# 물리적 통신망의 이중연결성을 위한 확장 문제에 관한 연구

한국외국어대학교 이희상
서울대학교 안광모

**Abstract**

In this paper we study the problem of augmenting a physical network to improve the topology for new survivable network architectures. We are given a graph $G = (V, E, F)$, where $V$ is a set of nodes that represents transmission systems which be interconnected by physical links, and $E$ is a collection of edges that represent the possible pairs of nodes between which a direct transmission link can be placed. $F$, a subset of $E$ is defined as a set of the existing direct links, and $E/F$ is defined as a set of edges for the possible new connection. The cost of establishing network $N_H = (V, H, F)$ is defined by the sum of the costs of the individual links contained in new link set $H$. We call that $N_H = (V, H, F)$ is feasible if certain connectivity constraints can be satisfied in $N_H = (V, H, F)$. The computational goal for the suggested model is to find a minimum cost network among the feasible solutions.

For a $k$ edge (node) connected component $S \subseteq F$, we characterize some optimality conditions with respect to $S$. By this characterization we can find part of the network that formed by only $F$-edges. We do not need to augment $E/F$ edges for these components in an optimal solution. Hence we shrink the related component into a node.

We study some good primal heuristics by considering construction and exchange ideas. For the construction heuristics, we use some greedy methods and relaxation methods. For the improvement heuristics we generalize known exchange heuristics such as two-optimal cycle, three-optimal cycle, pretzel, quezel and one-optimal heuristics. Some computational experiments show that our heuristic is more efficient than some well known heuristics.

## 제 1 절 문제정의 및 수리모형

통신망은 교환기, 전송장치 등의 통신설비를 노드로 하고 동선 또는 광케이블의 물리적 매체의 링크로 이루어진다. 이와 같은 물리적 매체위에 제공되는 전송방식은 안정성 확보를 위해서는 물리적 이중 연결망을 요구할 때가 빈번하다. 1980년대 이래로 기존 이중연결망 설계에 대한 연구는 대부분 새로운 망을 설계하는 방법에 치우쳐 있었다. 이는 통신매체를 구리선에서 광섬유로 대체하기 위해서는 광케이블 관로를 새로 포설하여야 하므로 기가설된 망이 없다고 가정함이 타당하기 때문이었다. 그러나 초기의 광케이블망의 연결성이 어느 정도 확보된 최근의 안정성 확보에는 기존의 광케이블 상태를 고려해야 한다. 따라서 본 연구는 기존 관로망의 이중연결성이 취약한 경우 새로 관로를 추가해서 효율적으로 이중연결도를 만족하게 하는 문제를 연구한다. 통신망을 노드(node)와 호(弧, edge)로 표현하면 관로망의 확장문제를 위해서 호는 기존에 건설되어 있어 추가비용을 발생하지 않는 호와 새로이 건설되어 비용을 발생할 호의 두가지로 나뉜다.

현실 문제에서 통신망의 모든 부분에 대해 이중연결도를 요구함은 비용측면에서 가능하지 않으므로 노드의 수요, 기능등을 감안 이중연결 필요노드인 special node, 단순연결 필요노드인 ordinary node, 경유해도 좋고 경유하지 않아도 좋은 노드인 optional node의 3가지로 구분함은 널리 쓰이는 모델링방법이다. 통신망의 물리적 연결을 $G = (V, H, F)$로 표현되는 무방향 그래프로 나타내면, $V$는 노드집합, $F$는 기존 호, $H$는 새로 매설 가능한 호들로 나타내며, 전체 호 집합은 $E = H \cup F$ 가 된다. Special node, ordinary node, optinal node 각각에 대해 요구하는 연결도를 나타내는 노드형 (node type, $r(i)$)을 정의하면, 세 노드는 노드형이 각각 2, 1, 0이다. 이를 이용하여 두 노드 $s$와 $t$사이에는 $r_{st} = \min\ (r(s), r(t))$의 노드 (또는 호 비공유)의 경로가 존재해야 한다고 가정한다.

