혼합 관측중단하에서 와이블 수명분포에 대한 신뢰도 합격판정 샘플링 계획의 개발

Development and Sensitivity Analysis of Weibull Acceptance Sampling Plans under Hybrid Censoring

변은신
LG-EDS 품질경영팀

염봉진
한국과학기술원 산업공학과

ABSTRACT

수명시험에서는 시험기간을 단축하기 위해 중도절단(censoring)방법을 사용한다. 혼합 관측중단방법은 정시에 시험을 끝낼 수 있으며 고장시간을 관찰할 필요가 없다는 장점 때문에 널리 사용되고 있다. 본 논문에서는 제품의 수명이 와이블분포를 따르고 형상모수를 알고 있다는 가정아래, 혼합 관측중단하에서 생산자 위험과 소비자 위험을 고려한 신뢰도 합격판정 샘플링 계획을 개발하였다. 아울러, 형상모수값에 개재된 불확실성이 실제 생산자 위험과 소비자 위험, 그리고 의사결정까지의 평균 고장개수에 미치는 영향을 민감도 분석을 통해 파악하였다.

I. 서 론

관심있는 품질특성치가 수명인 경우 로트(Lot)의 합격 여부를 판정하기 위하여 수명시험 데이타에 근거한 신뢰도 합격 판정 샘플링 검사를 실시한다. 이때 수명시험 데이타는 시험시간을 단축하기 위해 일반적으로 중도절단된 상태로 얻는다. 중도절단 방법으로는 정시에 시험을 끝낼 수 있으며 고장시간을 관찰할 필요가 없다는 장점 때문에 혼합 관측중단방법이 널리 사용되고 있다.

Epstein([1])은 혼합 관측중단방법하에서 수명이 지수분포를 따른다는 가정아래 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획을 개발하였다. 그러나, 지수분포는 일정 고장률(constant failure rate)을 가정하기 때문에 실제로 고장률이 증가하거나 감소하는 기계나 전자부품의 수명분포를 나타내기에는 적합하지 않다. 이러한 상황을 적절히 묘사하는 수명분포로서 와이블분포가 있는데, 와이블 분포를 가정한 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획으로는 미국방성 TR시리즈([2],[3],[4])가 있다. 이 시리즈에서는 혼합 관측중단을 하는 경우 형상모수를 알고 있다고 가정하고 소비자 위험률만을 고려하여 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획을 개발하였다.

본 연구에서는 미국방성 TR시리즈가 소비자 위험률만을 고려하고 있는데 반하여 생산자 위험도 고려한 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획을 개발하였다. 또한, 형상모수값에 개재된 불확실성이 실제 생산자 위험과 소비자 위험 그리고 평균 고장개수에 어떠한 영향을 미치는가에 대한 민감도 분석을 수행하였다.

II. 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획의 개발

2.1 기호및 가정

2.1.1 기호

- θ : 척도모수
- θ_0 : 귀무가설에서 제시된 척도모수의 값
- θ_1 : 대립가설에서 제시된 척도모수의 값
- α : 생산자 위험(제 1 종 오류)
- β : 소비자 위험(제 2 종 오류)
- k : 형상모수
- n : 표본크기
- r : 혼합 관측중단 방법에서 미리 규정된 고장개수
- X : 수명시간을 나타내는 확률변수
- x : 관찰된 수명시간
- Y : 로트(lot)에 대한 합격여부를 결정하기 직전까지의 고장개수
- T : 혼합 관측중단방법에서 미리 규정된 중도절단시간
- δ : (실제 형상모수의 값-가정한 형상모수의 값)/가정한 형상모수의 값
- $R(t)$: 시간 t까지 고장나지 않을 확률(신뢰도)
- $E_\theta(Y)$: 척도모수값이 θ일 때 Y의 기대치
- $L(\theta)$: θ의 검사특성함수
- $B(i;m,p)$,: 모수 m,p를 갖는 이항분포에서 i개가 고장날 확률
- pdf : 확률밀도함수

시간에 관련된 변수들(예,θ,x) 중 프라임(prime)이 붙은 것은 표준화되지 않은 원래의 척도를 나타낸다.

2.1.2 가정

본 연구 전체를 통하여 다음과 같이 가정한다.

1. 부품의 수명이 (2.1)과 같은 와이블분포를 따른다.

$$f(x';\theta',k) = \left(\frac{k}{\theta'}\right)\left(\frac{x'}{\theta'}\right)^{k-1} \times \exp\left(-\left(\frac{x'}{\theta'}\right)^{k}\right),\ x'>0 \quad (2.1)$$

단, θ'와 k는 각각 척도모수와 형상모수이다.

