

관인발의 상계 해석

嚴慶根, 李東寧

서울대학교 재료 공학부 및 신소재 공동 연구소

An Upper Bound Solution of Tube Drawing

Kyung-Keun Um and Dong Nyung Lee

*Division of Material Science and Engineering, and Center for Advanced Materials
Research*

Abstract

An upper bound solution of tube drawing process using a fixed tapered plug has been obtained, which reduces to an solution for tube sinking by setting friction factor between tube and plug at zero. Effects of various process parameters have been discussed based on the solution.

Keywords : upper bound solution(상계해), tube drawing(관인발), tube sinking(관 싱킹), fixed tapered plug(고정경사플러그), die semi-angle(다이 반각)

1 서론

관인발은 관을 원추형의 다이를 통과시켜 직경뿐만 아니라 두께도 줄이는 가공법이다. 관인발에서는 정지 경사 플러그, 부동 플러그, 이동 플러그와 원주형 플러그 등 다양한 플러그가 사용되고 있다.

관이 다이를 통과할 때 필요한 길이 방향의 응력인 인발 응력은 실험적인 방법이나 유한 요소해석등에 의해 구해진다. 이 중에서 실험적인 방법은 시간과 경제적인 소모가 많다. 그리고 지난 20년간 유한요소해석은 가공 공정의 모의 계산에 사용되어 왔지만, 슬래브 해석이나

슬립 선장 이론, 그리고 상계해석에 의한 수식 해는 인발 힘과 인발 공정 인자의 영향에 대한 이해에 도움을 준다.

관 인발에서의 슬래브 해석은 Hoffman과 Sachs[1]에 의해서 구해졌다. Guo 등[2]은 상계해석으로 관싱킹 문제를 다루었다. Collins 와 Williams[3]는 축대칭 관 인발에 대한 슬립 선장 해석을 하였다. 그리고, 관인발에 대한 FEM 해석은 많은 저자들에 의해서 이루어졌다[4-7].

이 연구의 목적은 정지 플러그를 사용하는 관인발에 대한 상계해석을 얻는 것이다.

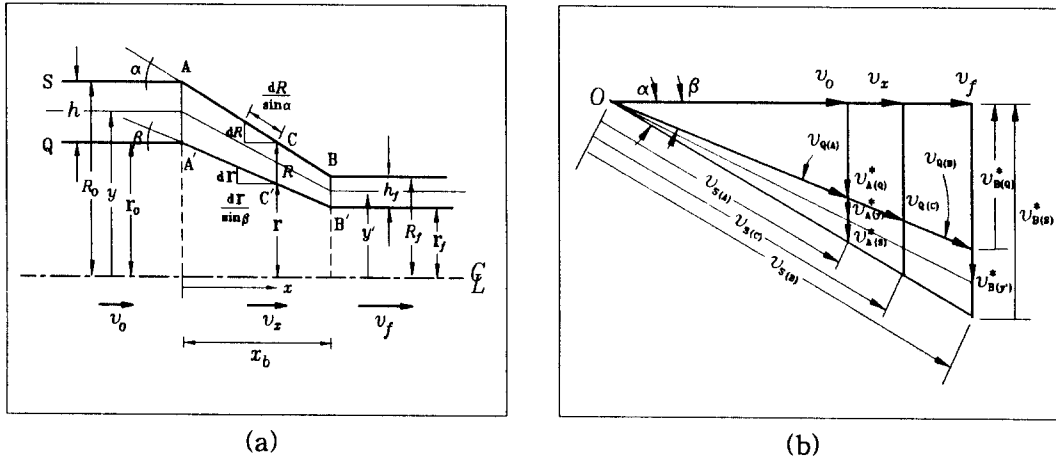


Fig. 1. (a) Flow lines and (b) a partial hodograph.

