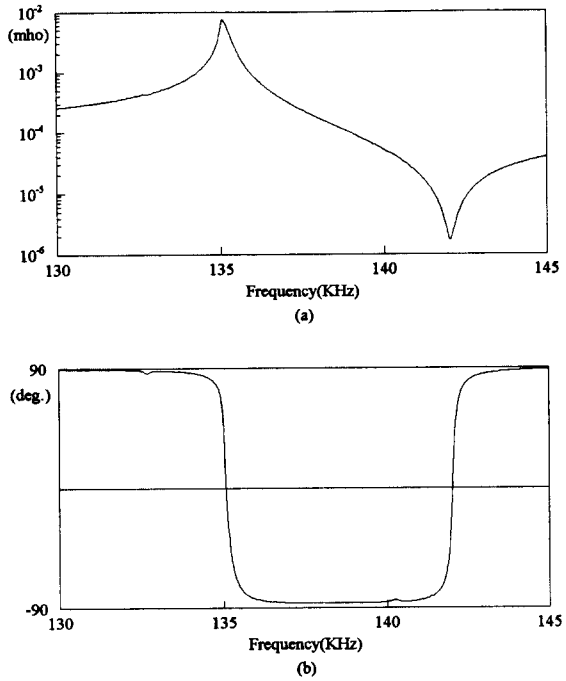

Fig.3 Magnitude/phase plots of measured admittance ; (a) magnitude; (b) phase plots.

밀도는 7500 kg/m^3 이다. 실험적 어드미턴스는 임피던스 분석기(HP4194A)를 이용하여 측정하였다. 그림(3)은 측정된 시편의 어드미턴스의 크기 및 위상을 그린 것으로 공진 주파수 $\tilde{f}_r$ 는 135.2 KHz 이고 반공진 주파수 $\tilde{f}_a$ 는 141.6 KHz 임을 알 수 있다. 재료 정수 규명을 위한 가진 주파수는 200~2000 Hz, 공진 주파수 영역에서 133~137 KHz 범위에서 각각 401 개의 주파수로 가진하여 총 802 개의 어드미턴스 데이타를 측정하여 규명에 사용하였다. 그리고 유전율 초기치를 추정하기 위한 특정 저주파수 ω_0 는 1KHz 로 선택하였다. 표 1 은 재료 정수의 초기치 및 규명된 값을 나타내고 있다. 여기서 재료 정수 초기치의 허수부는 모두 실수부의 1%로 추정하였다. 표 1 에서 보면 탄성계수 s_{11}^E 의 실수부는 공진주파수의 정확한 측정에 의해 충분히 식(20)에의 해 규명이 가능함을 보이고 있으며, 유전률 ε_{33}^T 의 실 수부도 초기치의 추정값이 규명값과는 큰 차이를 보이지 않음을 알 수있다. 그러나 전기-기계 결합계수인 d_{31} 은 압전 진동체의 효율에 결정적인 영향을 미치는 중요한 재료 정수인데 초기 추정치와 규명한 값과는 큰 차이를 보이고 있다. 또한 각 재료 정수들의 tanδ 는 0.3%이내

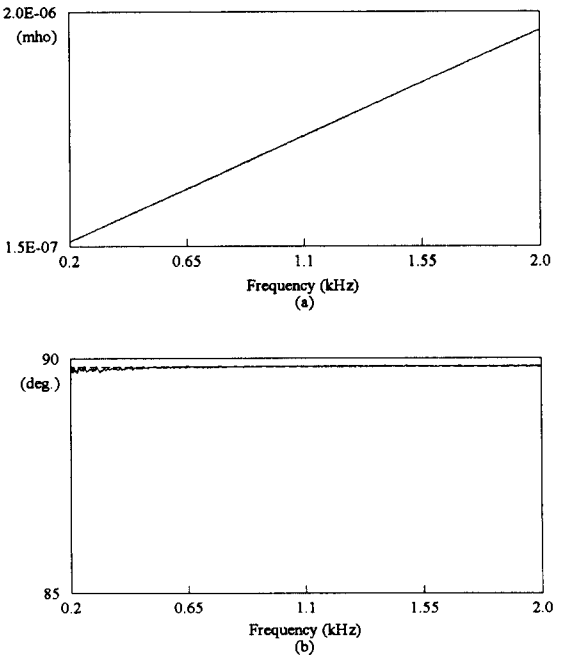

Fig.4 Magnitude/phase plots of admittance of bar-shear mode resonator in the low frequency region; (a) magnitude; (b) phase plots.

——— experimental $\hat{Y}(j\omega)$

- - - - analytical $Y(j\omega)$ from identified parameters.

