

다단 치차계의 비틀림 진동 모드해석에 관한 연구

이 동 환* · 이 형 우** · 박 노 길***

A Study on the Mode Analysis of Torsional Vibration in the Multi-Branched Geared System

Dong-Hwan Lee, Hyoung-Woo Lee and No-Gill Park

ABSTRACT

For analyzing the torsional vibration of a complicated multi-branched geared system, we constructed the transfer matrix using the modified Hiber Branch Method and performed the modal analysis using the λ -matrix method. We compared the developed transfer matrix method with the Lagrangian method and noticed that the result of two methods are in agree with each other.

1. 서 론

개스터버린, 차량, 선박, 헬리콥터 등에 사용되는 트랜스미션은 매우 복잡한 다단치차계로 구성되어 있는데 기계의 고속화, 정밀화, 대형화, 경량화 추세에 따라 소음, 진동의 문제가 점차 증대되고 있다. 따라서 복잡한 다단 치차계에 대한 체계적인 진동해석 기술 개발의 필요성이 더욱 커지고 있다.

회전 기계의 진동 해석 기법으로는 전달 행렬법과 유한요소법 또는 이 방법들을 개선하는 연구가 진행되고 있다. 전달 행렬법은 Prohl, M.A⁽¹⁾에 의해서 처음 제안되었으며, Lund, J.W⁽²⁾, Bansal, Kirk⁽³⁾는 유막 베어링에 지지되는 유연 축계의 감쇠 고유진동수와 시스템의 안정성을 평가하는데 전달 행렬법을 적용하였다. 이러한 반복적 방법은 자유도가 많아지면 계산오차가 크고, 모드해석시 일부의 고유 진동수를 빠뜨릴 염려가 있다.

D.Kim, J.W. David⁽⁴⁾는 유연 로터-베어링 시스템의 위험속도를 계산하기 위하여 멱급수로 전개된 특성방정식의 각 항의 계수를 직접 유도하였고, 다시 특성방정식을 고유치 문제로 바꾸어서 모드해석을 했다. 이 방법 역시 자유도가 많은 복잡한 다단 치차계에 대한 특성방정식의 멱급수 계수를 구하기 힘들고 계산오차도 많다. M.J. Goodoin⁽⁵⁾, J.-S.Rao⁽⁶⁾가 사용한 Branch Point법은 각 Branch마다 전달행렬을 유도하여 경계조건에 의하여 특성식을 구한다. 이 방법은 branch point가 많은 경우 시간이 많이 소요되며, 치차의 비선형해석에 적용하기가 용이하지않다. Mitchel, L.D⁽⁷⁾의 수정된 Hibner Branch방법 및 N.G.Park⁽⁸⁾이 사용한 Blank Matrix법은 축과 요소에 따른 수직분할로 단(step)의 수에 상관없이 각 field에 대해서 순차적으로 요소행렬을 곱하여 시스템 행렬을 형성 할 수 있어 유도과정이 용이하다.

전달행렬법이 유한요소법에 비하여 시스템의 자유도가 줄어든다는 점 때문에 치차계 해석에 많이 사용되고 있으나 branch point가 많은 경우, 자유진동해석을 위한 유도과정상에서 어려움이 있기 때문에 현재 8단이상의 다단 기어시스템에 전달행렬법을 이용한 진동 모드해석을 시행한 예가 드물다.

* 한국 기계연구원 구조시스템 연구부 (0)

** 부산대학교 대학원 생산기계공학과

*** 부산대학교 생산기계공학과, 기계기술연구소

본 연구에서는 복잡한 다단 치차계의 비틀림 진동을 해석하기 위하여 수정된 Hibner Branch방법을 적용하여 branch point와 무관하게 체계적으로 전달행렬법을 적용할 수 있도록 하였고, λ -matrix법⁽⁹⁾을 이용하여 모드해석을 했다. 비틀림 고유진동 해석결과는 라그랑지안 식에 의한 결과로 확인하였다.

2. 전달행렬법을 이용한 모드 해석기법

2.1 수정된 Hibner Branch방법을 이용한 전달행렬법

기존의 다단 치차계 해석을 위해 사용되고 있는 J.S.Rao Branch Point⁽⁶⁾ 법은 각 branch마다 전달행렬을 유도하여 경계조건에 의하여 특성식을 구한다. Branch Point가 많은 경우, 자유진동해석을 위한 유도과정상에서 어려움이 많다.