2. 상계 모델(Upper bound model)

관인발에서 관의 초기 바깥 반지름과 안쪽 반지름이 각각 R_0 이고 r_0 이고 최종 바깥 반지름과 안쪽 반지름이 각각 R_f 과 r_f 이다. 다이 반각은 α 이고 플러그 반각은 β 이다. 이 연구에서는 다이와 관 사이의 마찰응력은 τ_i^α 그리고 플러그와 관 사이의 마찰 응력은 τ_i^β 이라고 가정하였다.

그림 1-(a) 은 관인발에서의 금속유동선을 보여주고 있고, 그림 1-(b)는 이에 해당하는 속도도(hodograph)이다. 모든 입자들은 면 AA'를 지나기 전과 면 BB'를 지난 후에는 수평으로 움직인다. 이 연구에서는 면 AA'과 BB'는 수직이라고 가정하였고, 이는 그림 2에 나타낸 관싱킹에 대한 FEM 요소망과 잘 일치한다.

입자가 두 입구와 출구의 두 경계면의 안쪽에서는 유동선이 직선이며 한 점을 향해 모인다. 수직 면 CC'에 있는 모

든 입자들은 축방향으로의 속도가 v_x 이며 면 AA'에서 면 BB'까지 일정하게 증가한다. 면 AA'를 지나면서 속도불연속, $v_{A'}^*$ 이 생기며 이는 중심선과의 거리 y 에 비례한다.

$y = R_0$ 인 바깥 면에서는 입자의 속도가 속도 불연속 $v_{A(S)}^* = v_0 \tan \alpha$ 에 의해서 v_0 에서 $v_{S(A)}$ 로 급격히 증가한다. 마찬가지로 $y = r_0$ 인 안쪽 면에서는 속도 불연속 $v_{A(Q)}^* = v_0 \tan \beta$ 에 의해서 속도가 v_0 에서 $v_{Q(A)}$ 로 급격히 증가한다.

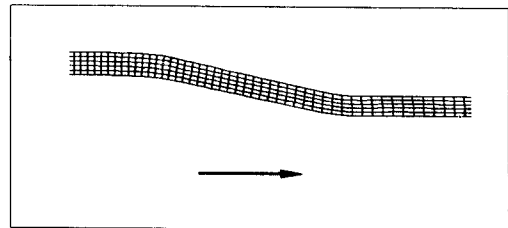


Fig. 2. FEM mesh distortion after tube drawing.

중심선에서 y 만큼 떨어진 곳에서의 입자에 대한 면 AA' 에 의한 속도불연속은 다음과 같다.

$$v_{A(y)}^* = \left(\frac{y}{R_o}\right) v_o \tan \alpha$$

입구에서, 임의의 위치 y 에서의 미소면적 dA 에 대한 전단 일률은,

$$\begin{aligned} dW_A &= 2\pi y dy k v_{A(y)}^* \\ &= 2\pi k \frac{v_o}{R_o} \tan \alpha y^2 dy \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 k 는 관 재료의 전단 항복 강도이다.

따라서, 입구에서 전면적에 대한 전단 일률은

$$\begin{aligned} W_A &= 2\pi k \frac{v_o}{R_o} \tan \alpha \int_{r_o}^{R_o} y^2 dy \\ &= \frac{2}{3} \pi k v_o \frac{R_o^3 - r_o^3}{R_o} \tan \alpha \\ &= 2k \frac{(R_o^2 + R_o r_o + r_o^2)}{R_o(R_o + r_o)} A_o v_o \tan \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $A_o = \pi(R_o^2 - r_o^2)$ 는 관의 초기 면적이다.

출구 면 BB' 에서는, 임의의 위치 y' 에서의 전단 일률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dW_B &= 2\pi y' dy' k v_{B(y')}^* \\ &= \frac{2\pi k v_f}{R_f} \tan \alpha y'^2 dy' \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 v_f 는 입자가 출구를 나갈 때의 축방향 속도이다.

