기계 고장을 고려한 생산 및 품질검증 정책

이 창 환*

Abstract

This paper addresses the effects of an imperfect production process on the optimal production quantity and quality inspection policies. The system is assumed to deteriorate during the production process. The results are either defective products or machine breakdown. A simple rule has been suggested to determine whether multiple quality inspection is worth or not. Furthermore, when multiple inspection policy is adopted, the optimal inspection schedule is shown to be equally spaced throughout the production cycle. Exact solution and approximation of the optimal production quantity and approximation of the optimal number of inspection are provided. Finally, to better understand the model of this paper, comparisons between this model and classical EMQ model are provided.

1. 서론

최근 고전적 재고모형 (EMQ, EOQ)의 비현실적 가정을 보완한 연구가 활발히 진행되고 있다. [11, 19, 20]은 변수의 연속적 또는 비연속적 변동을 수용할 수 있는 재고모형을 분석하였으며, [2, 8, 12]는 학습곡선을 고려한 재고모형을 연구하였다. [14]는 JIT생산 방식의 준비 단축 (setup reduction)프로그램을 고려하여, 준비 시간을 의사결정 변수화 하였으며, [5,15]는 생산과정의 품질 향상 프로그램을 고려한 재고모형을 분석하였다. 본 논문은 이러한 연구 추세의 일환으로 생산과정의 불확실성을 고려한 EMQ모형을 분석하였다. 현실면에서 볼 때 생산과정은 여러 가지 불확실성을 지닐 수 있다. 예컨대 생산이 진행됨에 따라 불량품을 생산 할 수 있으며, 갑작스러운 기계 고장으로 생산이 중단 될 수 도 있다. [6,7]은 위에서 언급된 두 부류의 불확실성 중 기계 고장에 인한 생산 중단을 고려한 EMQ 모형의 생산정책을 분석하였으며, 반대로 [9, 10, 15,16, 17, 18]은 불량품을 생산하는 시스템의 경제적 생산량, 생산과정의 품질향상 및 품질검증 정책 등을 연구하였다. 본 연구는 위에서 서술한 두 가지 불확실성을 모두 지닌 생산시스템의 생산 및 품질검증 정책에 대해 알아 보았다.

2. 모형의 가정

부 재고의 가능성을 배제한다. 또한 생산 시스템은 단일 제품만을 취급하며, 수요 율 및 생산 율은 일정하며, 확정적이라 가정한다.

2.1. 불량품 생산에 관한 가정

생산 시스템은 준비작업을 거쳐 가동하기 시작하며, 규격에 적합한 제품을 생산한다. (상태 1 이라 지정한다.) 생산기간이 경과함에 따라 생산과정은 차츰 둔화 하여, 어느 시점에 이르러서는 일정 비율의 불량품을 제조하기 시작한다. (상태 2) 상태 2가 발생하는데 경과하는 시간은 지수 분포를 따른다. 기계 고장으로 생산 계획이 중단되지 않는 한 최대 $n \geq 1$회의 품질검증이 이루어 지며, 최종 품질검증은 목표 생산량이 달성된 시점에서 이루어 진다. 반대로 기계 고장으로 목표 생산량을 달성할 수 없을 경우에는 n 보다 적은 횟수의 품질검증이 이루어질 수 있으며, 최종 검증시기는 생산이 중단된 시점에서 이루어 진다. 품질검증 결과 상태2 가 감지될 경우 즉시 상태 1로 수정되며, 기계 고장으로 생산이 중단될 경우 또는 목표 생산량 달성이 있기 전까지는 생산이 계속 진행 된다.

2.2. 생산 중단에 관한 가정

본 모형에서 고려되는 두 번째 불확실성은 고장에 인한 생산 중단 (상태 3)이다. 2.1절에서 서술한 상태 2와 본 절에서 설명하는 상태 3은 각기 독립적 현상이다. 따라서 상태 3이 발생하기

* 아주대학교 경영학과

직전 생산과정은 상태 2에 있을 수 있으며, 또한 상태 1에 있을 수도 있다. 생산 기계는 상태 1에서 생산을 시작한다. 일정 기간이 경과 한 후 생산과정은 고장으로 계획 생산량에 미달된체 가동을 중단 (상태 3) 할 수 있다. 고장을 일으킨 기계는 즉시 보수 단계에 들어 가며, 차기 생산은 전기에 생산된 재고가 완전히 고갈된 후에야 시작된다. 상태 3이 발생하는데 경과하는 시간은 확률적이며, 지수 분포를 따른다.

