

# 축 어긋남을 갖는 회전체-볼베어링계의 모형화

<sup>o</sup>이영섭\*, 이종원\*

## (Modeling of misaligned rotor-ball bearing systems)

(Young-Seob Lee and Chong-Won Lee)

### ABSTRACT

축어긋남이 존재하는 회전체-볼베어링계의 진동을 묘사할 수 있는 모델을 개발하였다. 축어긋남은 운동방정식에서 축과 베어링에서의 변위벡터 변화로 묘사되고, 이로 인해 커플링과 베어링에 작용하는 힘과 모멘트는 축어긋남의 효과로서 고려되었다. 축의 유연성을 고려하기 위해 축방향의 동력학을 포함한 축과 원판에 대한 유한 요소 모델을 이용하였으며, 원판과 베어링에서의 불균형 응답으로부터 축어긋남과 관련된 진동특성을 조사 하였다.

### 1. 서론

회전기계에서 축어긋남(misalignment)은 불균형 다음으로 자주 일어나는 결함으로 베어링 하우징의 변형, 부적절한 조립과 설치등에 의해 발생되며, 베어링과 커플링에 전하중(preload)을 작용시킨다. 이 결함은 주로 회전속도에 해당되는 진동(1x)을 발생시키며, 횡방향 진동보다 큰 축방향 진동으로 특징지어진다. 특히 축어긋남이 심한 경우에는 1X성분보다 큰 2X성분이 나타나기도 하며, 이것은 바나나 또는 '8'자 형태의 선회궤적을 만든다[1-3].

최근 축어긋남에 대한 연구는 주로 커플링의 변형에 관한 모형화와 진동 영향에 대한 연구들이 진행되고 있다[4-7]. 그러나 실제 회전기계에서는 축어긋남에 의해 전하중이 커플링과 베어링에 동시에 작용되며, 불균형 응답, 임계속도와 안정성에 많은 영향을 미치게 된다[1-2]. 따라서 축어긋남이

존재하는 회전체계를 정확히 묘사하고, 관련된 진동 특성들을 알기 위해서는 베어링과 커플링에 작용하는 전하중과 변형에 관한 영향들이 모두 고려되어야 한다. 이 연구의 목적은 축어긋남이 존재하는 회전체계의 진동을 묘사할 수 있는 모델을 개발하고, 불균형 응답을 통하여 축어긋남과 관련된 진동 특성들을 알아보고자 한다.

### 2. 운동방정식

축어긋남에 의한 진동특성을 알아보기 위해, 볼베어링으로 지지된 회전체계를 고려하였다.

#### 2.1 축어긋남의 모형화

축어긋남은 Figure1과 같이 각(angular) 축어긋남, 평행(parallel) 축어긋남, 그리고 동시에 존재하는 (combined) 축어긋남으로 나뉘어지며[1-2], 다음과 같은 방법으로 운동방정식에 고려된다. 각 축어긋남을 예로 들면, 우측 베어링이 초기 베어링 중심선에서  $Yb_2$ 만큼 어긋난다면, 우측 베어링에

- 한국 과학 기술원 기계공학과  
소음및 진동 제어 연구 센터

해당되는 축변위 벡터  $y$ 는  $y+Yb2$ 로 대체된다. 이러한 축변위 벡터의 변화는 축요소들의 변형을 가져오며, 축어긋남에 의한 효과로서 힘과 모멘트를 베어링과 커플링에 전달 시킨다.