2. 각 부품의 수명은 서로 독립이다.
3. 고장난 부품은 다시 교체하지 않는다.

2.2 혼합 관측중단하에서의 수명시험 방법

n개의 부품을 무작위로 선정하여 미리 정해진 시간(T')이 되거나 r번째의 고장이 발생될 때 까지 시험을 계속한다.

2.3 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획

신뢰도 합격 판정 샘플링 검사에서 합격 판정은 다음과 같은 가설검정 형태로 나타낼 수 있다.

$$H_0:\ \theta'=\theta_0',\quad H_1:\ \theta'=\theta_1',\quad \theta_1'<\theta_0' \quad (2.2)$$

여기서, θ_0'와 θ_1'은 실험자에 의해 정해진 양의 상수이다. (2.2)의 가설은 θ'와 중도절단시간 T'를 (2.3)과 같이 표준화 해 줌으로써 (2.4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\theta = \theta' / \theta_0',\quad T = T' / \theta_0' \quad (2.3)$$

$$H_0:\ \theta=1,\ H_1:\ \theta=\theta_1\ (<1) \quad (2.4)$$

단, $\theta_1 = \theta_1' / \theta_0'$이다.

이때, 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획은 다음 조건을 만족하는 표본크기 n과 고장개수 r을 구하는 것이다.

$$\Pr(\ H_0 \text{ 채택} \mid \theta = 1\ ) = 1-\alpha \quad (2.5)$$

$$\Pr(\ H_0 \text{ 채택} \mid \theta = \theta_1\ ) = \beta \quad (2.6)$$

혼합 관측중단하에서의 수명시험에서 제품이 T 전에 고장날 확률은 $P_\theta = 1-\exp\left\{-\left(\frac{T}{\theta}\right)^k\right\}$로 주어지므로 T전에 i개의 고장이 발생할 확률은 이항 분포로부터 다음과 같이 얻을 수 있다([1]).

$$\Pr(\ Y=i \mid \theta,\ k) = \binom{n}{i} P_\theta^i (1-P_\theta)^{n-i}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ r-1 \quad (2.7)$$

$$\Pr(\ Y=r \mid \theta,\ k) = 1-\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i} P_\theta^i (1-P_\theta)^{n-i} \quad (2.8)$$

(2.7)과 (2.8)로 부터 검사특성함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \Pr(H_0 \text{ 채택} \mid \theta) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta}\right)^k\right]\right\}^i \times\left\{\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta}\right)^k\right]\right\}^{n-i} \end{aligned}$$

그러므로 (2.5)와 (2.6) 두 조건을 만족하는 n과 r은 다음과 같은 (2.9)와 (2.10)식으로 부터 구한다.

$$\begin{aligned} L(1) &= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\{1-\exp[-T^k]\}^i\{\exp[-T^k]\}^{n-i} \\ &= 1-\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} L(\theta_1) &= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^k\right]\right\}^i \times\left\{\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^k\right]\right\}^{n-i} \\ &= \beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

위의 방정식 (2.9)와 (2.10)에서 n과 r은 이산적이므로 1-α와 β를 정확히 만족하는 n과 r을 구하는 것이 불가능하다. 따라서 $L(1) \ge 1-\alpha$와 $L(\theta_1) \le \beta$를 만족하는 최소의 n과 r을 구하도록 한다. 이러한 n과 r은 n을 1부터 증가시키고, 각 n에서 r또한 1부터 증가시켜 가면서 $L(1) \ge 1-\alpha$, $L(\theta_1) \le \beta$를 만족하는 것을 찾았다.

이와 같이 개발한 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획을 다음과 같은 모수들의 조합에 대해 표2.1에 제시하였다.

α = 0.05, 0.10, β = 0.05, 0.10,
T = 1/3, 1/5, 1/10, 1/20,
θ_1 = 2/3, 1/2, 1/5, 1/10,
k = 2.

