

2자유도 H_∞ 제어를 이용한 비행체 자동조종장치 설계

Autopilot Design with Two Degree of Freedom H_∞ Control Method

* 최광진*, 황준하*, 권오규*

* 인하대학교 전기공학과(Tel: 032-860-7395; E-mail: okkwon95@ dragon.inha.ac.kr)

Abstract In this paper, we present a robust Two Degree of Freedom (TDF) H_∞ controllers for a missile system. The feedback controller is designed to meet robust stability and disturbance rejection specifications while the prefilter is used to improve the robust model matching properties of the closed loop system. As the perturbed model, we use the normalized coprime factor perturbations. These controllers are designed using H_∞ optimization procedures, and applied to a missile model via simulation.

KeyWords H_∞ control, two degree of freedom, normalized coprime factors, loop shaping, model matching.

1. 서론

현재 현장에서 주로 사용되고 있는 제어기들은 체계적인 다변수 제어가 아니고 PID등과 같은 단일 입출력 제어기로서 실무자들의 많은 경험을 토대로 주로 동조되고 있다. 일부의 다변수 기법의 응용사례가 있지만 대부분 정교한 모델을 필요로 하거나 모델 불확실성에 대한 적극적인 대책이 없다. 모델 불확실성을 갖는 시스템에서 견실안정화 문제와 감도 및 견실성능 문제는 실제 시스템에 중요한 영향을 미친다. 최근에는 H_∞ 기법을 중심으로 이러한 문제들을 극복할 수 있는 제어기가 제안되고 있다. 하지만 견실 안정화와 성능의 두 가지 문제는 상호보완관계에 있기 때문에 일반적인 제어기를 설계하는데 상당한 어려움을 겪는다.

이러한 문제에 대하여 Limebeer[4]등은 페루프의 내부안정도를 되먹임 제어기를 사용하여 해결하고 기준 입력의 추종문제와 측정치의 오차 문제를 앞먹임 제어기를 이용하여 목표모델과 시스템의 출력간의 H_∞ 노름을 최소화시키는 2자유도 H_∞ 제어기를 제시하였다. 그러나 이 제어기에서는 모델 오차만을 고려하고 있으며, 외란이나 잡음에 대해서는 고려하지 않고 있다.

본 논문에서는 정규화된 좌소인수형태의 섭동모델과 외란 및 잡음이 공존하는 시스템에 적용하는 문제를 다룬다. 이 제어기의 기본 구조는 Limebeer[4]등의 제어기와 같으나, 외란과 잡음을 처리하기 위해 적절히 변형되었다.

일반적으로 미사일은 자세 제어를 하는 방법에 따라 STT(Skid-to-Turn)와 BTT(Bank-to-Turn) 미사일로 나눈다. STT는 옆미끄럼각(angle of sideslip)과 받음각(angle of attack)만을 전개시켜 수직 및 수평방향의 가속도 성분을 얻는 반면, BTT는 받음각만을 전개시켜 수직방향의 가속도 성분을 얻는다. 이 두가지 제어방식들은 각각 가속도 성분을 얻을 때 일정하게 유지시켜야 할 성분이 있다. BTT의 경우는 옆미끄럼각의 발생을 최소화해야 하며 STT의 경우는 롤각을 일정하게 유지하거나 제어대상에 포함하지 않는다. 이 논문에서는 BTT제어방식과 같이 피치/요(pitch/yaw)방향의 가속도 성분을 얻는 과정에서 롤각속도가 일정하다는 가정하에 피치와 요각속도가 제한된 범위에서 변화할 때 수직 및 수평방향 가속도 성분이 기준입력을 추종하도록 2자유도 H_∞ 제어기를 설계하는 방법을 제시하고 그 성능을 확인한다.

2. H_∞ 제어

제어시스템은 명령 추종 및 외란제거 성능과 모델링 오차, 잡음 등에 대한 견실성을 갖추어야 한다. 이러한 설계 목적을 이루기 위하여 이 논문에서는 저역필터 역할을 하는 가중함수를 이용하여 루우프형성을 하고 정규화된 소인수분해에 의한 모델섭동을 고려한 2자유도 H_∞ 제어기법을 사용한다.