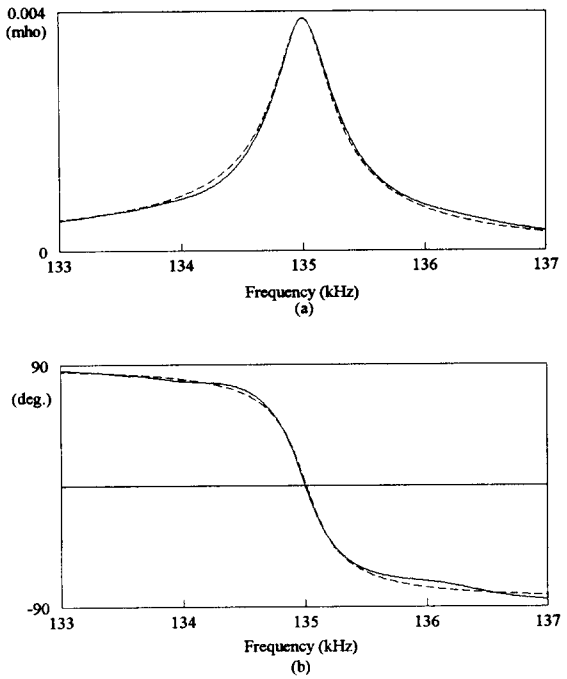

Fig.5 Magnitude/phase plots of admittance of bar-shear mode resonator in the resonance frequency region; (a) magnitude; (b) phase plots.

——— experimental $\hat{Y}(j\omega)$

····· analytical $Y(j\omega)$ from identified parameters.

로서 압전 재료는 손실이 매우 작은 재료임을 알 수 있다. 그리고 그림(4)와 그림(5)는 규명된 압전 재료 정수를 이용하여식(11)로 부터 구한 이론 어드미턴스와 실험으로 부터 측정된 어드미턴스를 비교한 그림이다. 저주파 영역 및 공진 주파수 영역에서의 어드미턴스 크기와 위상 모두 아주 잘 일치 함을 알 수 있다. 결론적으로 규명된 재료 정수의 값들은 압전 세라믹 진동체의 동적 거동 해석을 위한 데이타로 충분히 사용 가능함을 보이고 있다.

4. 결론

본 연구에서는 일반적인 압전 세라믹의 재료 정수를 손실 영향을 고려한 복소값으로 정의하고 이를 규명하는 방법을 제시하였다. 압전 세라믹을 이론 해석이 가능한 단순 형태의 진동체로 제작 후 특정 방향으로 분극 처리하여 실험으로 측정된 이미턴스값과 이론적으로

Table 1. Initial and identified values of material constants

재 료 정 수	초 기 치	규 명 값	* tan δ
탄성계수 s_{11}^E (m^2/N)	$(0.127\text{-}j0.00127)\times10^{-10}$	$(0.127\text{-}j0.000410)\times10^{-10}$	0.0032
결합계수 d_{31}(C/N)	$-(0.141\text{-}j0.00141)\times10^{-9}$	$-(0.319\text{-}j0.000389)\times10^{-9}$	0.0012
유전율 ε_{33}^T	$(0.140\text{-}j0.00140)\times10^{-7}$	$(0.123\text{-}j0.000381)\times10^{-7}$	0.0030

*tanδ 는 각 재료 정수의 손실 효과를 정의하는 양으로 다음과 같이 정의 된다.

$$\tan\delta = \frac{\text{재료 정수의 허수값}}{\text{재료 정수의 실수값}}$$

유도되는 이미턴스값의 오차를 최소화 시키는 비선형 최적 설계 기법을 이용하여 재료 정수를 규명하였다. 재료 정수 규명에 사용된 이미턴스 턴스값과 이론적으로 유도되는 이미턴스값과의 오차를 최소화 시키는 비선형 최적값은 공진 주파수 부근의 값 뿐만 아니라 저주파 영역의 값들을 동시에 활용하였다. 또한 제안된 기법을 검증하기 위해 전단 방향으로 거동하는 막대 모양의 PZT4 압전 세라믹 진동체에 대해 이에 관련된 재료 정수를 규명해 보았다. 실험 결과 제안된 규명법은 압전 재료의 정확한 재료 정수 규명에 충분히 활용 가능하다고 판단된다. 그리고 본 연구에서 제안된 기법을 활용하면 여러 가지 다른 모양의 진동체로 부터 이에 관련된 각종 재료 정수들을 규명할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. "IRE Standards on Piezoelectric Crystals-The Piezoelectric Vibratos: Definitions and Methods of Measurements, 1957," Proc. IRE, 45, pp. 353-358, 1957.

2. "IRE Standards on Piezoelectric Crystals : Measurements of Piezoelectric Ceramics, 1961," Proc. IRE,49, pp. 1161-1169, 1961.

3. Holland,R. and EerNisse,E.P., "Accurate Measurement of Coefficients in a Ferroelectric Ceramic," IEEE Trans. on Sonic and Ultrasonic, SU-16, pp. 173-181, 1969.

4. Holland,R., "Representation of Dielectric, Elastic, and Piezoelectric Losses by Complex Coefficients," IEEE Trans. on Sonic and Ultrasonic, SU-14, pp. 18-20, 1967.

5. Smits,J.G., "Iterative Method for Accurate Determination of the Real and Imaginary Parts of the Materials Coefficients of piezoelectric Ceramics," Trans. on Sonic and Ultrasonic, SU-23, pp. 393-402, 1976.

6. Mason, W.P.. *Physical Acoustics. Principles and Methods*. Volume.1 (Academic Press, 1964), Chap.3.

7. Kuester and J.H. Mize, Optimization Techniques with FORTRAN. (McGraw-Hill, New York, 1973), pp. 309-319