본 연구에서 사용한 Hibner Branch방법은 축과 요소에 따른 수직 분할로 단(step)의 수에 상관없이 각 field에 대하여 요소행렬을 만들 수 있으며, Fig. 1.에서 보는 것처럼 요소가 없을때는 Blank로 간주하여 단위행렬로 놓는다. 구성된 각 Field의 요소를 순차적으로 곱하여 시스템 전달행렬을 구성한다. 수정된 Hibner Branch 전달행렬법은 Blank Matrix를 이용함으로써 복잡한 다단 치차계에 쉽게 적용 할 수 있고 유도과정이 용이하다.

본 연구에서 비틀림 진동해석을 위해 적용한 8 단 기어의 경우를 살펴보면 상태변수가 토오크와 각변위 2개이고, 시스템의 자유도는 단수의 2배가 되어 비틀림 고유진동 해석을 위한 자유도는 16이다.

2.2. 간단한 기어시스템의 전달행렬 적용예

Fig 1.과 같은 간단한 기어시스템의 비틀림진동의 고유진동특성을 전달행렬법을 적용하여 정식화하는 방법을 소개한다.

LINE 1과 LINE 2의 상태벡터를 정의하면 다음과 같다.

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ T_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

station ①, ② 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} T_{D_1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_1 \quad (2)$$

여기서, T_{D_1} 은 Line 1의 디스크 1에 대한 국부 전

달행렬이고, I는 Blank를 의미한다.

station ②, ③ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} T_{S_1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_2 \quad (3)$$

여기서, T_{S_1} 은 Line 1의 회전축 1에 대한 국부 전달행렬이다.

station ③, ④ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} T_{G11} & T_{G12} \\ T_{G21} & T_{G22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_3 \quad (4)$$

여기서, T_{G11} , T_{G12} , T_{G21} , T_{G22} 는 각각 기어연쇄 1의 국부 전달행렬이다.

Station ④, ⑤ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_4 \quad (5)$$

여기서, T_{S_2} 는 Line 2의 회전축 2에 대한 국부 전달행렬이다.

Station ⑤, ⑥ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_6 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{D_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_5 \quad (6)$$

여기서, T_{D_2} 는 Line 2의 디스크 2에 대한 국부 전달행렬이다.

따라서, 식 (1) ~ (6)에 의해 마지막 Station과 첫 Station과의 관계가 결정되며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ T_1 \\ \phi_2 \\ T_2 \end{pmatrix}_6 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ T_1 \\ \phi_2 \\ T_2 \end{pmatrix}_1 \quad (7)$$

식 (7)에 경계조건을 적용하면 Station① 에서 외부 토오크는 없으므로 T_1^0 , T_2^0 은 영이된다. 마찬가지로 Station⑥에서도 외부 토오크는 없으므로 T_1^6 , T_2^6 은 영이된다. 이 값을 식 (7)에 적용하면 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$T_{21} \phi_1^0 + T_{23} \phi_2^0 = 0 \quad (8)$$

$$T_{41} \phi_1^0 + T_{43} \phi_2^0 = 0$$

각각의 국부 전달 행렬로부터 T_{21} , T_{23} , T_{41} , T_{43} 은 구해지고, 식(8)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$[T] \underline{u} = 0 \quad (9)$$

여기서,
[T]

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + c_{11} & c_{12} \\ a_{21} \lambda^2 + b_{21} \lambda + c_{21} & a_{22} \lambda^2 + b_{22} \lambda + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

이다.

식 (9)는 고유치 문제이며 이것을 풀기위해 λ -matrix 개념을 적용한다. 식 (9)를 자유도가 P인 λ -matrix로 표시하면

$$D_P(\lambda_i) \underline{r}_i = 0 \quad (10)$$

$$D_P(\lambda_i) = E_P \lambda^P + E_{P-1} \lambda^{P-1} + \dots + E_1 \lambda + E_0 \quad (11)$$

되고 여기서, λ_i 는 latent roots, r_i 는 $D_P(\lambda)$ 의 right latent vector이다.

식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(A\lambda - B) \underline{X} = 0 \quad (12)$$

여기서,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_P \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_P & E_{P-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{P-1} & E_{P-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & E_P & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & E_P & E_{P-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_P & E_{P-1} & E_{P-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_P & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_P & E_{P-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{P-1} & E_{P-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & 0 \\ 0 & E_P & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_2 & 0 \\ E_P & E_{P-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{r}^{(P-1)} \\ \underline{r}^{(P-2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{r}^1 \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

이다.

식 (9)에서 λ -matrix를 구성하면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & E_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서,

$$E_0 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이다.