루우프형성의 원리는 성능과 견실성 간의 상보성에 근거하며, 전보상기 혹은 후보상기를 사용하여 공칭플랜트의 특이값을 바라는 루우프의 형태로 설계하는 것이다. 이 때 형성된 플랜트는 공칭플랜트와 보상기들 간의 결합에 의하여 구성된다. 하지만 개루우프 시스템의 형성화는 페루우프 시스템의 내적안정도를 보장하지는 않는다. 따라서 이 논문에서는 내적안정도의 만족을 위한 되먹임제어기를 H_∞ 제어기법을 사용하여 구현한다. 그리고 성능 견실도를 만족하기 위해서 모델정합의 관점에서 앞먹임제어기를 갖는 2자유도 제어기법을 적용한다. 공칭모델로는 부하외란이나 입·출력에 모두 존재하는 모델링 오차를 고려하기 위하여 정규화된 좌소인수분해에 의한 모델 섭동 구조를 사용한다. 이러한 방법으로 설계된 제어기와 보상기는 서로 결합되어 최종제어기를 구성한다.

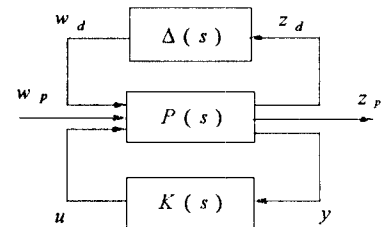


그림 1. 일반화된 표준형 H_∞ 구조.

Figure 1. The generalized standard H_∞ structure.

2.1 H_∞ 제어기 구조

그림 1 에서는 표준형 H_∞ 구조를 보이고 있다. $F(s)$ 는 플랜트, $K(s)$ 는 안정화 제어기, $\Delta(s)$ 는 모델섭동과 같은 불확실 요소를 나타낸다. 그림에서의 신호 u 와 y 는 각각 플랜트의 제어입력과

측정된 출력항을 표시한다. 벡터 w_p 와 z_p 는 설계목적에 따라 실제 플랜트의 최적제어를 위해 설정되는 항이다. 또한 w_d 와 z_d 는 각각 불확실구조의 입력과 출력을 표시한다.

H_∞ 제어문제는 이와 같은 w 와 z 의 설정을 설계사양에 따라 행하고 $\|R_{zw}\|_\infty$ 을 최소화하는 문제이다. w_p , w_d 그리고 z_p , z_d 를 묶어서 각각 w 와 z 로 표시하면 $F(s)$ 는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$F(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad \text{단,} \quad \begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad (1)$$

또는 일반적인 상태공간 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$F(s) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ - & - & - \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

출력 되먹임 제어를 $K(s)$ 라 하면, 즉, $u = K(s)y$ 라 할 때, 아래와 같은 페루우프 전달함수를 얻을 수 있다.

$$z = F_1(P, K)w \quad (3)$$

$$R_{zw} = F_1(P, K) \equiv P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

H_∞ 제어문제는 아래의 페루우프 전달함수의 최대특이값을 γ 이하로 설정할 때 $F(s)$ 를 안정화하는 제어기 $K(s)$ 를 찾는 문제이다.

$$K_\infty \equiv \{K: K \text{ stabilizes } F(s), \|F_1(P, K)\|_\infty \leq \gamma\} \quad (4)$$

$$\|F_1(P, K)\|_\infty \equiv \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$$

Glover와 Doyle은 이러한 제어기를 구하는 문제를 일반화된 플랜트에 대하여 두 개의 대수 리카티 방정식의 해를 구하는 즉 일반적인 4 블럭 문제로 변환하여 플랜트의 차수와 같은 제어기를 구하는 방법을 제시한 바 있다[1]. 이와 같이 하여 구현된 제어기는 불확정 구조의 최대 특이값이 $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma^{-1}$ 와 같은 조건 하에서 플랜트 $F(s)$ 를 안정화한다.