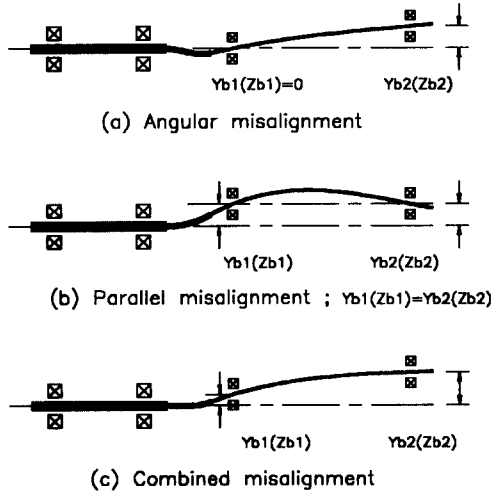


Figure 1 Types of misalignment

### 2.2 회전체계의 유한요소모형화

축방향 진동은 축어긋남의 존재를 알리는 중요한 지표로, 축어긋남이 존재하는 회전체계의 진동 해석을 위해 축방향의 동력학적인 해석이 필요하며, 축의 유연성을 고려하기 위해 축방향을 포함한 축과 원판에 대한 유한 요소 모델을 이용하였다[8-9]. 축요소에 대한 운동방정식은 Figure2에 나타난 좌표계를 이용하면 다음과 같이 표시되며, 여기서 사용된 변수, 벡터와 행렬들은 참고 문헌[8]에 나타내어져 있다.

$$\begin{bmatrix} m^s & 0 & 0 \\ 0 & m^s & 0 \\ 0 & 0 & m^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}^s \\ \ddot{z}^s \\ \ddot{x}^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g^s & 0 \\ -g^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y^s \\ z^s \\ x^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k^s & 0 & 0 \\ 0 & k^s & 0 \\ 0 & 0 & k^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y^s \\ z^s \\ x^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{y^s} \\ f_{z^s} \\ f_{x^s} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} y^s \\ z^s \\ x^s \end{Bmatrix} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10}\}^T$$

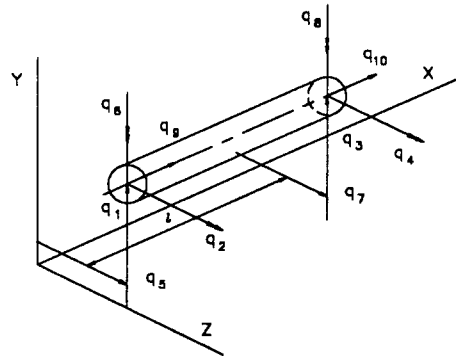


Figure 2 Typical finite rotor element coordinate

$$m^a = \frac{m_l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k^a = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

이다. 그리고 원판에 관한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m^d & 0 & 0 \\ 0 & m^d & 0 \\ 0 & 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}^d \\ \ddot{z}^d \\ \ddot{x}^d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g^d & 0 \\ -g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y^d \\ z^d \\ x^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{y^d} \\ f_{z^d} \\ f_{x^d} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$m^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad g^d = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

축방향 변형에 의해 발생하는 축방향하중은 다음과 같이 표시되며,

$$P = \frac{EA}{l} \{s - l - (q_{10} - q_9)\} \quad (3)$$

여기서  $l$  과  $s$  는 축하중  $P$ 를 받기전과 받은 후의 축요소 길이이다.

### 2.3 볼베어링의 하중과 처짐의 관계

축어긋남에 의해 베어링에 작용하는 힘과 모멘트는 베어링의 변형을 가져오며, 변위 벡터와의 관계는 다음과 같이 표시된다[10-11]. 여기서 사용된 변수는 참고문헌[11]에 나타내어져 있다.

$$F_{bx} = \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j$$

$$\begin{aligned}
F_{by} &= \sum_{j=1}^n K_3/2 \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \cos \psi_j \\
F_{bz} &= \sum_{j=1}^n K_3/2 \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \sin \psi_j \\
M_{by} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_3/2 \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \sin \psi_j \\
M_{bz} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_3/2 \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \cos \psi_j
\end{aligned} \quad (4)$$

## 2.4 변형된 커플링의 모형화

Figure 3과 같이 축어긋남에 의해 커플링의 변형을 가져오며, 이로 인해 작용하는 힘과 모멘트를 크게 2가지로 분류할 수 있다. 하나는 회전체를 구동시키는 데 필요한 전달 토크에 의한 것이며, 다음과 같이 표시된다[4,6,7].