## 2. 관련분야의 기존 연구

[Monma et al.] [Monma and Shallcross]는 $r(i)$가 0, 1, 2 인 세 가지 종류의 노드집합 $V$와 가능한 호집합 $E$에서 좋은 가능해 (feasible network)를 찾는 발견적 기법을 개발하였다. 초기에 가능해를 구하는 방법으로 Greedy-Ears Sparse, Random Sparse, Two-Trees Dense, Random Dense의 4가지를 제시했다. 또한 이들은 해를 개선하는 발견적 기법들은 기존의 TSP문제의 cycle의 비용을 줄이는 교환 휴리스틱들을 확

장하여 Two-Optimal Cycle, Three-Optimal Cycle, Pretzel, Quetzel, Degree, One-Optimal의 6가지 방법을 제시하였다. 우리는 이와 같은 개선 알고리듬을 포함하면서 더욱 일반적인 인접구조를 탐색하는 개량된 알고리듬들을 제시한다.

[Grötschel et al.]은 2-connectivity문제를 일반화하여 서로 노드 또는 호를 공유하지 않는 경로를 $k$개 이상 가지는 $k$연결도 문제를 모형화하여 이론적인 연구결과를 보고했으나 $k$값의 증가에 따라 문제의 난이도가 증가하여 현실적으로 효과적인 알고리듬은 개발되지 않았다.

[Frank]는 우리가 고려한 것처럼 해에 기존의 호가 미리 포함되는 경우를 고려하였으나 추가되는 호의 비용이 모두 1인 $k$연결도 문제를 제시했다. 이 문제는 기존의 관로를 포함하는 망설계에 응용할 수 있는 점에서는 우리의 문제와 흡사하지만 관로건설 및 fiber optic cable 포설 등 호에 관련한 비용이 호의 길이나 위치에 관계없이 모두 같다는 비현실적인 가정 때문에 실제의 물리적통신망의 확장에 적용하기는 불합리하다.

## 3. 초기 가능해 구성

### 3.1 최적해의 성질

<u>정리 1</u> 최적해 $N^*=(V, H^*, F)$는 $F$호 중의 이중연결요소 $S$ ($\subseteq F$)와 $H^* \cap G(V_S) = \varnothing$ 을 만족한다. (단, $V_S$ : $S$의 노드집합, $G(V_S) = \{ij \mid i, j \in V_S, ij \notin F\}$.)

이 정리를 이용하면 먼저 $F$에서 이중연결집합을 찾아 이중연결이 만족되는 노드집합 내에 새로운 호는 고려의 대상에서 제외시킬 수 있으며, 또한 이중연결집합 사이에는 최소비용을 갖는 두 호만 남기고, 이중연결집합 $V_j$를 하나의 pseudo node처럼 다룰 수 있다.

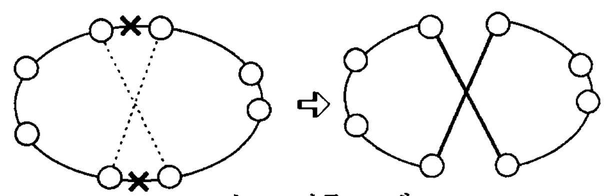
초기 가능해를 구하는 방법으로 두가지 방법을 제시한다. 즉, 노드형이 세 가지로 나뉘므로 노드의 특성을 고려하여 부분적으로 좋은 (locally optimal)해를 이중연결과 단순연결 조건을 각각 우선 만족시키도록 알고리듬을 구성함이다. 알고리듬 2CON_1ST는 이중연결도 ($r(i)$=2)를 요구하는 노드에 우선 순위를 두어 이들 노드를 먼저 locally 좋은 2개의 경로로 연결해서 이중연결을 만족시킨 다음, 남아있는 $r(i)$=1인 노드들을 locally 좋은 1개의 경로로 연결한다. 알고리듬 1CON_1ST는 알고리듬 2CON_1ST과는 반대의 접근법으로, 먼저 모든 노드를 단순 연결하는 것에 우선 순위를 두어 locally 좋은 호들을 사용하고 필요할 경우에는 호를 추가해서 $r(i)$=2인 노드들을 이중연결한다.

### 3.2 호의 교체

이 절에서는 논의의 편리를 위헤 cycle상의 노드를 1, 2, ... $k$로 indexing한다고 가정한다.