2.2 건설 안정도

주어진 공칭 플랜트 모델 P 를 정규화된 좌소인수분해로 나타내면, $P = M^{-1}N$ 이며, M, N 은 $MM^{-1} + NN^{-1} = I$ 을 만족하며 서로소이다. 이 때 부하외란 입력 u_d 를 가정하여 P 를 (5)와 같이 표시하면, P 의 정규화된 소인수분해는 (6)과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} G_c & G_d \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ - \\ - \\ C \end{matrix} = \begin{bmatrix} A & B_c & B_d \\ - & - & - \\ - & - & - \\ C & D_c & D_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ - & - \\ - & - \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} N_c & N_d & M \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ - \\ - \\ - \end{matrix} = \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A+HC & B_c+HD_c & B_d+HD_d & H \\ - & - & - & - \\ R^{-1/2}C & R^{-1/2}D_c & R^{-1/2}D_d & R^{-1/2} \end{bmatrix}$$

여기서 $D_d D_d' = 0$, $B_d D_d' = 0$ 이라고 가정하면, $H := -(B_c D_c' + Z C')R^{-1}$, $R := I + D_c D_c'$ 이다. 이 때 $Z \geq 0$ 은 아래와 같은 필터 대수 리카티 방정식 (7)의 유일한 해이다.

$$(A - BS^{-1}D'C)Z + Z(A - BS^{-1}D'C)' - ZC'R^{-1}CZ + BS^{-1}B' = 0 \quad (7)$$

$$S := I + D'D$$

그림 2 에서 표시한 섭동플랜트는 섭동요소 $\Delta_M, \Delta_N \in H_\infty^*$ 이

$\|\Delta_M \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1}$ 을 만족하는 조건하에서 아래와 같이 표현된다.

$$G_P = (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \quad (8)$$

이 때에 페루우프 시스템의 내적 건설 안정도를 최대화하기 위해서는 아래의 γ 값을 최소로 하는 되먹임제어기 $K(s)$ 를 구해야 한다([4,5]).

$$F(P, K) = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (9)$$

여기에서 최적의 γ_{opt} 값은 좌소인수분해 모델의 Hankel norm 을 사용하여 구할 수 있다[4]. 이것을 간단히 표현하면 식(7)과 아래의 제어 대수리카티방정식 (10)의 유일한 해 ($X \geq 0$)를 이용하여 γ_{opt} 를 식(11)과 같이 구할 수 있다.

$$(A - BS^{-1}D'C)'X + X(A - BS^{-1}D'C) - C'R^{-1}C + XBS^{-1}B'X = 0 \quad (10)$$

$$\gamma_{opt} = (1 + \lambda_{\max}(XZ))^{1/2} \quad (11)$$

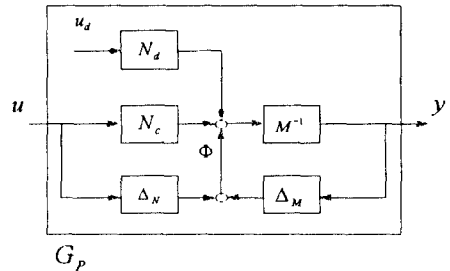


그림 2. 정규화된 좌소인수분해에 의한 섭동모델.

Figure 2. Normalized left coprime factorization of the perturbed plant.

2.3 건설성능문제

모델정합의 관점에서 섭동 페루우프 시스템의 건설성능을 보장하기 위한 문제는 다음과 같이 표현된다. 여기서 M_0 는 플랜트의 목표모델이다.

$$\| (I - G_P K_2)^{-1} G_P K_1 - M_0 \|_\infty \leq \gamma \quad (12)$$

G_P 는 섭동모델이며 이것을 가정하는 방법에 따라 다양한 최적화 해를 구할 수 있는데 여기서는 좌소인수분해에 의한 섭동모델식(8)를 사용한다. 아래의 식(13)은 역행렬 보조정리를 이용하여 선형분수변환을 한 것이다.

$$\Phi = [I - (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)K_2]^{-1} \times (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)K_1 - M_0$$

$$= F_l \left(\begin{bmatrix} (I - GK_2)^{-1}GK_1 - M_0 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ G(I - K_2G)^{-1}K_1 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ (I - K_2G)^{-1}K_1 & K_2(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \cdot [\Delta_M \Delta_N] \right) \quad (13)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} (I - GK_2)^{-1}GK_1 - M_0 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ G(I - K_2G)^{-1}K_1 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ (I - K_2G)^{-1}K_1 & K_2(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma$$

$$\|\Delta_M \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1} \quad (14)$$

식 (13)는 Redheffer 정리[5]에 의해 (14)와 같이 쓸 수 있다. 건실성 문제의 위와 같이 일반화된 표준형 H_∞ 문제로 변환되며 Glover-Doyle 등이 제시한 방법[1]을 이용하여 제어를 구할 수 있다. 여기에서 앞먹임제어기와 뒤먹임제어기의 독립적인 설계를 위해서는 Limebeer[4]의 보조정리를 이용할 수 있다.