3. 모형

모형에 사용되는 기호는 다음과 같다.

d, P, h, S, K: 수요율, 생산율, 재고비용율, 준비비용, 불량품 재가공비용

r,M: 상태 2, 3의 수정 비용

V: 1회 품질 검증 비용

Q: 계획 생산량

T_i: *i* 번째 품질 검증 시점, $\theta_i = T_{i+1} - T_i$:

τ, t : 상태 2, 3이 발생하는데 경과하는 시간

$g(\tau)$: τ의 밀도 함수, 평균 $1/\lambda_1$ 인 지수 분포

f(t): *t*의 밀도 함수, 평균 $1/\lambda_2$ 인 지수 분포

α : 상태 2에서의 불량률

λ: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, E^{-a}: $\mathrm{E}^{-a} = 1 - e^{-a}$

3.1. 총 비용 기대치의 일반형

본 절에서는 g, f 에 대한 특정 형식의 분포를 가정하지 않은 상태에서 총 비용의 기대치를 알아 본다. 총비용은 재고유지, 준비, 품질검증, 상태 2, 3의 수정 및 불량품 처리 비용으로 구성된다. 재고유지, 생산준비 및 상태 3의 보수비용의 기대치는 [6]에 따라 (1)이 된다.

$$\int_0^{\infty} E(\cos t\, per\, cycle\ 1\,|t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{Q/P} \left(S + M + \frac{1}{2} h(P-d) \frac{P}{d} t^2 \right) f(t)\, dt + \int_{Q/P}^{\infty} \left(S + \frac{1}{2} h \frac{(P-d)}{Pd} Q^2 \right) f(t)\, dt \qquad (1)$$

불량품 처리, 품질검증 및 수정비용은 다음과 같다.

$$\int_0^{\infty} E(\cos t\ \ per\, cycle\ 2\,|t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_{Q/P}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[K\alpha P \int_0^{\theta_k} (\theta_k - \tau) g(\tau) d\tau + r \int_0^{\theta_k} g(\tau) d\tau \right] f(t) dt$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left[K\alpha P \left(\sum_{k=0}^{j-1} \int_0^{\theta_k} (\theta_k - \tau) g(\tau)\, d\tau + \int_0^{t-T_j} \left(t - T_j - \tau\right) g(\tau)\, d\tau \right) + jV + r \left(\sum_{k=0}^{j-1} \int_0^{\theta_k} g(\tau) d\tau + \int_0^{t-T_j} g(\tau) d\tau \right) \right] f(t) dt \qquad (2)$$

다음으로 재고 주기의 기대치를 알아 본다. 재고 주기의 기대치는 [6]으로 부 터 얻을 수 있다.

$$\int_0^{\infty} E(Duration\ per\, cycle|t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{Q/P} \frac{P}{d} t\, f(t)\, dt + \int_{Q/P}^{\infty} (Q/d) f(t)\, dt \qquad (3)$$

따라서 기간 평균 비용의 기대치는 renewal reward이론에 근거하여 식 (4)와 같이 된다.

$$C(Q) = \frac{(1)+(2)}{(3)} \qquad (4)$$

3.2. 지수 분포 가정하에서의 기대 비용

명제 1은 g, f 의 분포를 지수 분포로 가정할 경우 최적생산기간 $\left(0, Q^*/P\right)$내의 기대비용을 최소화하는 품질검증 계획을 서술하였다.

명제 1. $\left(0, T_j\right)$내의 기대 비용을 최소화하는 품질검증 계획은 $K\alpha P - r\lambda_1 \le 0$ 경우 $T_1 = T_2 = \dots = T_{j-1} = 0$, T_j는 첫번 째 품질 검증 시점이 되며, $K\alpha P - r\lambda_1 > 0$ 경우 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{j-1} = \theta = T_j / j$ 가 된다. 따라서 $\left(0, Q^*/P\right)$내의 기대 비용을 최소화하는 품질검증 간격은 $\theta^* = Q^*/Pn$이 된다.