#### 3.2.1 이중 교체

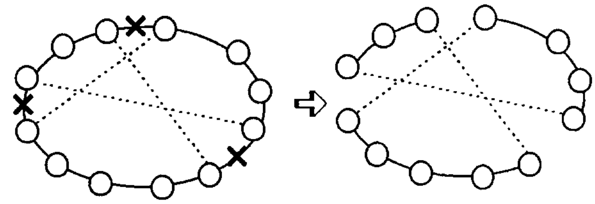
보통 2-optimal exchange heuristic이라 불리우며 traveling salesman problem에서 널리 사용되는 이 기법은 사이클에서 이중연결도를 유지하면서 비용이 더 싼 호 2개를 해집합에 있는 호 호 2개와 바꾼다 (그림1). 기존호 $F$를 고려하면, 만일 제거하려는 두 호중 하나는 $F$에 속하는 호이고 다른 하나는 $H$에 속하는 호이면 $H$에 속하는 호만을 제거하고 새로이 두개의 호를 해에 포함시킨다.



[그림 1] 이중 교체

#### 3.2.2 삼중 교체

보통 3-optimal exchange heuristic이라 불리는 이 방법은 초기 가능해에서 사이클을 찾고 호 $(i, j)$, $(i+1, k)$, $(j+1, k+1)$을 가지는지 확인한다. 만일 호 $(i, i+1)$, $(j, j+1)$, $(k, k+1)$의 비용을 합한 값이 호 $(i, j)$, $(i+1, k)$, $(j+1, k+1)$의 비용을 합한 값보다 크면 호 $(i, i+1)$, $(j, j+1)$, $(k, k+1)$을 $(i, j)$, $(i+1, k)$, $(j+1, k+1)$로 바꾼다 (그림 2). 기존호 $F$를 고려하면, 만일 호 $(i, i+1)$, $(j, j+1)$, $(k, k+1)$ 중 하나라도 $F$에 속하는 호가 있으면 그호는 해에 남겨둔 채 교환한다.

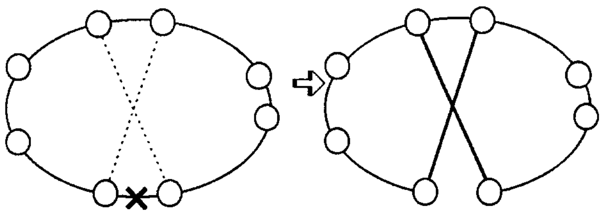


[그림 2] 삼중 교체

#### 3.2.3 1 대 2 바꿈

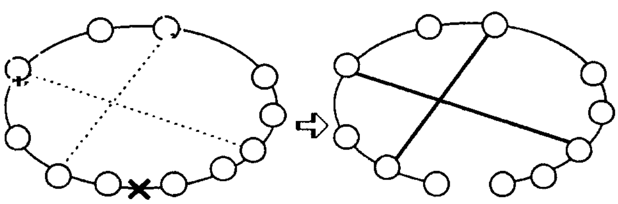
pretzel exchange heuristic이라 불리는 교환

휴리스틱은 사이클 하나를 사이클 두 개로 바꾸는 방법이다. 기존호 $F$를 고려하면, 사이클에서 호 $(i, i+1)$이 $F$에 속하는 호가 아니고 $(i, j)$, $(i+1, k)$ 호의 비용을 합한 값보다 더 큰 비용을 가지면 호 $(i, i+1)$를 $(i, j)$, $(i+1, k)$로 교환할 수 있다.



[그림 3] pretzel 교환

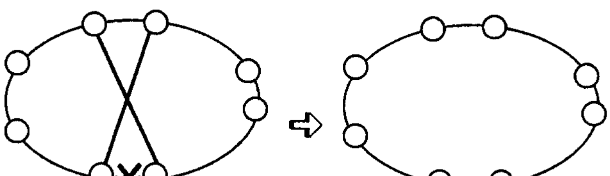
이와 같은 pretzel 교환을 다음과 같이 일반화 시킬 수 있다. 즉 새로 들어 올 수 있는 호를 $(x, j)$, $(y, k)$ $(x \fallingdotseq y+1$ 가능)이라 하고 $x$와 $y$ 사이의 노드는 차수가 2인 $r(v)$ = 1 또는 0인 노드들로만 이루어졌다면 그중 가장 큰 비용의 호 $(v, v+1)$를 선택하여 $(x, j)$, $(y, k)$ 두 호의 비용의 합이 호 $(v, v+1)$의 비용보다 작다면 $(x, j)$, $(y, k)$ 두호와 호 $(v, v+1)$를 교환한다.