따라서 출구 전면적에서의 전단 일률은,

$$W_B = \frac{2\pi k v_f}{R_f} \tan \alpha \int_{r_f}^{R_f} y'^2 dy'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{3} k v_f \frac{R_f^3 - r_f^3}{R_f} \tan \alpha \\ &= \frac{2}{3} k \frac{(R_f^2 + R_f r_f + r_f^2)}{R_f(R_f + r_f)} A_o v_o \tan \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

따라서, 식(2) 와 (4)에서 두 불연속 면에 의한 총전단 일률은 식 (5)가 된다.

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{2k}{3} A_o v_o \tan \alpha \cdot \\ &\quad \left[\frac{R_o^2 + R_o r_o + r_o^2}{R_o(R_o + r_o)} + \frac{R_f^2 + R_f r_f + r_f^2}{R_f(R_f + r_f)} \right] \\ &= \frac{2\sigma_o}{3\sqrt{3}} A_o v_o \tan \alpha \cdot \\ &\quad \left[\frac{R_o^2 + R_o r_o + r_o^2}{R_o(R_o + r_o)} + \frac{R_f^2 + R_f r_f + r_f^2}{R_f(R_f + r_f)} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

다음은 관과 다이 그리고 플러그와의 접촉에 의해 소모되는 에너지를 계산하였다. 먼저, 변형 구간 내에 있는 임의의 위치에서의 원형 슬래브의 바깥 반지름과 안쪽 반지름을 각각 R 과 r 이라고 할 때, 접촉하는 면적은 그림 1-(a)에서 보듯이 각각 $dR/\sin \alpha$ 과 $dr/\sin \beta$ 이 된다.

바깥 접촉면에서의 마찰 일률 dW_f^a 은 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$dW_f^a = 2\pi R \frac{dR}{\sin \alpha} \tau_i^a v_{SC} \quad (6)$$

여기서, τ_i^a 과 v_{SC} 는 위치가 x 인 바깥 접촉면에서의 각각 전단 응력과 속도이다. 속도 v_{SC} 는 수평 이동 속도 v_x 와 다음의 관계가 있다.

$$v_{SC} = v_x / \cos \alpha \quad (7)$$

또한 부피가 일정하므로,

$$v_x (R^2 - r^2) = v_o (R_o^2 - r_o^2) \quad (8)$$

위의 식 (7)과 식 (8)에 의해서 다음이 성립한다.

$$v_{S(C)} = \frac{v_o (R_o^2 - r_o^2)}{(R^2 - r^2) \cos \alpha} \quad (9)$$

따라서, 바깥 접촉면에서의 마찰 일률은 다음과 같이 주어진다.

$$W_f^a = \frac{2\pi \tau_i^a v_o (R_o^2 - r_o^2)}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \int_{R_f}^{R_o} \frac{R dR}{R^2 - r^2} \quad (10)$$

또한, 기하학적인 관계에 의해서 다음이 성립한다.

$$r = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} (R - R_f) + r_f \quad (11)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입하면 식 (12)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} W_f^a &= \frac{2\pi \tau_i^a v_o (R_o^2 - r_o^2)}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \int_{R_f}^{R_o} \frac{R dR}{(1-t^2)R^2 + 2t(R_f t - r_f)R + (2tR_f r_f - t^2 R_f^2 - r_f^2)} \\ &= \frac{2\tau_i^a A_o v_o}{\sin 2\alpha} \cdot \left[\frac{1}{1+t} \ln \frac{R_o + R_o t - R_f t + r_f}{R_f - r_f} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-t} \ln \frac{R_o + R_f t - R_o t - r_f}{R_f - r_f} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

여기서, $t = \tan \beta / \tan \alpha$ 이다.

마찬가지로, 안쪽 접촉면에서의 전단 일률은

$$\begin{aligned} W_f^b &= \frac{2\tau_i^b t A_o v_o}{\sin 2\beta} \cdot \quad (13) \\ &\left[\frac{-1}{1+t} \ln \frac{R_f t - r_f t + r_o + r_o t}{(R_f - r_f)t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-t} \ln \frac{R_f t - r_f + r_o - r_o t}{(R_f - r_f)t} \right] \end{aligned}$$

τ_i^b 는 관과 플러그와의 전단 응력이다.