2.4 검정력과 평균고장개수

로트를 기각할 확률인 검정력은 1- $L(\theta)$로 주어진다. 평균 고장 개수는 (2.11)과 같이 주어지며, n, T, r이 주어졌을 때 이항분포표로부터 쉽게 구할 수 있다([1]).

$$\begin{aligned} E_\theta(Y) &= \sum_{i=0}^{r} i\ \Pr(Y=i \mid \theta) \\ &= nP_\theta\sum_{i=0}^{r-2}B(i\ ;\ n-1, P_\theta) + r\left\{1-\sum_{i=0}^{r-1}B(i\ ;\ n,\ P_\theta)\right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

III. 형상모수의 변화에 대한 민감도 분석 결과

형상모수가 가정된 값에서 벗어났을 때 (2.9)의 생산자 위험, (2.10)의 소비자 위험, 그리고 (2.11)의 평균 고장개수의 값이 변하게 된다. 가정된 형상모수의 값이 k에서 Δk 만큼 벗어났을 때 실제 생산자 위험과 소비자 위험의 값은 다음과 같다.

$$1-L(1) = 1-\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\{1-\exp[-T^{k+\Delta k}]\}^i \times\{\exp[-T^{k+\Delta k}]\}^{n-i}$$

$$L(\theta_1) = \sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^{k+\Delta k}\right]\right\}^i \times\left\{\exp\left[-\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^{k+\Delta k}\right]\right\}^{n-i}$$

또한 실제 평균 고장개수는 다음과 같다.

<표2.1 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획>

k	$\theta_1 = \theta_1'/\theta_0$	$T = T'/\theta_0'$ 1/3	1/5	1/10	1/20
2.0		α=0.05 β=0.05			
	2/3	18[1] 111[2]	18 292	17 1089	17 4329
	1/2	7 30	7 78	7 300	7 1188
	1/5	2 3	2 6	2 20	2 77
	1/10	2 2	1 1	1 3	1 12
		α=0.05 β=0.10			
	2/3	15 88	14 218	14 850	14 3377
	1/2	6 24	6 61	6 235	6 930
	1/5	2 3	2 5	2 17	2 63
	1/10	2 2	1 1	1 3	1 10
		α=0.10 β=0.05			
	2/3	14 90	14 237	14 916	13 3463
	1/2	5 23	5 60	5 231	5 918
	1/5	2 3	2 6	2 20	2 77
	1/10	2 2	1 1	1 3	1 12
		α=0.10 β=0.10			
	2/3	11 67	11 177	11 690	11 2744
	1/2	4 17	4 44	4 169	4 670
	1/5	2 3	2 5	1 10	1 37
	1/10	2 2	1 1	1 3	1 10

1) 중도 절단 고장개수(r)   2)표본개수(n)

$$E_\theta(Y) = nP_\theta \sum_{i=0}^{r-2} B(i\,;\, n-1, P_\theta) + r\left\{1-\sum_{i=0}^{r-1} B(i\,;\, n,\ P_\theta)\right\}$$

단, P_θ는 $1-\exp[-(T/\ \theta)^{k+\Delta k}]$.

이때, 생산자 위험, 소비자 위험, 평균고장개수의 변화는 다음과 같다.

$\Delta\alpha$ = 실제 형상모수하에서 생산자 위험 − 가정된 형상모수하에서 생산자 위험,

$\Delta\beta$ = 실제 형상모수하에서 소비자 위험 − 가정된 형상모수하에서 소비자 위험,

$\Delta E_\theta(Y)$ = 실제 형상모수하에서 평균 고장개수 − 가정된 형상모수하에서 평균 고장개수.

형상모수가 가정된 값에서 -30%, -10%, 10%, 30% 벗어났을 경우에 대한 전산실험을 다음과 같은 조건하에서 실시하여 그 계산 결과를 표 3.1에 제시하였다.

α = 0.05, β = 0.05, 0.10,

T = 1/3, 1/20, θ_1 = 2/3, 1/10,

k = 0.5, 2.

표 3.1에서 형상모수가 변했을 때 α, β, $E_\theta(Y)$의 변화에 대한 경향을 표3.2-3.4에 나타내었다. 이와같은 경향은 형상모수가 변하면 신뢰도 ($R_\theta(T) = \exp[-(T/\theta)^k]$)가 변하고, 이러한 신

