퇴화하는 기계에서의 품질 불량을 고려한 최적 생산시간 결정
An Optimal Production Run Length in A Deteriorating Machine

김 창현
포스코 경영연구소/포항공대 산업공학과

홍 유신
포항공대 산업공학과

Abstract - This paper presents an EMQ model which determines an optimal production run length in a deteriorating machine. It is assumed that a machine is subject to a random deterioration from an in-control state to an out-of-control state with an arbitrary distribution and thus producing constant proportion of defective items. An average cost function and an optimal production run length are determined. A mistake in previous model is found and discussed. Numerical experiments are carried out to see the behavior of the proposed model depending on the cost factors as well as machine parameters, and some interesting behaviors are observed.

1. 서론

단일 기계로 구성된 배치 (batch) 생산 시스템 하에서의 경제적인 생산량 결정에 관한 여러 연구들이 과거 수많은 저자들에 의해 진행되어져 왔다. 그러나 운용되고 있는 생산시스템이 불완전한 경우의 경제적 생산량 결정에 관한 연구는 그다지 폭 넓게 진행되지 못했다. 이 주제에 대한 최근의 연구 방향을 살펴보면, 다음과 같이 크게 두 가지 내용으로 대별할 수 있다. 첫번째 방향은 생산 과정 도중의 어느 시점에 생산과정 자체에 불완전성이 존재하여 불량품을 생산하게 되고, 이에 따라 수율 또한 떨어지게 되는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이며, 두번째 방향은 생산시스템 그 자체의 불완전성으로 인하여 생산 과정 도중에 고장이 발생하여 이를 수리하여야만 다시 생산을 시작할 수 있는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이다.

첫번째 연구 방향에 대한 연구 결과로 Rosenblatt and Lee[6]는 고전적인 EMQ 모형을 확장하여 생산 과정이 진행됨에 따라 기계가 성능이 점차 퇴화하여 정상적인 가동상태 (in-control state) 에서 비정상적인 가동상태 (out-of-control state) 로 변하면, 생산 과정은 계속 진행되지만 일정 비율만큼 불량품을 생산한다고 가정할 때의 EMQ 모형을 발표하였다. 그들은 기계가 정상 상태로 가동하는 시간이 지수분포를 따를 때의 평균비용을 도출하였으며, 비용함수를 대략화(approximation)시켜 닫힌 형태 (closed form)의 해를 유도하여 최적 생산시간이 고전적인 EMQ 모형의 최적 생산시간보다 짧다는 것을 보여주었다. 그 후 이들[3]은 최적 생산량과 검사계획을 동시에 고려하는 모형을 발표하였는데, 기계가 지수 분포의 정상 가동상태의 간격을 가질 때, 기계의 비정상 가동상태를 검출하고자 하는 최적 검사계획은 등간격 (equally spaced period)을 가짐을 보여 주었다. 나아가 이들[4]은 비정상적으로 가동중인 기계의 복구비용이 비정상적인 가동상태로 부터 검사 후 수리하기까지의 지연시간에 비례하는 경우의 최적 생산계획 및 검사계획을 동시에 결정하는 모형을 발표하였다. Rahim[5]은 생산 공정의 정상 가동상태 간격이 고장율 증가함수인 일반분포를 가지며, 주기적인 샘플링 검사로 생산공정의 가동상태를 검사하는 경우에 최적 생산량과 검사계획 및 관리도 설계안을 동시에 결정하는 재고문제와 품질문제의 혼합 모형을 발표하였다.

두번째 연구 방향에 대한 연구 결과로는 Groenevelt et al.[2]이 기계가 불완전하여 고장이 일어날 수 있으며 지수분포의 수명을 가질 때, 수리시간을 필요로 하지 않을 경우에서의 EMQ 모형을 발표하여 고전적인 EMQ모형과는 다른 여러 특성들을 보여 주었다. 김 창현 등[1]은 Groenevelt et al.[2]의 모형을 일반화하여 기계 수명의 고장율이 단조적 형태의 고장율 함수를 갖거나 욕조형태의 고장율 함수를 갖는 일반분포

를 따를 때 경제적인 생산량 결정에 관한 문제를 제시하여, 기계의 수명분포에 따른 수리비용의 최적 생산량에 대한 영향도를 수리적으로 명시하였으며, 수리비용의 변화에 따른 최적 생산량의 대소관계 및 EMQ와의 관계에 대해서도 살펴보았다.