식 (12), (13)을 QR 알고리즘을 이용하여 고유진동수와 상태벡터를 구한다.

3. 다단치차계의 비틀림진동 해석결과 및 고찰

본 연구에서 다단치차계의 비틀림 진동해석의 효율성을 검증하기 위하여 Fig 2.와 같은 8단 치차계에 적용하고자한다.

8단 치차계는 개스터빈, 발전기 및 감속기어 시스템으로 구성되어 있으며, 16개의 축요소와 11개의 디스크요소, 13개의 기어요소를 가진다. Fig 2.에서 보는것처럼 D는 디스크를 의미하고, G는 기어, S는 축, L은 line, P는 기어쌍을 의미한다. 8단 치차계의 구동기어와 중동기어의 제원은 Table 1, 축의 제원은 Table 2, 디스크의 관성모우먼트 값은 Table 3에서 보여준다. Fig 3.은 Triple Pair를 한 눈에 볼수 있도록 나타내었다. G4는 G8, G10, G12와 물려있고, G6은 G9, G11, G13과 물려있다. Table 4는 Triple Pair의 구동기어, 중동기어에 대해 나타내고 있다.

Fig 4.는 다단치차계의 비틀림 진동해석을 위한 전산 유통도를 나타내고 있다. 이 유통도는 line의 수, 각 line의 요소(element)수, 각 line의 요소형태, 요소의 좌표값, 축, 기어, 디스크의 주요 파라미터를 입력하면, Station, Field의 수와 좌표를 결정하여 수정된 Hibner Branch 방법에 의하여 전달행렬을 구성하고 λ -matrix법에 의하여 모드해석을 하도록 되어있다.

Fig 5.는 시스템의 비틀림 고유진동수에 대한 Campbel diagram을 보여주고 있다. Fig 6은 시스템 비틀림 1차 고유 진동모드를 보여주고 있다.

이상과 같이 개발된 전달행렬법의 프로그램 검증을 위해서, 치차는 디스크로 미끄럼없이 구동된다고 가정하여 라그랑지안 식으로 해를 구하였고 본 전달행렬법의 결과와 비교하였다. 그결과는 표 4와 같고, 양자의 방법이 잘 일치함을 알 수 있다.

4. 결론

복잡한 다단 치차계의 진동모드 해석을 위한 효율적인 알고리즘을 개발하여 8단 치차계에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) Hibner Branch방식이 복잡한 치차계에 유리함을 유도과정을 통하여 보였다.
- (2) 전달행렬법과 λ -행렬법을 치차계에 적용하여 그효용성을 보였다.

앞으로 이 방법에 의하여 굽힘진동과 연성된 치차계의 해석, 과도진동 해석등이 진행되어야 할 것이며 치차의 비선형성도 고려되어야 할 것이다.

5. 후기

본 과제는 삼성항공의 '게스터빈 발전시스템의 비틀림 진동해석'과제와 관련하여 이루어 졌으며 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Prohl,M.A.,1945, "A General Method for calculating Critical Speeds of Flexible Rotors.", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.12, PP A-142-A-148.
- [2] Lund,J.W., 1974, "Stability and Damped Critical Speeds of Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol.96, No..2, PP.509-517
- [3] Bansal,P.N.,and Kirk,R.G., 1975, "Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems, ASME Journal of Engineering for Industry, PP.1325-1332
- [4] D.Kim,J.W.David,1990, "An Improved Method for Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems", ASME Journal of Vibration and Acoustics, PP.112-118
- [5] M.J.Goodwin, "Dynamics of Rotor-bearing System", Principle Lecture, Dept. of Mech. and Computer-Aided Engineering, Staffordshire polytechnic, Staffordshire Polytech., 1989
- [6] J.S.Rao, "Rotor Dynamics", 2nd edition, John Wiley & Sous, 1991

[7] Mitchell,L.D., "ANew Branching Technique for the static and Dynamic Analysis of Geared System.", Vibration in Rotating Machinery, I Mech E Conference Publication 1980-4

[8] Nogill Park, "An Analysis investigation of Geared System Dynamics Containing Spur and Helical gears", Ph.D, North carolina state university, Raleigh, 1987

[9] Chong-won Lee, "Vibration Analysis of Rotors", Kluwer Academic publishers, 1993