<표3.1 민감도 분석결과 >

k	α, β	T / θ_1 \ δ	1/3 -30%	1/3 -10%	1/3 10%	1/3 30%	1/20 -30%	1/20 -10%	1/20 10%	1/20 30%
0.5	α=0.05 β=0.05	2/3	.7977[1] -.0481[2] 19.4764[3] .2667[4]	.1703 -.0361 9.3108 .2099	-.0436 .0917 -10.0525 -.6649	-.0496 .4766 -29.7802 -5.1892	.9510 -.0499 24.0186 .3275	.7282 -.0498 22.0572 .3273	-.0489 .6374 -30.4020 -9.8349	-.0490 .9501 -81.5688 -60.9366
		1/10	.0563 .0819 .8517 -.1279	.0144 .0193 .2811 -.0281	-.0110 -.0416 -.2766 .0182	-.0253 -.0492 -.8129 .0358	.2585 -.0264 2.0787 .0432	.0493 -.0107 .6704 .0180	-.0259 .0130 -.6156 -.0224	-.0437 .0466 -1.6611 -.0833
	α=0.05 β=0.10	2/3	.7231 -.0923 16.9431 .5176	.1439 -.0614 7.5828 .3686	-.0416 .1191 -8.0772 -.8953	-.0492 .4968 -23.9403 -5.4361	.9500 -.0983 2.2875 .6483	.6434 -.0977 18.6198 .6462	-.0499 .6298 -23.9605 -9.5113	-.0500 .9017 -64.3375 -50.0000
		1/10	.0471 .1101 .7509 -.1770	.0121 .0284 .2472 -.0425	-.0093 -.0211 -.2428 .0299	-.0217 -.0460 -.7130 .0632	.2186 -.0413 1.7823 .0694	.0420 -.0160 .5675 .0276	-.0228 .0185 -.5184 -.0328	-.0395 .0269 -1.3967 -.1159
2.0	α=0.05 β=0.05	2/3	.7869 -.0490 5.9281 .1070	.1423 -.0392 2.4195 .0882	-.0357 .1075 -2.1612 -.2918	-.0417 .5279 -5.4286 -2.0348	.9510 -.0499 6.2485 .1144	.7077 -.0499 5.5442 .1144	-.0489 .6633 -4.8111 -3.0096	-.0490 .9501 -8.9584 -11.7417
		1/10	.0263 .0090 .1763 -.0090	.0056 .0003 .0482 -.0003	-.0038 .0000 -.0397 .0000	-.0079 .0000 -.0986 .0000	.1360 -.0392 .1360 .0392	.0236 -.0179 .0236 .0179	-.0132 .0236 -.0132 -.0236	-.0246 .0884 -.0246 -.0884
	α=0.05 β=0.10	2/3	.7052 -.0972 5.1248 .2147	.1189 -.0692 1.9405 .1601	-.0335 .1393 -1.7125 -.3900	-.0407 .5437 -4.3015 -2.1019	.9514 -.1000 5.6173 .2306	.6200 -.0998 4.6662 .2304	-.0482 .6535 -3.7487 -2.9025	-.0486 .9000 -6.9839 -9.7567
		1/10	.0263 .0090 .1763 -.0090	.0056 .0003 .0482 -.0003	-.0038 .0000 -.0397 .0000	-.0079 .0000 -.0986 .0000	.1153 -.0595 .1032 .2974	.0198 -.0255 .0172 .0969	-.0111 .0314 -.0094 -.0875	-.0206 .1101 -.0172 -.2266

1) $\Delta\alpha$ 2) $\Delta\beta$ 3) $\Delta E_{\theta_0}(Y)$ 4) $\Delta E_{\theta_1}(Y)$

<표3.2 형상모수가 변할 때 α의변화 >

Δk	$\Delta\alpha$
$\Delta k>0$	$\Delta\alpha<0$
$\Delta k<0$	$\Delta\alpha>0$

<표3.3 형상모수가 변할 때 β의 변화 >

Δk \ T/θ_1	$(T/\theta_1)<1$	$(T/\theta_1)>1$
$\Delta k>0$	$\Delta\beta>0$	$\Delta\beta<0$
$\Delta k<0$	$\Delta\beta<0$	$\Delta\beta>0$

<표3.4 형상모수가 변할 때 $E_\theta(Y)$의 변화 >

Δk \ T/θ	$(T/\theta)<1$	$(T/\theta)>1$
$\Delta k>0$	$\Delta E_\theta(Y)<0$	$\Delta E_\theta(Y)>0$
$\Delta k<0$	$\Delta E_\theta(Y)>0$	$\Delta E_\theta(Y)<0$

뢰도의 변화가 α,β, $E_\theta(Y)$에 영향을 미치기 때문이다(식 2.9, 2.10, 2.11 참조).

또한, 표3.1에서 모수 θ_1, T, 가정된 형상모수 k, 명목 생산자 위험, 소비자 위험에 따른 α, β의 변화정도를 살펴보면 다음과 같다.