마지막으로, 균질 변형에 의한 변형 일

를 계산하였다. 단위 부피당 소성 변형 일 증분 dw 은 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} dw &= \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \sigma_{33} d\epsilon_{33} \\ &\quad + 2(\sigma_{12} d\epsilon_{12} + \sigma_{23} d\epsilon_{23} + \sigma_{31} d\epsilon_{31}) \quad (14) \end{aligned}$$

균질 변형에서는 전단 변형이 없기 때문에 단위 부피당 균질 변형 일률 dw_H 은,

$$dw_H = \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \sigma_{33} d\epsilon_{33} \quad (15)$$

관인발의 경우에 식 (15)는 다음과 같이 표현된다.

$$dw_H = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_r d\epsilon_r + \sigma_\theta d\epsilon_\theta \quad (16)$$

여기서, σ_1 , σ_r 과 σ_θ 는 각각 축방향, 반지름 방향, 그리고 원주방향으로의 응력이다. 그리고, $d\epsilon_1$, $d\epsilon_r$ 과 $d\epsilon_\theta$ 는 각각 축방향, 반지름 방향, 그리고 원주방향으로의 변형률이다. 이 응력과 변형률은 주성분 (principal quantities) 이 된다.

따라서, Levi-Mises 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$d\epsilon_1 = \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \right] \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_\theta &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_\theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_r}{2} \right] \\ &= y d\epsilon_1 \quad (17b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_r &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_r - \frac{\sigma_1 + \sigma_\theta}{2} \right] \\ &= -(1+y) d\epsilon_1 \quad (17c) \end{aligned}$$

또한, 축방향과 원주방향 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{R_o^2 - r_o^2}{R_f^2 - r_f^2} \quad (18)$$

그리고,

$$\varepsilon_\theta = \ln \frac{R_f + r_f}{R_o + r_o} \quad (19)$$

또한, 두 변형률의 비를 y 라 하면,

$$\begin{aligned} y &= \frac{d\varepsilon_\theta}{d\varepsilon_1} \\ &= \ln \frac{R_f + r_f}{R_o + r_o} / \ln \frac{R_o^2 - r_o^2}{R_f^2 - r_f^2} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (17)을 식 (16)에 대입하고 간단히 하면, 식 (21) 이 얻어진다.

$$\begin{aligned} dw_H &= \frac{1}{3} d\lambda [(\sigma_1 - \sigma_r)^2 \\ &\quad + (\sigma_1 - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2] \\ &= \frac{2}{3} d\lambda \sigma_o^2 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, σ_o 는 일축 인장 항복 응력이다. 따라서, 균질 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d\varepsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_r)^2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_\theta)^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_r)^2]^{1/2} \quad (22)$$

식 (17)과 식 (22)에 의해서,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_H &= \frac{2}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} d\varepsilon_1 \\ &= \frac{2}{3} d\lambda \sigma_o \end{aligned} \quad (23)$$

따라서, 식 (21)과 식 (23)에서,

$$\begin{aligned} dw_H &= d\varepsilon_H \sigma_o \\ &= \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} d\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (24)$$

결국 균질 변형 일은 다음으로 나타내어진다.

$$\begin{aligned} w_H &= \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} \varepsilon_1 \\ &= \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} \ln \frac{A_o}{A_f} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, A_o 과 A_f 는 각각 초기와 최종 단면적이다. 선재의 인발인 경우에는 $y = -1/2$ 이 되므로, $\varepsilon_H = \varepsilon_1 = \ln(A_o/A_f)$ 과 $w_H = \sigma_o \varepsilon_1$ 의 관계가 얻어진다. 이는 이미 알려진 결과와 일치한다.