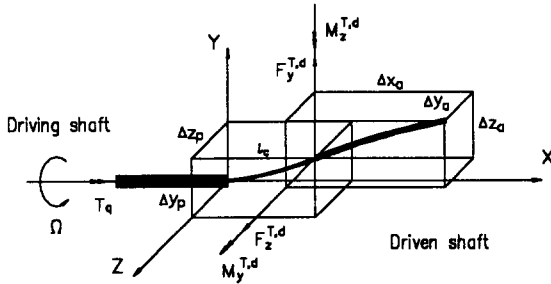


Figure 3 Reaction moments and forces at flexible coupling

$$\begin{aligned}
M_y^T &= -T_q \sin(\Phi_a) \cos(\Phi_p) - T_q \sin(\Phi_p) \cos(\Phi_a) \\
M_z^T &= -T_q \sin(\theta_a) \cos(\theta_p) - T_q \sin(\theta_p) \cos(\theta_a) \\
F_y^T &= -\frac{M_z^T}{l_c}, \quad F_z^T = \frac{M_y^T}{l_c}
\end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\theta_a &= \sin^{-1}\left(\frac{\Delta z_a}{\Delta x_a}\right), & \Phi_a &= \sin^{-1}\left(\frac{\Delta y_a}{\Delta x_a}\right) \quad \text{와} \\
\theta_p &= \sin^{-1}\left(\frac{\Delta z_p}{\Delta x_p}\right), & \Phi_p &= \sin^{-1}\left(\frac{\Delta y_p}{l_c}\right)
\end{aligned}$$

는 각과 평행 축어긋남에 의한 처짐각을 나타낸다.

다른 하나는 커플링의 변형에 의한 것으로 커플링을 강성요소를 갖는 범요소로 가정하여 힘과 모멘트를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
F_y^d &= \frac{12(E_c I_c)_{eff}}{l_c^3} \left( \Delta y_p - \frac{\theta_p l_c}{2} \right), \quad M_y^d = \frac{6(E_c I_c)_{eff}}{l_c^2} \left( \Delta y_p - \frac{2\theta_p l_c}{3} \right) \\
F_z^d &= \frac{12(E_c I_c)_{eff}}{l_c^3} \left( \Delta z_p - \frac{\Phi_p l_c}{2} \right), \quad M_z^d = \frac{6(E_c I_c)_{eff}}{l_c^2} \left( \Delta z_p - \frac{2\Phi_p l_c}{3} \right)
\end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $(E_c I_c)_{eff}$ 는 유효 굽힘강성을 나타낸다. 그리고 커플링의  $\Delta x$ 만큼 축방향 변형에 의해 발생하는 축하중은 다음과 표시된다.

$$F_x^d = \frac{(E_c A_c)_{eff}}{l_c} \Delta x \quad (7)$$

여기서  $(E_c A_c)_{eff}$ 는 유효 축강성을 나타낸다.

## 2.5 예제

Figure 4는 해석하고자 하는 회전체로, 축은 2개의 요소를 갖는 것으로 모형화하였으며, Table 1에 회전체에 관한 데이터를 나타내었다. 그리고 사용된 깊은홈 볼 베어링(Type 6200)의 간극은  $10 \mu\text{m}$ 이다.