본 연구에서는 Rosenblatt and Lee[6]의 모형을 일반화하여 생산이 진행됨에 따라 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변하는 생산모형에서 기계가 정상 상태로 가동하는 시간이 랜덤하고, 임의의 일반분포를 따를 때 평균비용을 최소화하는 최적 생산시간을 결정하는 모형을 제시하였다.

2. 수리모형

본 논문에 제시된 수리모형은 고전적인 EMQ 모형을 기본으로 하여 아래와 같은 가정하에서 개발되었다.
- 기계는 생산과정이 진행됨에 따라 퇴화할 수 있으며, 기계가 퇴화되면 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변한다.
- 매 주기마다 생산 개시 초기에는 정상 가동상태에서 100% 양품만을 생산하며, 만일 기계가 비정상 가동상태로 변하면 전체 로트가 생산될 때 까지 기계의 상태는 비정상가동상태로 있으면서 일정 비율 만큼의 불량품을 생산한다.
- 생산 개시 후 생산 공정이 정상 상태로 가동하는 시간은 랜덤하며, 이것의 분포는 임의의 일반분포를 따르며 평균과 분산은 유한하다.
- 모든 불량품은 생산이 끝난 후에야 검출할 수 있다.

수리모형의 개발에 앞서 이에 필요한 기계의 특성치를 포함한 관련 모수 및 비용치들을 아래와 같이 정의한다.

d: 수요율 (개/시간)
p: 생산율 (개/시간)
h: 재고 보유비용(원/시간/개)
K: 생산 준비비용(원)
T: 생산로트에 대한 생산 주기시간
t: 실제 로트 생산시간, $tp=Td$
s: 불량품 생산에 따른 단위 손실비용 (원/개)
α: 비정상 가동상태에서의 불량품 생산비율
X: 기계가 정상 상태로 가동하는 시간, $X \sim f(x)$
$f(x)$: 기계가 정상 상태로 가동하는 시간의 확률 밀도 함수

위의 정의에서 불량품 생산에 따른 단위 손실비용 s 는 재작업, 수리, 교환 또는 고객으로 부터의 신의 상실비용 등을 포함한 개념이다.

각 생산시간동안 발생된 불량품의 갯수 N 및 N 의 기대치 $E(N)$은 정상 상태로 가동하는 시간 X 에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$N = \begin{cases} 0 & \text{if } X \geq t. \\ \alpha p(t-X) & \text{if } X < t. \end{cases}$$

$$E(N) = \int_0 \alpha p(t-x)f(x)dx$$

따라서, 생산 준비비용, 재고 보유비용 및 불량품 생산에 따른 비용을 고려한 단위시간당 비용을 $C(t)$ 라 하면, $C(t)$ 는 식 (1)과 같이 나타낼수 있다.

$$C(t) = \frac{Kd}{pt} + \frac{h}{2}(p-d)t + \frac{s\alpha d}{t}\int_0^t (t-x)f(x)dx \quad (1)$$

위의 수리모형에서 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 생산시간 t^* 를 구하기 위하여 Leibnitz 법칙을 적용하여 식 (1)을 미분하여 $C(t)$의 일차 도함수를 구하면

$$C'(t) = -\frac{Kd}{pt^2} + \frac{h}{2}(p-d) + \frac{s\alpha d}{t^2}\int_0^t xf(x)dx$$

와 같이 주어진다. $q(t) = C'(t)/t^2$ 라 정의하면

$$q(t) = -\frac{Kd}{p} + \frac{h}{2}(p-d)t^2 + s\alpha d\int_0^t xf(x)dx \quad (2)$$

함수 $q(t)$의 극한값을 살펴보면

$$\lim_{t\to 0^+} q(t) = -\frac{Kd}{p} < 0, \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = \infty > 0 \quad (3)$$

가 되어, $q(t)=0$ 를 만족하는 t 가 적어도 한 개는 존재하므로 $C'(t)=0$ 를 만족하는해 역시 한 개 이상 존재함을 알수 있으며 그 해가 유일함은 쉽게 증명될수 있다.