보조 정리 1 [4] : $\left\| \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma_1, \left\| \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma_2$ 라고 가정하면, $\| \Delta \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}$ 인 Δ 에 대해 $\left\| F_l \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right) \right\|_\infty \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ 이다.

증명 : Limebeer[4]

이 보조 정리에 의해 식(14)의 첫 번째 열과 두 번째 열을 각각 독립적으로 만족시키는 2자유도 제어기를 설계할 수 있다.

3. 2자유도 H_∞ 제어기 설계

제어기 설계를 위한 w 와 z 의 선정, 목표모델, 루우프형성 가중함수는 그림 3과 같은 구조로 설정한다. 이때 z_1 은 목표모델과 시스템 출력간의 정합오차를, z_2, z_3, z_4 는 모델섭동요소등의 불확정 입력에 대한 출력오차를, 식(2)의 D_{12}, D_{21} 은 각각 전열 및 전행계수일 조건을 만족하기 위해서 g_1, g_3 는 각각 정칙인 행렬로 선택한다. 그리고 구동기 포화 특성과 같은 제약조건을 만족하기 위해서 z_3 를 첨가한다. 그리고 r 은 기준입력, u_c 는 플

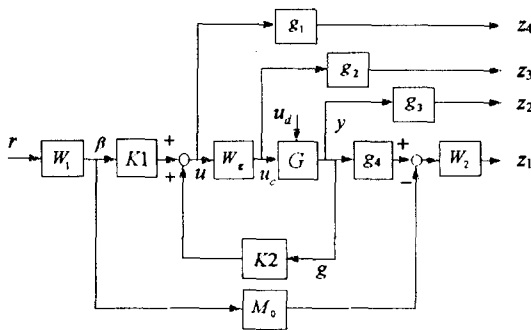


그림 3. 2 자유도 제어기 구조.
Figure 3. Two degree of freedom controller.

랜트입력, u_d 는 입력잡음과 부하 외란을 나타낸다.

플랜트의 입력을 제어하는 신호는 기준입력 β 와 센서 뒤먹임 신호 g 이며 제어기의 형태는 식(15)와 같은 구조를 가지는 2자유도 제어기이다.

$$u = K \begin{bmatrix} \beta \\ g \end{bmatrix} = K_1 \beta + K_2 g \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \beta \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_2 M_0 W_1 & W_2 M^{-1} & W_2 G_d & W_2 G_c W_g \\ 0 & g_3 M^{-1} & g_3 G_d & g_3 G_c W_g \\ 0 & 0 & 0 & g_2 W_g \\ 0 & 0 & 0 & g_1 \\ - & - & - & - \\ W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & G_d & G_c W_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ u_d \\ u \end{bmatrix} \quad (16)$$

이 때 그림 3을 참고로 하여 식(1)과 같은 구조로 만든 것이 식(16)이다. 이 문제를 Glover-Doyle 알고리즘에 적용하기 위해서는 식(15)을 식(16)에 적용하고 식(6)을 이용하여 식(2)와 같은

구조로 변환을 해야한다. 2자유도 H_∞ 제어기 설계과정을 요약하면 다음과 같다.

1) 모델링 오차 분석

동작점에 따른 모델링 오차, 주요한 외란 및 잡음 등의 주파수 특성을 분석한다.

2) 루우프 형성

모델링 오차 분석에 의하여 가중함수 W_g 를 선정하고 루우프 형성을 한다. 이 논문에서는 식(19,20)에 표기한 W_g 를 사용하였고 특이치 선도는 그림 4와 같다.

3) M_0 설정.

4) g_1, g_2, g_3, W_1, W_2 설정.

5) 식(2)와 같은 표준화된 H_∞ 구조로의 변환.

6) Glover-Doyle 알고리즘에 의한 제어기 구성.