Table 1 Dimensions and Data of Test Rotor

Variables	Values
Shaft Length	$L_1=300\text{mm}$ $L_2=200\text{mm}$
Shaft Diameter, $d_s$	$d_s=10\text{mm}$
Disk Mass, $m_d$	0.3kg
Disk Polar Moment of Inertia, $I_p$	$2E-4\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Disk Diametral Moment of Inertia, $I_d$	$1E-4\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Coupling Length, $l_c$	38mm
Coupling Effective Flexural Rigidity $(E_c I_c)_{eff}$	0.13 N·m <sup>2</sup>
Coupling Effective Axial Rigidity $(E_c A_c)_{eff}$	2,280 N

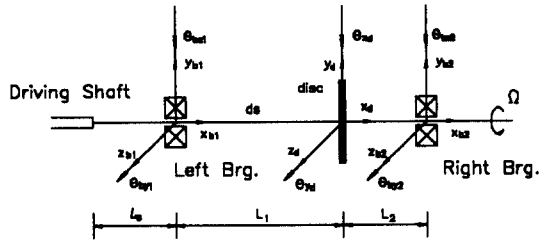


Figure 4 Rotor-bearing model as a example

Figure4에서 15개의 자유도를 갖는 회전체에 대한 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

여기서

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \\ \mathbf{X} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \\ \mathbf{F}_x \end{Bmatrix} \quad (8)$$

이고

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m^{s1} & 0 & 0 \\ 0 & m^d & 0 \\ 0 & 0 & m^{s2} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} m^{a1} & 0 & 0 \\ 0 & m^d & 0 \\ 0 & 0 & m^{a2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g^{s1} & 0 & 0 \\ 0 & g^d & 0 \\ 0 & 0 & g^{s2} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{s2} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k^{a1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{a2} \end{bmatrix}$$

이다. 여기서 아래첨자 \$b\_1\$과 \$b\_2\$는 좌, 우측 베어링을 위치자 \$s\_1\$과 \$s\_2\$는 축요소의 첫번째와 두번째 요소를 각각 나타낸다. 그리고 베어링과 커플링에 작용하는 힘과 모멘트는 아래첨자 \$b\$와 \$c\$로 나타내었다. 원판에 작용하는 외력은 불균형력과 자중이며, 55g-mm의 불균형량이 고려되었다. Runge-Kutta 알고리즘을 이용하여, 베어링과 디스크에서의 불균형응답을 구하였으며, 0.05의 도달감쇠계수를 갖는 것으로 가정하였다.

### 3. 해석

#### 3.1 선회 궤적에 대한 해석

##### 각 축어긋남에 대하여

Figure5는 어긋남의 정도에 따른 원판에서의 선회 궤적(whirling orbit)을 나타낸다. Figure5.(a)에서와

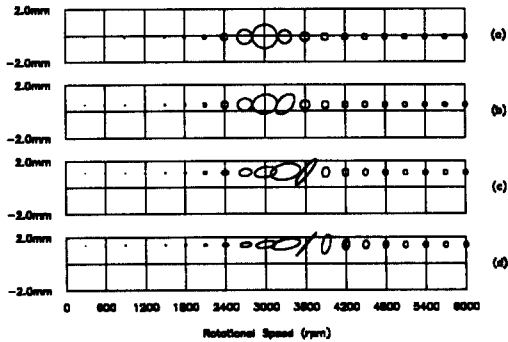


Figure 5 Whirling Orbits for angular misalignment at disc

- (a) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=0.0\text{mm}\$ (b) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=1.0\text{mm}\$  
(c) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=2.0\text{mm}\$ (d) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=2.5\text{mm}\$

같이 어긋남이 없는 경우 궤적은 원과 같으며, 최대 진동은 약 3000rpm에서 발생된다. 그러나 어긋남이 심해질수록 궤적은 타원이 되고, 임계속도는 점점 높아진다. 이러한 현상은 어긋남 방향으로 베어링의 강성 요소가 증가하기 때문이다. Figure6은 좌측 베어링에서의 선회궤적을 나타낸 것으로, 각 축어긋남에 의한 간극의 감소로 궤적의 크기는 줄어들고, 베어링의 비선형요소(간극과 변형)에 의해 궤적의 찌그러짐이 발생된다.