[정리 1] (최적 생산시간의 유일성)
$C'(t)=0$ 을 만족하는 최적 생산시간 t^* 는 유일하며, 그 때의 비용함수의 값은 아래의 식과 같이 주어진다.

$$C(t^*) = h(p-d)t^* + s\alpha d\int_0^{t^*} f(x)dx \quad (4) \quad ■$$

[정리 1]에서 $q(t)=0$ 을 만족하는 최적생산량 t^* 는 closed 형태로는 나타낼 수 없으나, Newton Raphson 방법과 같은 수치적 방법으로 간단히 구할 수 있으며, [정리 1]의 증명 과정에서 불량품 생산비용 s 와 불량품 생산비율 α 가

커짐에 따라 최적 생산시간 t^*가 작아진다는 것을 보일 수 있다.

[정리 2] (본 모형과 고전 EMQ모형에서의 최적 생산시간 비교)
본 모형에서의 최적 생산시간은 기계의 정상 가동시간의 분포 형태와는 관계없이 고전적인 EMQ 모형의 최적 생산시간보다 항상 짧다. ■

[정리 3] (서로 다른 두 정상 가동시간 분포와 최적 생산시간과의 관계)
서로 다른 정상 가동시간 X, Y 의 임의의 확률 밀도함수를 $f(x)$, $g(y)$ 라 하고 그때의 최적 생산 시간을 각각 t_1^*, t_2^* 라 할 때, 모든 t 에 대하여 $\int_0^t xf(x)dx \geq \int_0^t yg(y)dy$ 와 같은 추계적 우위(stochastic dominance)관계가 성립하면 $t_1^* \leq t_2^*$ 이 성립한다. ■

$f(x)$가 지수분포의 확률 밀도함수라 할때 $\int_0^t xf(x)dx$ 항을 Rosenblatt and Lee[6]의 모형에서와 같이 Maclaurin 급수로 대략화하면 $\int_0^t xf(x)dx \approx \frac{1}{2}\mu t^2$ 가 되어 추계적 우위관계가 성립하지만, $\int_0^t xf(x)dx$ 는 추계적 우위관계가 성립하지 않는다. 따라서, 정상 가동시간이 모수 μ 인 지수분포를 따를 때, 최적 생산시간은 μ 에 대하여 단조 감소한다는 Rosenblatt and Lee[6]의 결과는 옳지않음을 알수 있다.

Rosenblatt and Lee[6]의 근사해를 t_{approx}^*, 본 모형의 최적해를 t_{const}^* 라 두면 $t_{const}^* > t_{approx}^*$ 인 관계가 성립됨을 쉽게 증명할수 있다.

3. 수치실험

본 수치실험에서는 근사해와 최적해와의 비교 및 분석을 용이하게 하기 위하여 기계의 정상 가동시간이 모수 μ 인 지수분포를 따른다는 가정하에 실험을 수행하였다.

[표 1]은 p=40, d=30, h=0.1, s=10, α=0.05 일 때 Rosenblatt and Lee[6]의 모형과 본 논문에서 제안된 모형의 최적 생산시간과 그 때의 최소 단위시간당 비용을 보여주고 있다. [표 1]을 살펴보면 최적해와 근사해의 차이가 K의 값이 커짐에 따라 급격히 증가하는 것을 볼 수 있다. 이러한 실험 결과로부터 Rosenblatt and Lee[6]의 근사해는 본 모형에서의 최적 생산시간으로 이용하기에는 적합치 못함을 알수 있다. 반면에 단위시간당 최소비용에 있어서는 생산시간의 차이 만큼은 크지않다. 이러한 현상에 대하여 Rosenblatt and Lee[6]는 그들의 모형이 Robust하기 때문이라고 주장하고 있으나, 이는 본 모형의 비용함수 형태가 고전적인 EMQ 모형에서 볼수 있는 바와 같이 비용 최소점 부근에서는 생산시간에 대하여 매우 둔감할 정도로 비용곡선이 완만하기 때문이다. 이와 같이 최적해와 근사해의 생산시간 즉, 로트 크기가 차이가 커지게 되면 단위시간당 비용은 큰 차이가 없을지라도 재고유지에 필요한 저장 공간이나 AS/RS와 같은 저장 설비, 운영 요원에 대한 관리 및 예측 등 투자비와 운영비를 추정하는데 있어서는 큰 영향을 줄수 있다.