명제 1에서 서술된 첫번 째 조건은 상태 2에서 발생하는 불량품 처리 비용이 상태 2의 수정 비용 보다 적음을 뜻하며, 따라서 $T_1 = T_2 = \dots = T_{j-1} = 0$란 품질 검증을 하지 않은 체 불량품을 계속 생산하도록 방치한다는 뜻을 의미 한다. 명제 1 과 식 (4)에 따라 기간 평균 비용의 기대치는 다음과 같이 된다.

$K\alpha P - r\lambda_1 > 0$일 경우,

$$C(Q,n) = \frac{d\lambda_2}{P} \left(\frac{S}{\mathrm{E}^{-\lambda_2 \theta n}} + \frac{V e^{-\lambda_2 \theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2 \theta}} \right) + \frac{d\lambda_2 M}{P} + \frac{h(P-d)}{\lambda_2} \left\{ 1 - \frac{\lambda_2 \theta n e^{-\lambda_2 \theta n}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2 \theta n}} \right\} + K\alpha d + \frac{\mathrm{E}^{-\lambda \theta} \left(r\lambda_1 / P - K\alpha \right) d\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2 \theta} \lambda} \qquad (5)$$

$K\alpha P - r\lambda_1 \le 0$일 경우,

$$C(Q)=\frac{d\lambda_2\left(S+Ve^{-\lambda_2\theta}\right)}{P\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(1-\frac{\lambda_2\theta e^{-\lambda_2\theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}\right)+K\alpha d+\frac{\mathrm{E}^{-\lambda\theta}(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\lambda} \quad (6)$$

4. 최적 생산 정책

의사 결정자는 식 (6)에서 최적 생산량 Q^*, 식 (5)에서 Q^* 및 최적 품질 검증 횟수 n^*을 결정한다.

4.1. n=1 일 경우

$K\alpha P-r\lambda_1\le 0$을 가정한다. 식 (6)을 Q에 대해 미분하면, 최적 생산량 Q^*가 식(7)을 충족함을 알 수 있다.

$$\frac{-d\lambda_2(S+V)}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}\left(\lambda_2\theta-\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\right)+d\left(\frac{r\lambda_1}{P}-K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)=0 \quad (7)$$

명제 2는 최적 생산정책의 특성을 서술하였다.

명제 2.

(2.1) λ_1,λ_2가 아주 작을 경우 최적 생산량은 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$Q^*\cong\sqrt{\frac{2d(S+V)P}{h(P-d)+(K\alpha-r\lambda_1/P)d\lambda_1}} \quad (8)$$

(2.2) $\lambda_1,\lambda_2\downarrow 0\Rightarrow Q^*\to\sqrt{2d(S+V)P/h(P-d)}$, $C(Q)\to d(S+V)/Q+h(P-d)Q/2P$, EMQ모형과 일치한다.

(2.3) 최적 생산량을 도입한 비용함수는 다음과 같으며, $h(P-d)>(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_1$ 경우 Q^* 의 증가함수 이다.

$$C(Q^*)=\frac{h(p-d)Q^*}{P}+K\alpha d-\frac{(K\alpha P-r\lambda_1)d}{P}e^{-\lambda_1\theta^*}+\frac{d\lambda_2}{P}(M-V) \quad (9)$$

(2.4) $h(P-d)>(r\lambda_1/P-K\alpha)d\lambda_1$경우 Q^*는λ_1, λ_2의 증가함수, 추가로 $M\ge V$경우 $C(Q^*)$는 λ_2의 증가함수다.

4.2. n>1 일 경우

다음으로 $K\alpha P-r\lambda_1>0$를 가정한다 식 (5)를 Q에 대해 미분한 후 일련의 근사화 과정을 거치면 최적 생산량 $Q^*(n)$가 식 (10)을 충족함을 알 수 있다.

$$\frac{-d\lambda_2(S+nV)}{P}+\frac{h(P-d)}{\lambda_2}(\lambda_2\theta n-\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta n})+nd\left(\frac{r\lambda_1}{P}-K\alpha\right)\left(e^{-\lambda_1\theta}\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathrm{E}^{-\lambda\theta}\right)=0 \quad (10)$$

명제 3은 최적 생산과 품질검증정책을 서술한다.