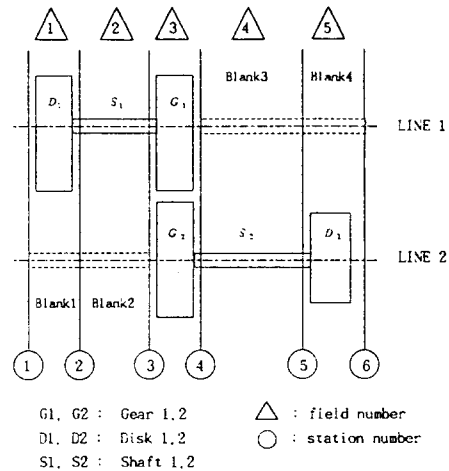


Fig 1. Simple Geared Rotor System

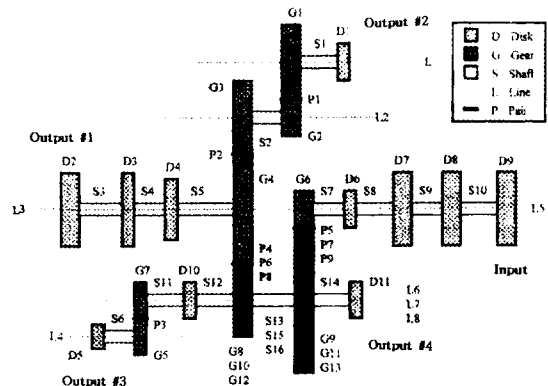


Fig 2. System Model of 8-Steps Gear

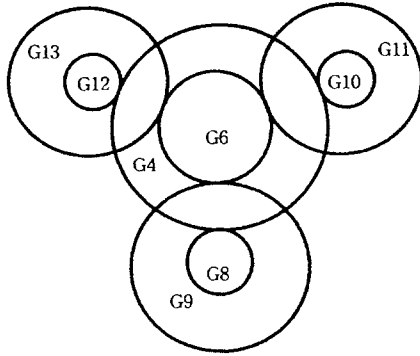


Fig.3 Triple Gear Pair Model

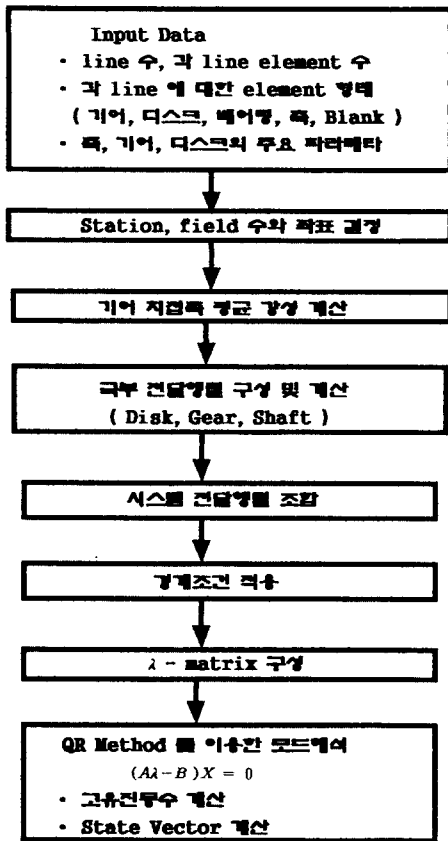


FIG 4. Program Flow Chart

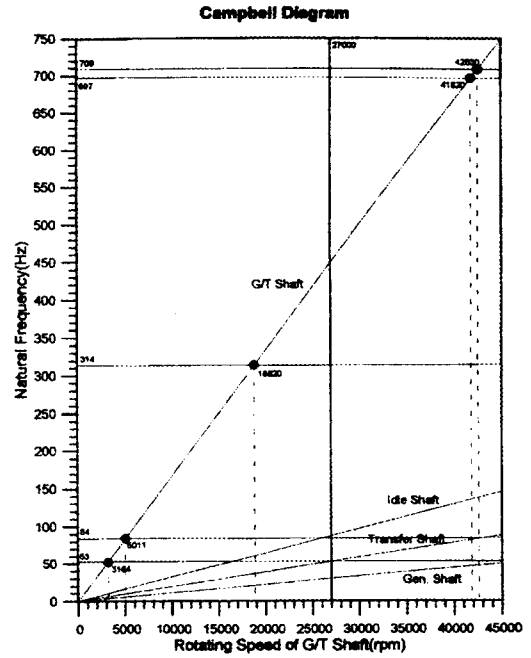


Fig 5. Campbell Diagram of G/T Shaft

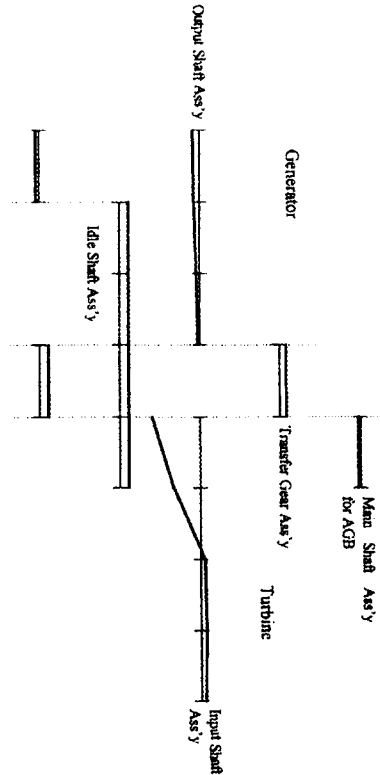


Fig 6. 1st Torsional Natural Mode (3164rpm)

Table 1. Gear Specifications of 8 - Steps Gear

제원	압력 각 (deg)	모듈 (m)	치폭 (m)	잇수	치접촉 평균 강성 (N/m)	질량관성 모우멘트 (N/m^2)
G1	20°	0.35e-2	0.047	89	0.39541e+9	1.56770e-1
G2	20°	0.35e-2	0.029	40	0.39541e+9	1.24850e-1
G3	25°	0.55e-2	0.024	38	0.71438e+9	0.26977e-1
G4	25°	0.55e-2	0.060	67	0.71438e+9	5.04080e-1
G5	20°	0.20e-2	0.080	47	0.18402e+9	3.73000e-4
G6	25°	0.40e-2	0.030	20	0.38267e+9	9.47000e-4
G7	20°	0.20e-2	0.014	20	0.18402e+7	0.90000e-5
G8	25°	0.55e-2	0.100	23	0.11211e+10	1.33860e-5
G9	25°	0.40e-2	0.030	103	0.38267e+9	3.48611e-1
G10	25°	0.55e-2	0.100	23	0.11211e+10	1.33860e-5
G11	25°	0.40e-2	0.030	103	0.38267e+9	3.48611e-1
G12	25°	0.55e-2	0.100	23	0.11211e+10	1.33860e-1
G13	25°	0.40e-2	0.030	103	0.38267e+9	3.48611e-1