[그림 4] pretzel 일반형 교환

**3.2.4 *n* 대 1 바꿈**

quetzel exchange heuristic이라 불리는 교환 휴리스틱은 사이클 두개를 사이클 하나로 바꾼다. 해가 아닌 한 호 $(i, j)$를 포함하는 사이클을 찾고 호 $(i, j)$, $(i+1, k)$가 있는지 확인한다. 그리고 비용을 비교하여 호 $(i, j)$, $(i+1, k)$의 비용을 합한 값이 더 크면 호 $(i, j)$로 바꾼다.



[그림 5] quetzel 교환

이와 같은 quetzel 교환은 다음과 같이 사이클 n개를 사이클 하나로 바꾸는 일반화가 가능하다. 즉 해가 아닌 호 $(i, j)$를 포함시킬 때 만들어지는 사이클에 대해 chord가 있고 그들의 비용 합이 호 $(i, j)$의 비용보다 크다면 그 중 $H/F$에 속하는 모든 chord는 호 $(i, j)$와 교환된다.

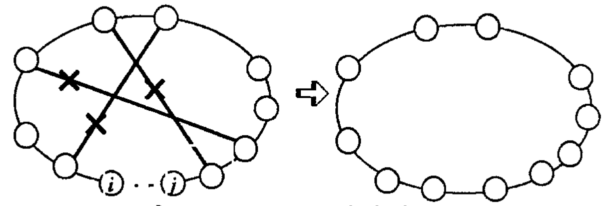



그림 2.12. quetzel 일반형 교환

**3.2.5 cycle + path 교환**

보통 1-opt exchange라 불리우는 이 교환 heuristic은 1개의 edge씩을 교환하는 heuristic이다. 이는 1개의 cycle과 1개의 연결된 path에서 교환이 일어나는데 path상의 한 node에서 cycle로의 1개의 edge를 새로 해로 선택하고 그 edge에 인접한 edge를 제거하는 방법을 사용한다. 이때 새로 entering하는 edge와 path가 각각 만나는 두 node 사이에는 special node가 없어야 feasibilty가 유지된다.

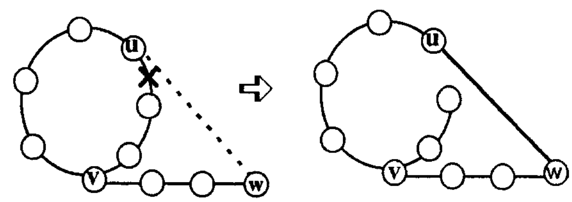
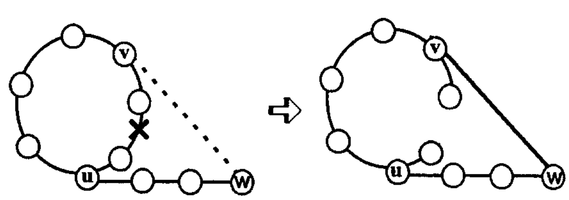



그림 2 .11 1-opt 교환

이와 같은 교환을 우리는 다음과 같이 일반화 한다. path에서 cycle로의 1개의 edge $(u,w)$와 cycle의 $u$ 에서 $v$ 사이의 임의의 edge를 exchange하되 새로 entering하는 edge와 path가 각각 만나는 두 node 사이에는 special node가 없도록 하여 feasibility를 유지한다. 이와 같은 교환으로는 1 cycle과 1 path가 1 cycle과 1 또는 2 path로 변형되게 된다.




[그림 6] 일반형

**4. 개발된 heuristic의 성능**

우리는 다음과 같은 비교적 작은 크기의

문제에 대해 개발한 알고리듬의 성능을 최적 해를 구하는 Branch-and-Bound 알고리듬과의 비교를 위해 실험해 보았다. 이때 사용된 문제 set들에 대해서 5개씩의 임의의 그래프가 생성되어 실험되었다.