전 부피에 대한 균질 변형일은 다음의 식으로 나타내어진다.

$$W_H = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} A_o v_o \ln \frac{A_o}{A_f} \quad (26)$$

외부 일률 $\sigma_d A_f v_f = \sigma_d A_o v_o$ 을 식 (5), (12), (13) 과 (26)의 합과 같다고 놓으면, 인발 응력 σ_d 가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} \ln \frac{A_o}{A_f} \\ &\quad + \frac{2\sigma_o}{3\sqrt{3}} \tan \alpha \left[\frac{R_o^2 + R_o r_o + r_o^2}{R_o(R_o + r_o)} + \frac{R_f^2 + R_f r_f + r_f^2}{R_f(R_f + r_f)} \right] \\ &\quad + \frac{2\tau_i^\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \left[\frac{1}{1+t} \ln \frac{R_o + R_o t - R_f t + r_f}{R_f - r_f} + \frac{1}{1-t} \ln \frac{R_o + R_f t - R_o t - r_f}{R_f - r_f} \right] \\ &\quad + \frac{2\tau_i^\beta t}{\sin 2\beta} \cdot \left[\frac{-1}{1+t} \ln \frac{R_f t - r_f t + r_o + r_o t}{(R_f - r_f)t} + \frac{1}{1-t} \ln \frac{R_f t - r_f + r_o - r_o t}{(R_f - r_f)t} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

여기서, τ_i^α 와 τ_i^β 는 각각 $\tau_i^\alpha = m^\alpha k$ 와 $\tau_i^\beta = m^\beta k$ 로 주어지고, 여기서, m 은 마찰 인자(friction factor) 이다.

3. 고찰

3.1. 플러그를 사용한 관인발

그림 3은 식 (27) 에 의해서, 그리고 슬래브 해석[8] 그리고 유한 요소 해석[9]에 의해 얻어진 인발 응력이다. 인발 응력은 마찰 인자의 증가에 따라 비례한다. 식 (27) 에 의한 인발응력은 예상대로 가장 큰 값을 가진다. 관의 초기, 최종 치수와 마찰 인자가 주어진 경우에 다이 반각 α 에 따른 인발 응력의 변화를 그림 4에 나타내었다. 인발 응력을 최소로 만드는 최적의 다이 반각 α_{opt} 은 주로 내부 전단과 마찰에 의해 결정된다.

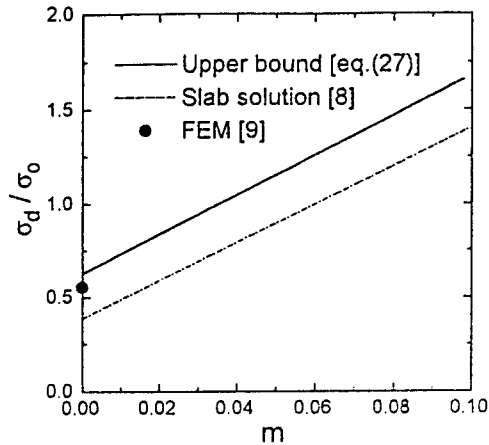


Fig. 3. ube drawing stresses σ_d calculated by various methods as a function of friction factor m . ($R_o=33.5\text{mm}$, $r_o=30\text{mm}$, $R_f=27\text{mm}$, $r_f=24\text{mm}$, $\alpha=13^\circ$ and $m^\alpha = m^\beta = m$)

주어진 초기와 최종 치수에 대해서 최적 다이 반각과 그 때의 인발 응력은 마찰 인자의 증가에 따라 증가한다(그림 5).

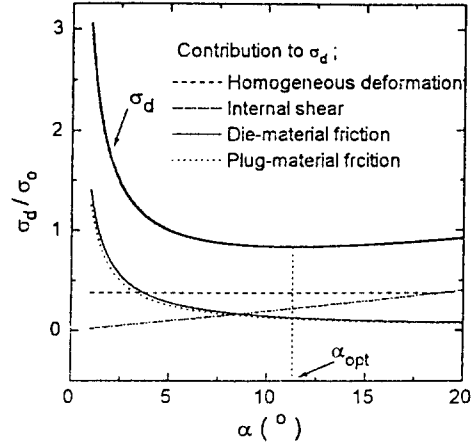


Fig. 4. Tube drawing stress σ_d as a function of semi-die angle α for $m = 0.01$. ($R_o=33.5\text{mm}$, $r_o=30\text{mm}$, $R_f=27\text{mm}$, $r_f=24\text{mm}$)