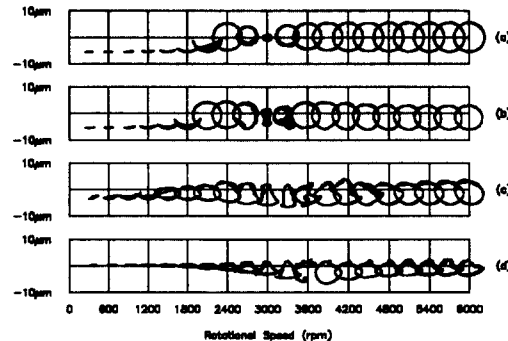


Figure 6 Whirling Orbits for angular misalignment at left bearing

- (a) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=0.0\text{mm}\$ (b) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=1.0\text{mm}\$  
(c) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=2.0\text{mm}\$ (d) \$Y\_{b1}=0.0\text{mm}\$ \$Y\_{b2}=2.5\text{mm}\$

##### 평행 축어긋남에 대하여

Figure7은 원판에서의 궤적을 나타낸 것으로 축어긋남이 심해지더라도, 궤적은 축어긋남이 없는 경우와 유사하나, Figure8과 같이 좌측베어링에서의 궤적은 커플링에 작용하는 힘과 모멘트에 의해 축의 움직임이 줄어든다

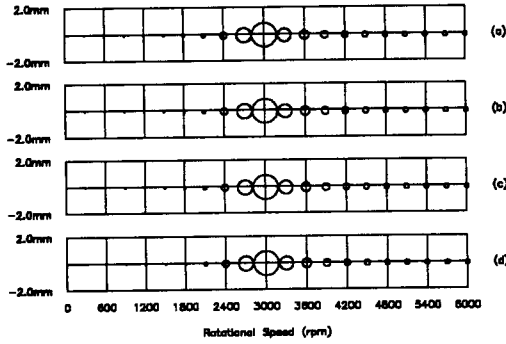


Figure 7 Whirling Orbits for parallel misalignment at disc

- (a)  $Y_{b1}=0.0\text{mm}$   $Y_{b2}=0.0\text{mm}$  (b)  $Y_{b1}=0.2\text{mm}$   $Y_{b2}=0.2\text{mm}$   
 (c)  $Y_{b1}=0.4\text{mm}$   $Y_{b2}=0.4\text{mm}$  (d)  $Y_{b1}=0.8\text{mm}$   $Y_{b2}=0.8\text{mm}$

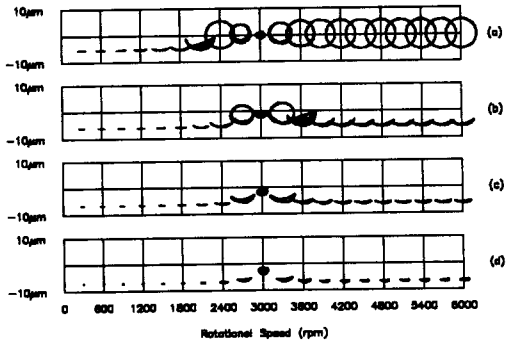


Figure 8 Whirling Orbits for parallel misalignment at left bearing

- (a)  $Y_{b1}=0.0\text{mm}$   $Y_{b2}=0.0\text{mm}$  (b)  $Y_{b1}=0.2\text{mm}$   $Y_{b2}=0.2\text{mm}$   
 (c)  $Y_{b1}=0.4\text{mm}$   $Y_{b2}=0.4\text{mm}$  (d)  $Y_{b1}=0.8\text{mm}$   $Y_{b2}=0.8\text{mm}$

Figure9는 6000rpm에서 원판에서의 축진동을 보여주는 것으로 각 과 평행 축어긋남이 존재하는 경우 축방향 진동은 증가하며, 그 크기는 좌, 우측베어링에서의 선화 궤적과 비슷하다. 특히 Figure9.(b)는 2x 성분의 진동을 포함하는 축방향 진동을 보여주고 있다.