명제 3:

(3.1) λ_1, λ_2가 아주 작을 경우 최적 생산량은 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$Q^*(n)=\sqrt{\frac{2d(S+nV)P}{h(P-d)+(K\alpha-r\lambda_1/P)d\lambda_1/n}} \quad (11)$$

(3.2) $\lambda_1,\lambda_2\downarrow 0\Rightarrow Q^*(n)\to\sqrt{2d(S+nV)P/h(P-d)}$, $C(Q,n)\to d(S+nV)/Q+h(P-d)Q/2P$, 고전적 경제적 생산량 모형과 일치 하게 된다.

(3.3) 최적 생산량을 도입한 비용 함수는 다음과 같으며, $C(Q^*,n)$는 $Q^*(n)$ 의 증가 함수 이다.

$$C(Q^*,n)=\frac{h(p-d)Q^*(n)}{P}+K\alpha d-\frac{(K\alpha P-r\lambda_1)d}{P}e^{-\lambda_1\theta^*}+\frac{d\lambda_2}{P}(M-V) \quad (12)$$

(3.4) $K\alpha P-2\lambda_1 r<0$일 경우 $C(Q^*,n)$, $Q^*(n)$는 λ_1의 증가 함수 이다. $Q^*(n)$는λ_2의 증가함수며, $M\ge V$일 경우 $C(Q^*,n)$는λ_2의 증가 함수이다.

(3.5) λ_1, λ_2가 아주 작을 경우 최적 품질 검증 횟수는 식 (13)으로 근사화 할 수 있다.

$$n^*\left(n^*-1\right)\le\frac{S(K\alpha-r\lambda_1/P)\lambda_1 d}{h(P-d)V}\le n^*\left(n^*+1\right) \quad (13)$$

5. 고전적 EMQ 모형과의 관계

본 절에서는 위에서 서술한 모형과 고전적 EMQ모형과의 관계를 알아 본다. $\tilde{Q}=Q/n$, $\theta=Q/P$, $\tilde{\theta}=\theta/n$로 정의한다. n에 대한 정수 제한이 주어지지 않으면 Q 와 $\tilde{Q}$는 독립적이므로, 식 (5)는 (5a)+(5b)로 구성 된다. $\Omega_1=h(P-d)$, $\Omega_2=d\lambda_1(r\lambda_1/P-K\alpha)$로 정의한다.

$$C(Q)=\frac{d\lambda_2}{P}\frac{S}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}+\frac{d\lambda_2 M}{P}+\frac{\Omega_1}{\lambda_2}\left\{1-\frac{\lambda_2\theta e^{-\lambda_2\theta}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}}\right\} \quad (5a)$$

테일러 근사치로 근사화 후 $\lambda_2\downarrow 0$를 적용하면 $\cong dS/Q+\Omega_1 Q/2P$가 된다. 따라서 이 부분은 고전적 EMQ모형의 비용식과 일치한다.

$$C(\tilde{Q}) = \frac{d\lambda_2}{P}\frac{Ve^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}} + K\alpha d + \frac{\mathrm{E}^{-\lambda\tilde{\theta}}\Omega_2\lambda_2}{\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}\lambda\lambda_1} \tag{5b}$$

테일러 근사치로 근사화한 후 $\lambda_2 \downarrow 0$를 적용하면$\cong dV/\tilde{Q} + \Omega_2\tilde{Q}/2P + r\lambda_1/P$가 된다. 이 부분은 품질검증, 불량품 처리 및 상태수정 비용과 관련된 부분으로 볼 수 있다. 식 (5a), (5b)를 Q와 $\tilde{Q}$에 대해 미분한 후 테일러 근사치로 근사화 하면 (5a.1)과 (5b.1)을 얻는다.

$$\frac{(\lambda_2)^2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\theta}}{\left(\mathrm{E}^{-\lambda_2\theta}\right)^2}\left(\frac{-dS}{P} + \frac{\Omega_1 Q^2}{2P^2}\right) = 0 \tag{5a.1}$$

$$\frac{(\lambda_2)^2}{P}\frac{e^{-\lambda_2\tilde{\theta}}}{\left(\mathrm{E}^{-\lambda_2\tilde{\theta}}\right)^2}\left(\frac{-dV}{P} + \frac{\Omega_2 \tilde{Q}^2}{2P^2}\right) = 0 \tag{5b.1}$$