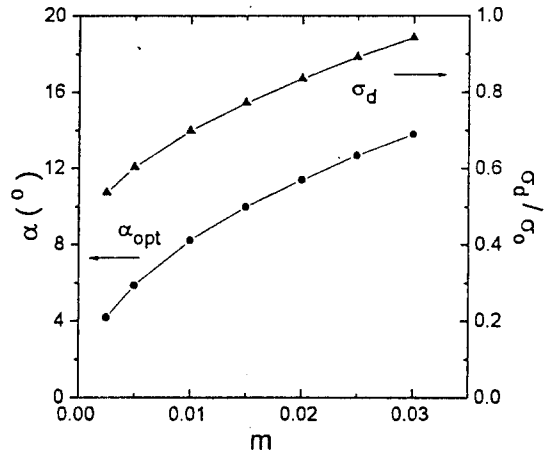


Fig. 5. Effect of friction factor on optimum semi die-angle α and drawing stress σ_d . ($R_o=33.5\text{mm}$, $r_o=30\text{mm}$, $R_f=27\text{mm}$, $r_f=24\text{mm}$)

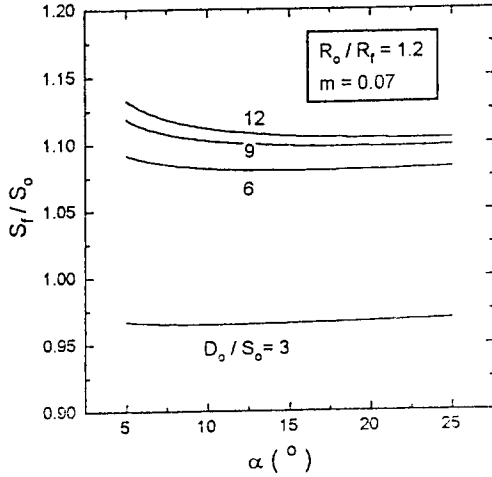


Fig. 6. Variation of wall thickness ratio, S_f/S_o , with die-semi angle α and initial tube dimension.

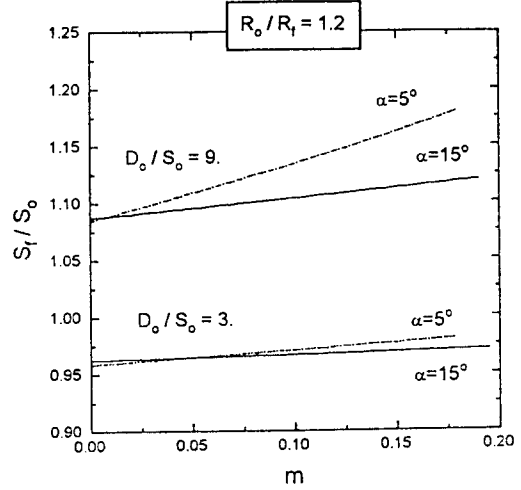


Fig. 7. Variation of wall thickness ratio, S_f/S_o , with friction factor in tube sinking.

3.2 싱킹(Sinking)

관의 싱킹의 경우에는 관의 내부에 플러그에 의한 구속이 없기 때문에 싱킹에서의 인발 응력 $\sigma_{d(sink)}$ 은 식 (27)에서 $\tau_i^{\beta} = 0$ 로 놓음으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_d = & \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} (1+y+y^2)^{1/2} \ln \frac{A_o}{A_f} \\ & + \frac{2\sigma_o}{3\sqrt{3}} \tan \alpha \left[\frac{R_o^2 + R_o r_o + r_o^2}{R_o(R_o + r_o)} + \frac{R_f^2 + R_f r_f + r_f^2}{R_f(R_f + r_f)} \right] \\ & + \frac{2\tau_i^{\alpha}}{\sin 2\alpha} \cdot \left[\frac{1}{1+t} \ln \frac{R_o + R_o t - R_f t + r_f}{R_f - r_f} + \frac{1}{1-t} \ln \frac{R_o + R_f t - R_o t - r_f}{R_f - r_f} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