- θ_1이 클수록 α,β는 형상모수의 변화(Δk)에 민감하다. θ_1이 크다는 것은 귀무가설의 θ_0와 대립가설의 θ_1의 차이가 크지 않다는 것으로 $\Delta k<0$인 경우에도 θ_1이 클수록 생산자 위험은 급격히 증가한다. 이때 소비자 위험은 감소하긴 하지만 그 폭이 미미하다. $\Delta k>0$인 경우는 반대로 소비자 위험이 크게 증가한다. 이때도 생산자 위험은 감소하긴 하지만 감소폭이 매우 작다. 평균 고장개수 역시 θ_1이 클수록 민감하다. $\Delta k<0$일 때 $E_\theta(Y)$는 θ_1이 큰 값일수록 큰 증가폭을 보였으며, $\Delta k>0$일 때도 θ_1이 작을 때보다 클 때가 더 큰 감소폭을 보였다.
- T 역시 θ_1와 마찬가지로 민감도에 큰 영향을 미친다. T 가 작을수록 형상모수의 값이 변했을 때 생산자 위험, 소비자 위험, 평균 고장개수의 변화가 심하다. T 가 작은 값일 때, 실제 형상모수의 값이 가정된 값보다 작을수록 ($\Delta k<0$) 생산자 위험은 급격히 증가한다. 이때 소비자 위험은 감소하긴 하나 그 폭이 적다. 실제 형상모수의 값이 가정된 값보다 클 때는 소비자 위험이 급격히 증가한다. 평균 고장개수도 T 에 민감한데 $\Delta k<0$일 때 T 가 작을수록 그 증가폭이 크며 $\Delta k>0$일 때 감소폭이 크다.
- 가정된 형상모수가 클수록 α,β, $E_\theta(Y)$는 Δk에 덜 민감한 변화를 보였다. 그러나 그 차이는 매우 적어 가정된 형상모수 값의 대소는 Δk에 대한 민감도에 별 영향을 미치지 못한다고 볼 수 있다.
- 명목 생산자 위험과 소비자 위험의 변화에 따른 α,β, $E_\theta(Y)$의 민감도 분석결과는 주어진 생산자 위험 또는 소비자 위험이 증가할수록 덜 민감하다. 그러나 그 차이는 크지 않다.

Ⅳ. 결론 및 앞으로의 연구방향

본 연구에서는 수명이 와이블분포를 따를 때 형상모수를 안다는 가정하에 혼합관측중단하에서 신뢰도 합격 판정 샘플링 계획을 구성하였고 형상모수의 잘못된 가정으로 인한 생산자 위험(α), 소비자 위험(β), 평균 고장개수 ($E_\theta(Y)$)에 대한 민감도 분석을 실시하였다.

형상모수가 변함으로 인해 신뢰도가 높아지는 경우 실제 생산자 위험은 명목값보다 감소하였고 소비자 위험은 증가하였다. 그리고 평균 고장개수는 감소한다. 반대로 신뢰도가 낮은 경우에는 소비자 위험이 감소하고 생산자 위험이 증가하는 경향을 보였다. 이때의 평균 고장개수는 증가한다. 위의 사실로부터 형상모수의 변화는 생산자와 소비자 입장에서 모두 유리한 방향으로 변화함을 알 수 있다. θ_1이 크고 T가 작을수록 생산자 위험(α), 소비자 위험(β), 평균고장개수 ($E_\theta(Y)$)는 형상모수의 변화에 민감한 변화를 보였다. 즉, 실제 형상모수가 가정된 값보다 작을수록 생산자 위험과 평균 고장개수가 급격히 증가했으며, 반대로 실제 형상모수가 가정된 값보다 클수록 소비자 위험과 평균 고장개수가 크게 증가하였다. 따라서 이런 경우는 형상모수에 대한 정확한 추정이 요구된다. 그러나 명목 생산자 위험과 소비자 위험의 변화는 큰 영향을 미치지 못하는 것으로 나타났다.

앞으로의 연구방향은 혼합 관측중단방법 이외의 방법에 대한 민감도 분석과 여러 관측방법에 대한 민감도 비교를 수행하는 것이다.

참고 문헌

[1] Epstein,B. (1954), "Truncated Life Tests in the Exponential case," Ann. Math., 25, 555-564.

[2] Quality Control and Reliability Technical Report TR3(1961), Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing based on the Weibull Distribution (Mean Life Criterion), Office of the Assistant Secretary of Defense (Installations and Logistics), U.S. Government Printing Office.

[3] Quality Control and Reliability Technical Report TR4(1962), Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing based on the Weibull Distribution (Hazard rate Criterion).

[4] Quality Control and Reliability Technical Report TR6(1963), Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing based on the Weibull Distribution (Reliable Life Criterion).