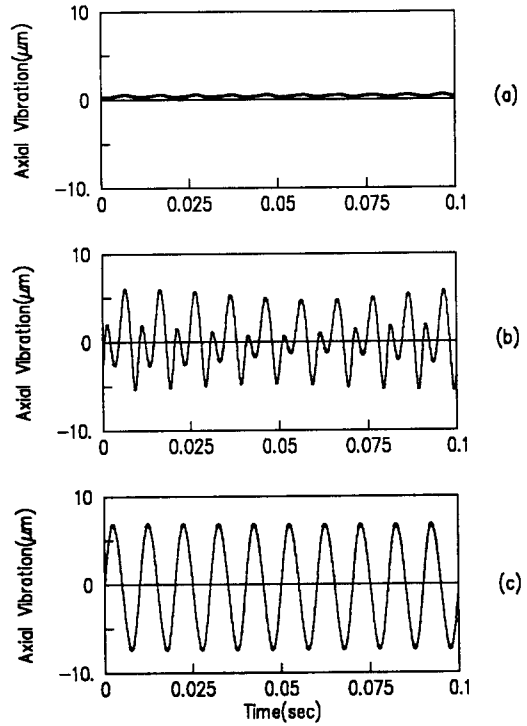


Figure 9 Axial vibration at disc,  $\Omega=6000\text{rpm}$

- (a)  $Y_{b1}=0.0\text{mm}$   $Y_{b2}=0.0\text{mm}$  (b)  $Y_{b1}=0.0\text{mm}$   $Y_{b2}=2.5\text{mm}$   
 (c)  $Y_{b1}=0.8\text{mm}$   $Y_{b2}=0.8\text{mm}$

### 3.2 주파수 분석

축어긋남의 정도에 따른 주파수 성분들의 변화를 방향 스펙트럼[12,13] 해석을 이용하여 원판에서의 불균형 응답에 대한 스펙트럼과 임계속도 아래서의 조화 주파수 성분들의 변화를 Figure10와 Figure11에 나타내었다. Figure10은 각 어긋남의 증가로 인한 전방(forward) 성분의 감소와 후방(backward) 성분의 증가를 보여준다. 그리고 Figure11는 1x 과 -1x성분을 포함하지 않는 cascade plot로 축어긋남이 심해짐에 따라  $2x(-2x)$ 와  $3.05x(-3.05x)$  성분들이 증가하고 있으며, 특히 회전체계의 고유진동수에 가까워지면 이러한 주파수 성분들이 현저히 증가한다. 여기서  $3.05x(-3.05x)$  성분은 베어링의 외부결합과 관련된 주파수로, 축어긋남으로 인한 베어링의 접촉반경 감소와 베어링에 작용하는 전하중에 의해 발생되며,

이 주파수 성분의 크기 변화는 볼 베어링으로 지지된 회전체에서 축어긋남의 존재를 알릴 수 있는 좋은 지표가 될 수 있다.

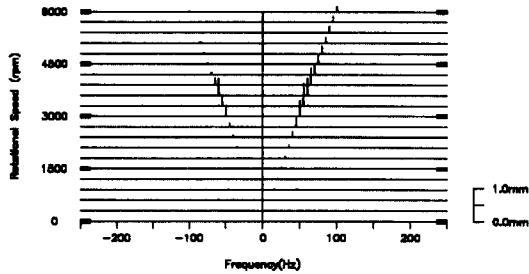


Figure 10 Cascade plot of whirling orbits at disc

Yb1=0.0mm Yb2=2.5mm

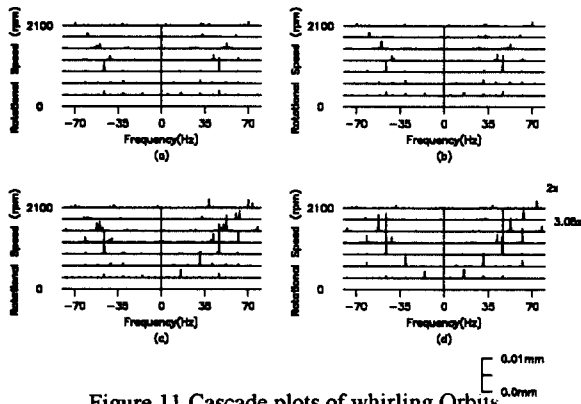


Figure 11 Cascade plots of whirling Orbits

at disc(excluded 1x)