식 (5a.1)로 부 터 EMQ모형의 경제적 생산량 $Q^*_{EMQ} = \sqrt{2dSP/\Omega_1} = Q^*$를 얻을 수 있으며, 식 (5b.1)로 부 터 $Q^* = \sqrt{2dVP/\Omega_2} = \tilde{Q}^*$를 얻을 수 있다. 따라서 $n^* = Q^*_{EMQ}/\tilde{Q}^* = \sqrt{S\Omega_2/V\Omega_1}$가 된다. 위에서 서술한 내용을은 점검해 본다. n^*에 대한 정수의 제한이 주어지지 않을 경우 식 (13)에서 주어진 조건은 $n^* = \sqrt{S\Omega_2/V\Omega_1}$이 된다. n^*을 (11)에 대입하면 $Q^*(n^*) = \sqrt{2dSP/\Omega_1} = Q^*_{EMQ}$의 관계가 성립된다.

6. 요약

본 연구에서는 불량품 생산 과 기계 고장을 일으키는 생산 시스템의 생산 및 품질 검증 정책을 분석하였다. 1회 이상의 품질 검증 필요성을 결정할 수 있는 법칙이 제시되었으며, 1회 이상의 품질 검증을 할 필요가 있을 경우에는 품질 검증간의 시간 간격이 일정하여야 한다는 점도 아울러 제시 되었다. 이 결과는 기계 고장의 가능성이 배제된 [9]의 모형과 일치한다. 최적 생산량과 근사치 및 최적 품질 검증 횟수의 근사치가 주어졌으며, 시스템의 안정성 (λ_1, λ_2의 크기)과 최적 생산량 및 최적 비용 함수의 관계가 분석 되었다. 또한 품질 검증 횟수에 대한 정수의 제한이 주어지지 않을 경우, 비용 함수는 고전적 EMQ모형과 일치하는 부분과 품질 검증, 불량품 처리 및 상태 수정 비용과 관련된 부분 등 독립된 두 부분으로 구성됨을 알 수 있었다.

參考文獻

[2] Chand, S., "Lot Sizes and Setup Frequency with Learning in Setups and Process Quality," *European Journal of Oper. Res.*, 42, 1989, 190-202.

[5] Fine, C.H., and Porteus, E., "Dynamic Process Improvement," *Oper. Res.*, 37, 1989, 580-591.

[6] Grenevelt, H., Pintelon, L., and Seidmann, A., "Production Lot Sizing with Machine Breakdown," *Manage-ment Sci.*, 38, 1992 a, 104-123.

[7] ______, ______, and ________, "Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks," *Oper. Res.*, 40, 1992 b, 959-971

[8] Karwan, K.R., Mazzola, J.B., and Morey, R.C., "Production Lot Sizing Under Setup and Worker Learning," *Naval Res. Logist.* 35, 1988, 615-624

[9] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "Simultaneous Determination of Pro-duction Cycle and Inspection Schedules in a Production System," *Management Sci.*, 33, 1987, 1125-1136.

[10] Lee, H.L, "Lot Sizing To reduce Capacity Utilization in A Production Process with Defective Items, Process Correction, and Rework," *Management Sci.*, 38, 1992, 1314-1328.

[11] Lev, B., and Weiss, H.J., "Inventory Models with Cost Change," *Oper. Res.*, 38, 1990, 53-63

[12] Muth, E. J., and Spremann, K., "Learning Effects in Economic Lot Sizing," *Management Sci.*, 29, 1983, 264-269

[14] Porteus, E., "Investing in Reduced Setups In EOQ Model," *Management Sci.*, 31, 1985, 720-726.

[15] Porteus, E., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction," *Oper. Res.*, 34, 1986, 137-144.

[16] Porteus, E., "The Impact of Inspection Delay on Process and Inspection Lot sizing," *Management Sci.* 36, 1990, 999-1007

[17] Rosenblatt, M.J., and Lee, H.L., "A Comparative Study of Continuous and Periodic Inspection Policies in Deteriorating Production Systems," *AIIE Trans.*, 18,1986 a, 2-9.

[18] ______ and _______, "Economic Production Cycle with Imperfect Production Process," *AIIE Trans.*, 18, 1986 b, 48-55.

[19] Weiss, H.J., and Rosenthal, E.C., "Optimal Ordering Policies When Anticipating a disruption in supply or demand," *European Journal of Oper. Res.*, 59, 1992, 370-382

[20] Yao, D., and Klein, M., "Lot Sizes Under Continuous Demand: The Back-order Case," *Naval Res. Logist.* 36, 1989, 615-624