이렇게 해서 구해진 제어기 K 는 루우프 형성 가중함수 W_g 와 결합하여 $W_g K = K_f$ 를 구성한다.

4. 모의실험

이 논문에서는 Williams[6]등이 사용한 모델을 참고로 하여 고도 10000 ft, 마하수 1.3, 동압 2000 lb/ft², 받음각 8deg, 롤각속도 500deg/sec인 비행상태에서 선형화된 모델(17)를 사용하여 제어기를 구현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_c u_c + B_d u_d, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2.9694e+0 & -4.5710e+3 & -1.7758e+3 & 0 \\ -3.2597e-2 & -2.8000e-2 & 0 & 4.9900e+2 \\ 1.4078e+2 & 0 & -8.3607e-1 & 1.2870e+3 \\ 0 & -4.9900e+2 & -2.2922e-1 & -2.8000e-2 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 2.1434e+6 \\ -7.3930e+2 & 0 \\ 1.6542e+5 & 0 \\ 0 & -4.1834e+2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = B_c.$$

상태변수($x = [a_z, q, a_y, r]^T$)는 각각 수직방향 가속도, 피치각속도, 수평방향 가속도, 그리고 요각속도이며, 제어입력($u = [\delta q, \delta r]^T$)은 각각 피치 및 요 축의 조종변위이다.

설계된 자동조종장치의 추종 성능을 확인하기 위해서 수직방향 가속도의 명령입력을 10g로 하였을 때, 외란에 대한 강인성을 확인하기 위해서 입력측에 u_d 의 외란 및 잡음을 인가했을 때의 각각의 상태변수의 변화를 그림 5에 표시한다. 또한 갑작스런 외부로부터의 강한 외란에 대한 강인성을 알아보기 위해서 각 상태가 정상상태에 도달한 뒤에 약 0.3초간 존재하는 외란을 설정하고 이때의 상태 변수의 변화를 보았다. 각각의 경우에 수평방향 가속도 성분은 5g 미만, 옆미끄럼각은 1deg미만을 유지한다. 같은 경우에 수직방향 가속도의 명령입력을 30g로 하였을 경우의 결과를 그림 6에 표시한다. 이 실험에서 설정된 각각의 외란은 각 축의 조종변위의 입력으로 설정하고 실제 미사일대신 선형화된 모델을 사용한다.

$$M_0(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}(M_1, M_2) \\ \text{ZEROS}(2,2) \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{35}{s+35}, \quad M_2 = \frac{5}{s+5}. \quad (18)$$

$$W_g = \frac{1}{(s+0.15)^2 (s+150)(s+350)} \text{diag}(w_1, w_2), \quad (19)$$

$$w_1 = 12.5(s+2.3)(s+150), \quad w_2 = 12.5(s+2.3)(s+350), \quad (20)$$

$$u_d = \left[\frac{1}{(s+2)} n_1, \frac{1}{(s+2)} n_2 + n_d \right]^T. \quad (21)$$

여기서 n_i 는 영평균 백색 잡음이며, n_o 는 갑작스런 외란을 가하기 위해 설정된다. diag 는 대각행렬을, zeros 는 영행렬을 표시한다.

5. 결론

이 논문에서는 미사일의 자동조종장치 설계를 위해 2 자유도 H_∞ 제어기법을 적용하였다. 특히 BTT미사일 제어시에 고려 대상인 옆미끄럼각과 가로방향 기동능력인 수평방향 가속도 성분을 가능한 한 작게 유지하며, 수직방향 가속도 성분을 변화 시키도록 설정하였다. 실제 비행체를 위한 자동조종장치 설계의 어려운 점은 비선형 요소들이 서로 강하게 연관되어 있기 때문인데, 이것은 연성효과가 커질때 제어기 설계시에 설정했던 선형화 모델이 실제 모델과 오차가 생기기 때문이다. 2자유도 H_∞ 제어기는 이러한 모델 오차를 어느 정도 허용하며, 기준 입력에 빠른 응답을 보이는 것을 모의실험을 통해 확인하였다. 비행모드 변화시에 동작점 변화를 고려한 비선형 모의실험은 계속 연구할 것이다.

후기

이 논문은 국방과학연구소의 지원에 의한 "비행체계의 다변수 강인 제어에 관한 연구" 제 2단계 연구 결과중 일부입니다.