(a) Yb1=0.0mm Yb2=0.0mm (b) Yb1=0.0mm Yb2=1.0mm

(c) Yb1=0.0mm Yb2=2.0mm (d) Yb1=0.0mm Yb2=2.5mm

#### 4. 결론

본 연구에서 축어긋남을 가지고 있는 회전체-볼베어링계에 대한 모델을 개발하고 진동특성 들을 조사하였다. 선회계적과 스펙트럼 해석으로 부터 각 축어긋남이 심해지는 경우 선회계적은 타원으로 되고, 찌그러짐이 나타나며, 임계속도의 증가를 볼 수 있다. 이러한 현상은 주파수 영역에서 후방 성분과 조화 주파수 성분의 증가로 나타났다. 그러나 평행 축어긋남이 심해지더라도 커플링과 가까이 있는 베어링에서의 궤적만이 작아지게 되고, 원판에서의 궤적 변화는 없다. 그리고 각 과 평행 축어긋남이

있는 경우, 축방향 진동은 현저히 증가하는 것으로 나타났으며, 베어링의 외륜결합에 해당하는 주파수 성분은 볼베어링으로 지지된 회전체계에 축어긋남의 존재를 알리는 좋은 지표가 될 수 있다.

#### 5. 참고문헌

1. Collacott, R.A., Vibration Monitoring and Diagnosis, John Wiley & Sons, New York, 1979.
2. Alignment Course, Bently Nevada.
3. Muszynska, A., Misalignment and Shaft Crack-Related Phase Relationships for 1x and 2x Vibration Components of Rotor Responses, Orbit, Sep, 1989.
4. Gibbons, C.B., " Coupling Misalignment Forces." Proceedings 5th Turbomachinery Symposium Gas Turbine Laboratories, Texas A&M Univ. 1976, pp.111-116.
5. Xu, M. and Marangoni, R.D., " Vibration Analysis of a Motor-Flexible Coupling- Rotor System Subject to Misalignment and Unbalance, Part I : Theoretical Model and Analysis," J. of Sound and Vibration, Vol.176(5), 1994, pp.663-679.
6. Sekhar, A.S. and Prabhu, B.S., " Effects of Coupling Misalignment on Vibrations of Rotating Machinery," J.of Sound and Vibration, Vol.185(4), 1995, pp.655-671.
7. Arumugam, P., Swarnamani, S., and Prabhu, B.S., " Effects of Coupling Misalignment on the Vibration Characteristics of a Two Stage Turbine Rotor," Design Engineering Technical Conferences, Vol.84(2) , ASME, 1995, pp.1049-1054.
8. Kim,Y.D. and LEE,C.W.,"Finite Element Analysis of Rotor-Bearing Systems Using a Model Transformation Matrix," J. of Sound and Vibration, 111(3), 1986, 441-456.

9. Nelson, H.D. and McVaugh, " The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," J.of Eng. Industry, 1976, pp.593-600.
10. Jones, A.B., " A General Theory for Elastically Constrained Ball and Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions," J. of Basic Engineering, Trans. ASME, June, 1960, pp.309-320.
11. Lim, T.C. and Singh, R., " Vibration Transmission through Rolling Element Bearings, Part I : Bearing Stiffness Formulation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 139(2), 1990, pp179-199.
12. Joh, C.Y., Diagnosis of Anisotropy and Asymmetry in Rotating Machinery via Directional Spectral Analysis, Ph.D Dissertation, KAIST, 1993.
13. Lee, C.W., Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers, 1993.