[표 2]는 K=30, p=40, d=35, h=0.1, s=1, α=0.05 일 때 모수 μ 의 변화에 따른 생산시간의 최적해와 근사해의 변화를 살펴본 결과이다. 근사해에서는 [정리 3]과 같은 추계적 우위관계가 항상 성립하기 때문에 μ가 증가함에 따라 최적 생산시간이 단조 감소함을 볼수 있지만, 본모형에서는 μ가 증가함에 따라 최적 생산시간이 감소하다가 증가하는 현상을 볼때 Rosenblatt and Lee[6]의 결과에 오류가 있음을 알수 있다.

4.요약 및 추후 연구방향

본 논문에서는 기계가 불완전하여 가동중에 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변할 수 있으며, 비정상 가동상태로 변하게 되면 일정 비율의 불량품을 생산하는 생산모형에 있어서 최적 생산시간을 결정하는 방안을 제시하였다. 지금까지 기존의 연구 결과[6]에서는 기계의 정상 가동시간이 지수분포를 가질 경우 비용함수를 대략화하여 최적 생산시간의 근사해를 제시하였으나, 본 연구에서는 정상 가동시간이 임의의 일반 분포를 가질때, 비정상 가동시간이 경과함에 따라 불량품 생산비율이 일정한 경우의 생산 모형을 분석하여 최적 생산시간 및 최소 비용을 구하였다. 특히 기존의 대표적인 연구인 Rosenblatt and Lee[6]가 비용함수를 대략화함으로써 발생된 최적 생산시간의 근사해의 오류 및 문제점을 발견하였으며, 수치실험을 통하여 그들의 오류를 확인하였다.

추후 연구방향으로서 본 모형을 확장하여 기계가 비정상 상태가 된 후 가동시간이 경과함에 따라 불량품의 발생율이 선형 또는 지수형으로

증가하는 경우와 함께 기계의 다양한 수명분포, 수리시간 및 품질 불량의 형태 등을 포함하여 연속적인 관찰을 통한 기계상태의 변화 등을 인지할 수 있는 경우 등과 같이 현실성있는 모형으로 확장하기 위한 연구가 저자들에 의해 진행되고 있다.

참고문헌

[1] 김 창현, 홍 유신, 김 수영, "불완전한 기계에서의 경제적 생산량 결정(II)", 게재예정,대한산업공학회, 1996

[2] Groenevelt, H., Pintelon, L., and Seidmann, A., "Production Lot Sizing with Machine Breakdowns", Management Science, Vol.38, No.1, pp.104-123, Jan. 1992

[3] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules In a Production System", Management Science, Vol.33, No.9, pp.1125-1136, Sep. 1987

[4] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "A Production and Maintenance Planning Model with Restoration Cost Dependent on Detection Delay", IIE Transactions, Vol.21, No.4, pp.368-375, 1989

[5] Rahim, M.A., "Joint Determination of Production Quantity, Inspection Schedule, and Control Chart Design", IIE Transactions, Vol.26, No.6, pp.2-11, 1994

[6] Rosenblatt, M.J., and Lee, H.L., "Economic Production Cycles with Imperfect Production Processes", IIE Transactions, Vol.18, No.1, pp.48-55, 1986

[표 1] 모형별 최적 생산시간 및 최소비용

μ	K	t^*_{const} / $C(t^*_{const})$	t^*_{approx} / $C(t^*_{approx})$	ratio
0.1	10	2.57	2.45	4.80
		5.98	5.98	-0.11
	20	3.71	3.46	6.71
		8.37	8.38	-0.22
	30	4.62	4.24	8.15
		10.17	10.20	-0.32
	40	5.40	4.90	9.34
		11.67	11.71	-0.42
	50	6.11	5.48	10.36
		12.97	13.04	-0.52

주. $\text{ratio} = \frac{(const)-(approx)}{(const)} \times 100(\%)$

[표 2] 모수 μ의 변화에 따른 최적 생산시간

μ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
t^*_{const}	9.65	9.39	9.28	9.26	9.28	9.33
t^*_{approx}	9.45	8.82	8.30	7.86	7.48	7.16
ratio	2.08	6.42	11.82	17.77	24.02	30.38

주. $\text{ratio} = \frac{(const)-(approx)}{(const)} \times 100(\%)$