참고문헌

- [1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [2] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity," *Systems & Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [3] M. Green, D. J. N. Limebeer, "Linear Robust Control," *Prentice Hall, Inc.* 1995.
- [4] D. J. N. Limebeer, E. M. Kasenally, and J. D. Perkins, "On the Design of Robust Two Degree of Freedom Controllers," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 157-168, 1993.
- [5] R. M. Redheffer, "On a certain linear fractional transformation," *J. Maths. Phys.*, pp. 269-286, 1960.
- [6] D. E. Williams and B. Friedland, "Modern Control Theory for Design of Autopilots for Bank-to-Turn Missiles" *J. of Guidance*, vol. 18, no. 4, pp. 378-386, 1987.

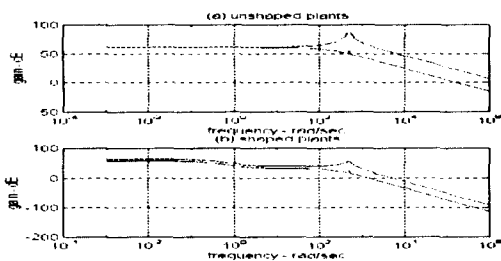


그림 4. 형성화된 모델과 공칭모델의 특이치 선도.
Figure 4. Singular value Plots for the shaped model and nominal model.

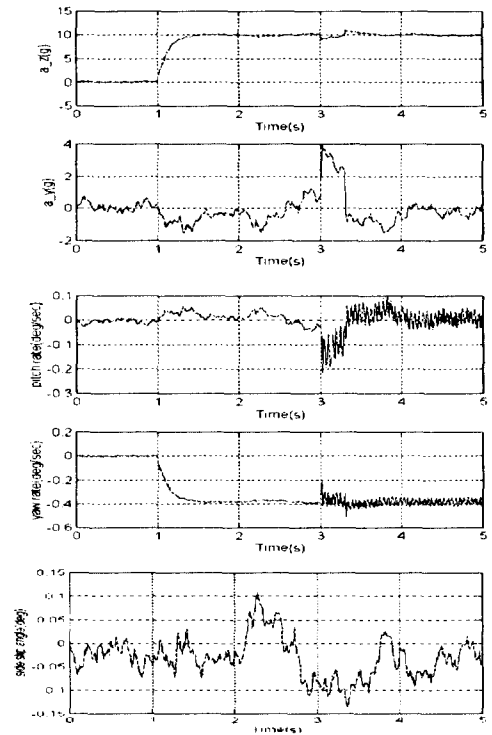


그림 5. 수직 방향 가속도 성분의 기준 입력을 10g로 하였을 때의 페루우프 시스템의 시간응답.

Figure 5. Time response of the closed-loop system to a 10g change in acceleration along z body axis.

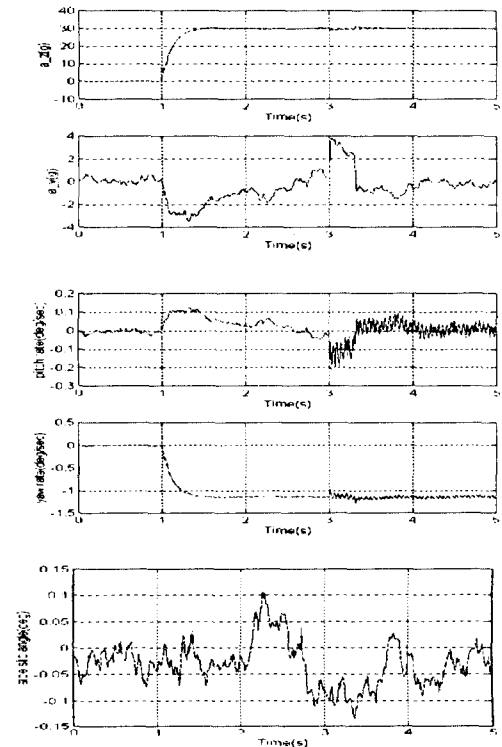


그림 6. 수직 방향 가속도 성분의 기준 입력을 30g로 하였을 때의 페루우프 시스템의 시간응답.

Figure 6. Time response of the closed-loop system to a 30g change in acceleration along z body axis.