[표 1] 개발된 heuristic의 branch-and-bound 방법과의 비교

| $\|V\|$ | $V$ | $\|E\|$ | $\|F\|$ | cost | heuristic 값 | B&B 값 | opt-gap |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | (7,8,7) | 40 | 20 | [1, 10] | 70 | 69 | 0.014 |
| 20 | (7,8,7) | 80 | 20 | [1, 10] | 33 | 33 | 0.000 |
| 40 | (13,14,13) | 80 | 40 | [1, 10] | 115 | 113 | 0.017 |
| 40 | (13,14,13) | 160 | 40 | [1, 10] | 121 | 117 | 0.034 |

이때 노드 $V$의 분포는 (special nodes 갯수, ordinary nodes 갯수, optional nodes 갯수)를 나타낸다. cost 분포는 모두 1에서 10까지의 uniform 분포를 가정한다. 개발된 heuristic 에서 구한 값과 branch-and-bound 방법으로 구한 최적 값과의 차이인 opt-gap항목에서 보듯이 개발된 heuristic의 성능은 최적해와의 오차범위가 0 - 3.4%내외의 좋은 편이다.

한편 다음과 같은 중간정도의 크기의 문제에 대해 [Monma and Shallcross] 의 heuristic을 $F$-edge가 있는 경우에도 사용하도록 변형하여 비교하여 보았다. 이때 사용된 문제 set들에 대해서도 5개씩의 임의의 그래프가 생성되어 실험되었다.

[표 2] 개발된 heuristic의 [Monma&Shallcross] 방법과의 비교 ($|V|$ = 50,cost = [1,50])

| $V$ | $\|E\|$ | $\|F\|$ | MS 값 | heuristic 값 | MS-gap | B&B 값 | opt-gap |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5,30, 5) | 160 | 20 | 182.3 | 177.2 | 0.029 | 169 | 0.043 |
| (10,60, 10) | 160 | 40 | 661.6 | 655.4 | 0.010 | ? | |
| (20,20, 120) | 320 | 80 | 1280.8 | 1229.2 | 0.042 | ? | |

위 표에서 MS 값은 [Monma and Shallcross] 방법을 사용한 목적함수 값, heuristic 값은 우리의 방법을 사용한 목적함수 값, B&B값은 branch-and-bound방법을 사용한 목적함수 값을 각각 나타낸다. 그러나 node가 80개, 160개로 증가하며 branch-and-bound방법은 계산 한계에 이르러 최적값을 구하는데 실패한다. 위표의 40개인 경우가 branch-and-bound방법을 사용할 때의 SPARC20 (main memory 32M) work station 에서의 CPLEX branch-and-bound code의 한계에 가까운 크기인데 제시한 heuristic이 1분내에 해를 구하는데 비해 branch-and-bound code는 1 - 7시간의 계산시간을 사용하였다.

실제 통신망의 후보 네트워크는 앞에서 실험한 문제들 보다 sparse한 경우가 많다. 우리는 서울지역의 node 100개를 선정하여 special node의 갯수를 변화 시키면서 다음과 같이 실험하였다.

[표 3] 서울 관로망에 대한 실험
($|V|$ = 100, cost = [3, 42] )

| $V$ 분포 | $\|H \cup F\|$ | $\|F\|$ | heuristic 값 | B&B 값 | opt-gap |
|---|---|---|---|---|---|
| (20,60,20) | 174 | 105 | 51 | 51 | 0.00 |
| (37,43,20) | 174 | 105 | 113 | 113 | 0.00 |
| (46,34,20) | 174 | 105 | 113 | 113 | 0.00 |

위 표에서 보듯이 서울지역의 실제 광통신망은 100 개 node 에 대해 기존의 관로가 105 개 edge 를 갖고있는 상황에서, 후보 관로가 69 edge 인 매우 sparse 한 후보망을 가지며 이에 대해 개발한 알고리듬은 최적해를 찾아 줌을 알 수 있다.

## 참고문헌

[Monma et al.] C.L. Monma, B.S. Munson, W.R. Pulleyblank, "Minimum-weight two-connected spanning networks," Mathematical Programming 46, 1990

[Monma and Shalcross] C.L. Monma, D.F. Shallcross, "Methods for designing communications networks with certain two-connected survivability constraints," OR. Vol. 37, No.4, 1989

[Grötschel et al.] M. Grötschel, C.L. Monma, M. Stoer, "Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints," Report No. 188, Universit Augsburg, 1989

[Frank] Andras Frank, "Connectivity augmentation problems in network design," Mathematical Programming: State of the Art 1994, 1994