Table 2. Disk Specifications of 8-Steps Gear

제원	D1	D2	D3	D4	D5
질량관성 모우멘트 (N/m^2)	0.62e-4	0.22e1	0.90e-1	1.32e-1	0.9e-5

제원	D6	D7	D8	D9	D10	D11
질량관성 모우멘트 (N/m^2)	1.46e-3	2.19e-1	2.16e-1	1.76e-4	3.35e-4	1.00e-3

Table 3. Shaft Specifications of 8-Steps Gear

제원	축의 길이 (m)	축의 직경 (m)	축의 탄성계수 (N/m^2)	축의 프와송비
S1	5.950e-1	0.390e-1	2.0×10^{11}	0.28
S2	1.250e-1	0.882e-1	"	"
S3	0.630e-1	1.150e-1	"	"
S4	4.340e-1	0.900e-1	"	"
S5	6.100e-1	1.150e-1	"	"
S6	0.605e-1	0.237e-1	"	"
S7	2.665e-1	0.290e-1	"	"
S8	3.368e-1	0.263e-1	"	"
S9	1.994e-1	0.061e-1	"	"
S10	1.540e-1	0.528e-1	"	"
S11	0.300e-1	0.260e-1	"	"
S12	0.725e-1	0.600e-1	"	"
S13	0.330e-1	0.900e-1	"	"
S14	0.960e-1	0.672e-1	"	"

Table 4. Driver and Driven Gear of Triple Pair

구분	Gear Pair	Driver Gear	Driven Gear
Tripe #1	P4	G8	G4
	P6	G10	G4
	P8	G12	G4
Tripe #1	P5	G6	G9
	P7	G6	G11
	P9	G6	G13

Table 5 Comparison of the Results with TMM and Lagrange Method
rps: rad/sec, rpm : revolution/min.

Mode #	TMM	Lagrange	Mode Shape
1	331(3164)	328(3134)	TBN 1st
2	525(5011)	519(4955)	TBN 1st GEN 1st
3	1971(18820)	1956(18674)	TBN 2nd
4	4379(41820)	4369(41725)	TBN 3rd GEN 2nd
5	4454(42530)	4449(42482)	TBN 3rd GEN 2nd
10	12160(116200)	12070(115262)	
12	15040(143600)	14922(142497)	