주어진 R_o/R_f 과 마찰 인자에 있어서, 인발 응력을 최소로 하는 초기 관 두께에 대한 최종 관 두께의 비 S_f/S_o 는 식 (28)로부터 얻어진다. 관 두께비 S_f/S_o

는 D_o/S_o 가 증가함에 따라 증가하지만 다이 반각 α 에 대해서는 덜 민감하다. 여기서, $D_o (= 2R_o)$ 는 관의 초기 직경이다 (그림 6).

또한 주어진 α 와 R_o/R_f 값의 조건에서는, S_f/S_o 는 마찰 인자의 증가에 따라 증가하고 또한 그 증가 속도는 다이

반각 α 가 증가함에 따라 감소한다(그림 7). 이는 관 두께 비가 마찰의 증가에 따라 감소하는 Guo 등[2]에 의한 결과와는 다르다. 이는 속도 불연속면의 차이에서 발생한다. Guo 등은 속도 불연속면

을 축방향과 가변적인 각을 가지는 반면에 이 연구에서는 수직인 면을 사용했기 때문이다. 유한 요소 해석에 의하면 관 두께비는 마찰에 따라 마찰이 아주 적은 경우에는 증가하다가 다시 감소하는 모습을 보인다[8]. 그러나, 두 방법에 의한 해의 절대값은 큰 차이를 보이지는 않는다. 따라서 이 연구에서 얻어진 해도 유용하다.

4. 결론

1. 인발 응력을 최소로 하는 최적 다이 반각은 주로 내부 전단 변형과 마찰에 의해 결정된다.
2. 최적 다이 반각과 그 때의 인발 응력은 마찰 인자의 증가에 따라 증가한다.
3. R_o/R_f 과 마찰 인자가 주어진 관 싱킹에서, 관 두께비 S_f/S_o 는 D_o/S_o 의 증가에 따라 증가하나 다이 반각 α 에 대해서는 덜 민감하다.
4. 다이 반각 α 와 R_o/R_f 가 주어진 관 싱킹에서, S_f/S_o 는 마찰 계수의 증가에 따라 증가하고, 그 증가속도는 다이 반각의 증가에 따라 감소한다.

Acknowledgement

이 연구는 서울대학교 결정 성장 및 박막 가공 연구소를 통한 한국 과학 재단의 지원으로 이루어졌습니다.

References

[1] O.Hoffman and G.Shacs, *Introduction to the Theory of*

Plasticity for Engineers, McGraw-Hill, (1953) 187-193 and 252-256.

[2] N.C.Guo, Z.J.Luo and G.Cui, *Advanced Technology of plasticity - Proceedings of the Fourth International Conference on Technology of Plasticity*, (1993) 1023

[3] I.F.Collins and B.K.Williams, *Int.J.Mech. Sci.* 27 (1985) 225.

[4] J.Rasty and D.Chapman, *J. Mater. Engineering. and Performance.*, 14 (1992) 547

[5] K.Sawamiphakdi, G.D. Lahoti and P. K. Kropp, *J. of Mater. Processing Tech.*, 27 (1991) 179-190

[6] S.Urbanski, M.Packo, U.Stahllerg and H.Keife, *J. Mater. Processing Tech*, 32 (1992) 531

[7] J.M.Rigaut, J.Oudin and Y.Ravalard, *Numiform 89*, Thompson et al.(eds.) Balkema, Rotterdam (1989) 581

[8] K.-K.Um and D.N.Lee, unpublished result.

[9] K.-K.Um and D.N.Lee, *Proceedings of Fall meeting of Korea Society for Technology of Plasticity*, (1995) 76